وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة الدكتور مولاي الطاهر بسعيدة
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

كتاب بيداغوجي بعنوان

# الرياضيات وتطبيقاتها في علم الاقتصاد

إعداد الدكتورة: بوعكة عائشة
أستاذة محاضرة "ب" بقسم العلوم الاقتصادية

السنة الجامعية:2023/2022

# الفهرس العام

# الفهرس العام

## I) بالعربية

| | |
|---|---|
| ط | الطبعة |
| ص | الصفحة |
| ص ص | من الصفحة إلى الصفحة |

## I) بالفرنسية

| | |
|---|---|
| É | Édition |
| p | الصفحة |
| pp | من الصفحة إلى الصفحة |
| Op. Cit | المرجع السابق |
| Ibid | المرجع نفسه |

## I) بالانجليزية

| | |
|---|---|
| E | Edition |
| Idem | المرجع السابق |
| Ibid | المرجع نفسه |

# فهرس

# الأشكال والجداول

# فهرس الجداول



# فهرس الأشكال

# فهرس الأشكال والجداول



**ملاحظة.** ترقيم الجداول والأشكال مرتب حسب ترقيم الفصول، فمثلا، الجدول 5-2 يعني الجدول الثاني للفصل الخامس والشكل 1-8 يعني الشكل الثامن للفصل الأول.

# مقدمة

معظم المتغيرات الاقتصادية هي متغيرات كمية ترتبط فيما بينها بعلاقات رياضية، لذا أصبح التحليل الكمي أداة مهمة لإعطاء وصف دقيق للظواهر الاقتصادية وتحديدا المشكلة المراد دراستها؛ إذا تم بناء النموذج الاقتصادي بشكل صحيح اعتمادا على أساليب رياضية.

المُؤلَف يحتوي على أربعة عشر فصلا. في الفصل الأول، تطرقنا إلى مبادئ نظرية المجموعات، حيث تعرفنا على مفهومها، تمثيلها البياني وأنواعها، أما الفصل الثاني فقد خصصناه لدراسة التحليل التوفيقي وأهم الطرق المتبعة لتجميع عناصر مجموعة. الفصل الثالث يهتم بدراسة المتتاليات العددية بالتركيز على اتجاه تَغيرها وتَقاربها أو تباعدها واختتمنا الفصل بدراسة السلاسل العددية، الفصل الرابع مخصص لدراسة نهايات الدوال واستمراريتها، أما اشتقاق دالة وتطبيقاتها في الاقتصاد فتطرقنا إليه في الفصل الخامس.

الفصل السادس يهتم بدراسة الدوال الأسية واللوغاريتمية، كما تطرقنا في الفصل السابع إلى الدوال الأصلية وحساب التكامل، مركزين على أنواعه، خواصه وكذا طرق حسابه وأنهينا هذا الفصل بتطبيقات التكامل في الاقتصاد، بخصوص الفصل الثامن، فتطرقنا إلى المعادلات التفاضلية من الرتبتين الأولى والثانية. الفصل التاسع مخصص لدراسة الدوال ذات متغيرين، حيث ركزنا على المشتقات الجزئية والقيم الحدية لهذه الدوال.

الفصل العاشر احتوى على الفضاءات الشعاعية، حيث تطرقنا إلى بنيتها، أساسها وبُعدها، أما التطبيقات الخطية فركزنا عليها في الفصل الحادي عشر. الفصل الثاني عشر احتوى على مفاهيم عامة حول المصفوفات والعمليات عليها، المحددات وطرق حساب مقلوب مصفوفة، بخصوص الفصل الثالث عشر، تطرقنا إلى تطبيقات المصفوفات في حل جمل معادلات خطية. ليبقى الفصل الأخير الذي ركزنا فيه على القيم الذاتية والأشعة الذاتية، لما لها من أهمية في قابلية تقطير مصفوفة (أي جعلها مشابهة لمصفوفة قطرية).

كما نشير أننا أضفنا تمارينا محلولة وأخرى للحل في نهاية كل فصل من الفصول سالفة الذكر.

# الفصل الأول

# مبادئ نظرية

# المجموعات

لنظرية المجموعات دور مهم في الرياضيات ويعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في بناء النظرية. يفترض أن مفهوم المجموعة واضح في الأذهان وتفاديا لكل التباس ونظرا لظهور بعض التناقضات في نظرية المجموعات، تم تحديد مجموعة من الضوابط لهذا المفهوم سنلخصها في هذا الفصل.

## 1- مفهوم المجموعة (Set Concept)

**تعريف 1-1.** *المجموعة هي تجمع لأشياء بينها صفات مشتركة فنقول مثلا، هذه مجموعة من كتب الرياضيات، المكتبة هي مجموعة من الكتب، الأسبوع هو مجموعة من الأيام، الفوج هو مجموعة من الطلبة.*

*تكتب المجموعة بين حاصرتين { } ويرمز لها بأحد الحروف الكبيرة $A$، $B$، $C$،... وللأشياء بأحرف صغيرة $a$، $b$، $c$،... نسميها عناصر (elements). يسمى الرمز " $\in$ " رمز الانتماء، فإذا كان $a$ أحد عناصر المجموعة $A$، نكتب " $a\in A$ " ونقرأ " $a$ ينتمي إلى $A$" وفي الحالة العكسية نكتب " $a\notin A$ " ونقرأ " $a$ لا ينتمي إلى $A$" ومعناه أن " $a$ ليس عنصرا من $A$".*[1]

**ملاحظة 1-1**

- الكتابة " $a\in a$ " مرفوضة.
- مجموعة كل المجموعات غير موجودة.

**أمثلة 1-1.** لتكن المجموعات التالية

$$A=\left\{0,9,6,\sqrt{3},-\frac{1}{4}\right\}\text{، } B=\{a,b,k,g\}\text{، } C=\{1,x,x^2,x^4\}$$

لدينا $\quad 0\in A,\ 1\notin B,\ x\in C$

**ملاحظة 1-2**

- لا يوجد ترتيب في كتابة عناصر المجموعة فمثلا المجموعة التي تحوي العناصر $x_1$ ، $x_2$ ، $x_3$ هي المجموعة نفسها التي تحوي العناصر $x_2$ ، $x_3$ ، $x_1$ أي $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_2, x_3, x_1\}$.
- المجموعة التي تحوي عنصرا وحيدا $x$ يرمز لها بالرمز $\{x\}$ ، وعليه $x\in\{x\}$ وليس $(x=\{x\})$.[2]

## 2- طرق تعيين مجموعة (Methods of Describing a Set)

يعبر عن المجموعات بعدة طرق، أهمها، طريقة ذكر العناصر والصفة المميزة.

### 2-1- ذكر العناصر (Tabular (or Roster or Enumeration) Method)

**تعريف 2-1.** *تكتب المجموعة بذكر كافة عناصرها إذا كانت منتهية، أما إذا كانت غير منتهية، فتكتب المجموعة بذكر بعض عناصرها التي تعطي صيغة بقية العناصر.*[3]

**أمثلة 2-1**

$$A=\{1,0,b,8,d\},\ B=\{1,2,\pi,-12\},\ C=\{2,3,4,5,6\}=\{2,\dots,6\},$$

---

[1] فتحي خليل حمدان. *الرياضيات للعلوم الإدارية و المالية*. ط 4. دار وائل للنشر، عمان- الأردن، 2014، ص. 13.

[2] Géraud Sarrebourse de La Guillonnière. *Ensembles*. Licence. Ensembles, 2012. <cel- 00765690>, p. 4.

[3] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 13.

$\mathbb{N} =\{ 1, 2 ,3 ,\dots \},\ \mathbb{Z} =\{ \dots , -3 , -2 , -1 ,0 ,1 ,2 ,3,\dots \}.$

### 2-2- الصفة المميزة (Selector (or Rule or Builder) Method)

**تعريف 1-3.** *تكتب المجموعة عن طريق تعريف أو ذكر الصفة المشتركة بين جميع عناصرها دون ذكرها .*[1]

**أمثلة 1-3.** لنكتب المجموعات التالية بذكر عناصرها

$A =\{ x \in \mathbb{N} : x \leq 7\} ,\ B = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, 2\leq x < 4\} ,\ C =\{ x \in \mathbb{N} :$ فردي $x \}$

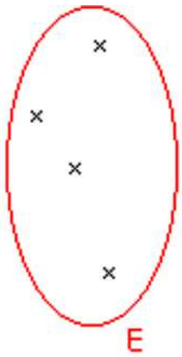
لدينا

$A =\{1 ,2 ,3 ,4 ,5 , 6 ,7 \} =\{1, \dots , 7\},\ B = [2 ,4[ ,\ C =\{ 1, 3, 5, 7, \dots \}$

**ملاحظة 1-3.** الرمزان " : " و " / " يقرآن " بحيث ".

## 3- التمثيل البياني لمجموعة (Set Graphic Representation)

*هناك عدة تمثيلات بيانية معتمدة لتمثيل المجموعات، لكن في هذا الفصل سنعتمد تمثيل (أو مخطط) ڤن (Venn diagram)، بحيث كل مجموعة تمثل بدائرة تكتب بداخلها عناصر المجموعة، كما يوضحه الشكل التالي.*




***شكل 1-1- مخطط ڤن*** [2]

## 4- أنواع المجموعات (Types of Sets)

### 4-1- المجموعة الخالية (Null (or Empty or Void) Set)

*هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز $\phi$ أو $\{ \}$ .*

**ملاحظة 1-4.** المجموعة الخالية وحيدة.

### 4-2- المجموعة المنتهية (Finite Set)

*هي المجموعة التي تحوي عددا منتهيا من العناصر .*[3]

**أمثلة 1-4.** المجموعات التالية مجموعات منتهية

$A =\{ \pi , \ln(2) , \sqrt{3} ,0\} ,\ B = \{ x , y , k \} ,\ C =\{ \frac{1}{2} , e , -\frac{1}{7} \}$

---

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 13.

[2] Géraud Sarrebourse de La Guillonnière. Op. Cit, p. 5.

[3] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 14.

### 4-3- المجموعة غير المنتهية (Infinite Set)

*هي المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.*

**أمثلة 1-5.** المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

A={ 1 , 3 ,5 ,7 ,9,11,… }, B ={$x \in \mathbb{N}$ : $x$ من مضاعفات العدد 5}, C = { $x \in \mathbb{R} : x \geq 2$}

وتعد مجموعات الأعداد من أشهر المجموعات غير منتهية.

**- مجموعات الأعداد (Sets of Numbers)**

قُسمت الأعداد إلى مجموعات مختلفة تبعا لبعض الخصائص، نستعرض فيما يلي هذه المجموعات.

**أ) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (Set of Natural numbers)** [*]

*هي أصغر مجموعات الأعداد وتسمى أيضا مجموعة العد وتحوي على الأعداد الموجبة ويرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ ونكتب $\mathbb{N} = \{1 , 2 ,\dots \}$.*

**ب) مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ (Set of Integer Numbers)** [*]

*هي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة إضافة إلى الصفر ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ وتكتب*

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1 , 2 , 3, \dots \}$$ [1]

**ج) مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$ (Set of Decimal Numbers)**

*هي مجموعة الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{a}{10^n}$ بحيث $n \in \mathbb{N}$، $a \in \mathbb{Z}$ ويرمز لها بالرمز $\mathbb{D}$.*

**د) مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ (Set of Rational Numbers)** [*]

*هي مجموعة الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث $p, q \in \mathbb{Z}$ و $q \neq 0$، تحوي هذه المجموعة الأعداد العشرية إضافة إلى الكسور ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ ونكتب*

$$\mathbb{Q} = \{ x : x = \frac{p}{q} , (p , q \in \mathbb{Z}) , q \neq 0 , p \wedge q = 1 \}$$

*بحيث الكتابة $p \wedge q = 1$ تعني أن $p$ و $q$ أوليان فيما بينهما.*

**هـ) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (Set of Real Numbers)** [*]

*العدد غير النسبي هو العدد الذي لا يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث $p , q \in \mathbb{Z}$، $q \neq 0$ و $p \wedge q = 1$*

*مثل جذور الأعداد التي ليست مربعا تاما ( الأعداد الصماء) مثل : $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{\frac{5}{4}}$ وأيضا $\pi$ ، $e$ ، $ln(2)$ ، …*

*ومجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة التي تحوي الأعداد النسبية وغير النسبية ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$.* [2]

**- المجالات (Intervals)**

*هي جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية ومنها المفتوح كالمجال $]a, b[$ والمغلق $[a, b]$ ونصف المفتوح*

---

[*] الرمز $\mathbb{N}$ هو الحرف الأول من الكلمة الايطالية (Naturale) والتي تعني طبيعي.

[*] الرمز $\mathbb{Z}$ هو الحرف الأول من الكلمة الألمانية (Zahl) والتي تعني عدد.

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 18.

[*] الرمز $\mathbb{Q}$ هو الحرف الأول من الكلمة الايطالية (Quotient) والتي تعني نسبة .

[*] الرمز $\mathbb{R}$ هو الحرف الأول من الكلمة الألمانية (Real) والتي تعني حقيقي.

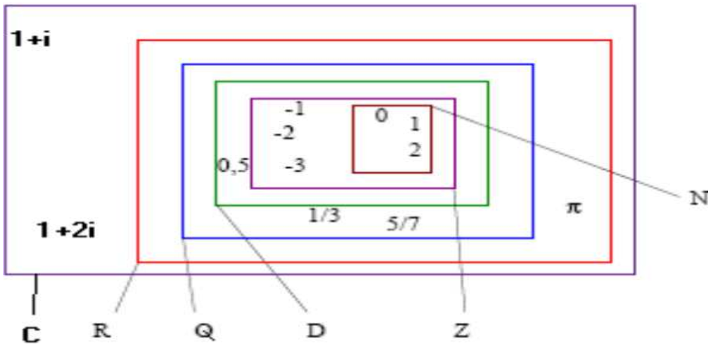
[2] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 19.

$]a,b[$ مع $a,b$ أعداد حقيقية.

**و) مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ (Set of Complex Numbers)**

*هي أكبر مجموعات الأعداد وتشمل مجموعة الأعداد الحقيقية إضافة إلى الأعداد التي مربعها أعداد سالبة ونكتب الأعداد في هذه المجموعة على الشكل $z = x + iy$ بحيث $x$ و $y$ أعداد حقيقية تسمى على الترتيب بالجزء الحقيقي $Re\ (z)$ والجزء التخيلي $Im\ (z)$ للعدد المركب $z$.*

*الشكل التالي يوضح العلاقة بين مختلف مجموعات الأعداد.*




***شكل 1-2- مخطط فّن لمجموعات الأعداد***

### 4-4- المجموعة الكلية (Universal Set)

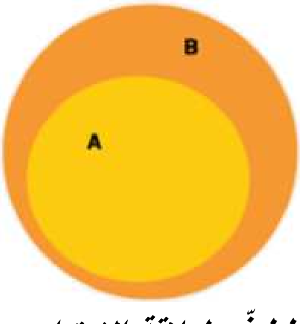
*هي أكبر مجموعة وتحوي كل العناصر قيد الدراسة ويرمز لها بالرمز $E$ أو $\Omega$ وتعطى ضمن السؤال أو الدراسة.*[1]

### 4-5- المجموعة الجزئية (Subset)

*لتكن $A$ و$B$ مجموعتين. نقول أن "$A$ محتواة في $B$" أو "$A$ مجموعة جزئية من $B$" أو "$A$ جزء من $B$" أو "$B$ تحوي $A$"، إذا كانت جميع عناصر $A$ موجودة في $B$ ونكتب "$A \subset B$"*[*]*، أي*

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

*أما إذا كانت $A$ غير محتواة في $B$ فنكتب "$A \not\subset B$" والشكل التالي يوضح ذلك.*




***شكل 1-3- مخطط فّن لعلاقة الاحتواء بين مجموعتين*** [2]

### خواص 1-1

*- المجموعة الخالية $\phi$ محتواة في كل مجموعة معطاة.*

---

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 14.

[*] رمز الاحتواء "$\subset$" ظهر لأول مرة من طرف الرسام Gergonne سنة 1816، ثم قام Schroder بإعطاء المعنى الحالي لهذا الرمز الذي اشتق من الحرف الأول للكلمة اللاتينية Contient في كلمة " B Contient A " أي "B تحتوي A " ($A \subset B$).

[2] Géraud Sarrebourse de La Guillonnière. Op. Cit. Définition 3, p. 5.

- $A \subset A$ .
- إذا كان $A \subset B$ و $B \subset C$ فإن $A \subset B$ *( الاحتواء علاقة متعدية).*

**أمثلة 1-5**

1) أي المجموعات التالية تمثل مجموعة جزئية من المجموعة الكلية Ω ؟

$\Omega = \{1 , c , d , e , \sqrt{2} , \pi , \ln(4)\}$, $A = \{ e , \pi , 1 \}$, $B = \{ c , d , f , \ln(4) \}$,
$C = \{ 1 , e , 3 \}$.

لدينا: A مجموعة جزئية من Ω $(A \subset \Omega)$.

B ليست مجموعة جزئية من Ω $(B \not\subset \Omega)$ لان f ليس عنصرا من Ω $(f \not\subset \Omega)$.

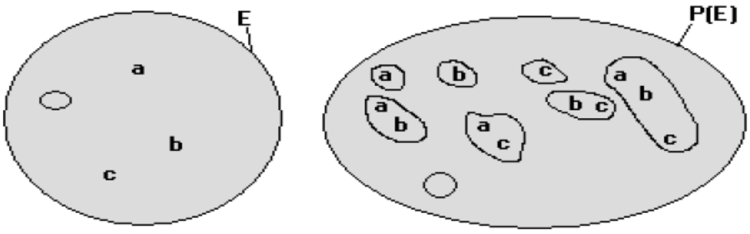
C ليست مجموعة جزئية من Ω $(C \not\subset \Omega)$ لان 3 ليس عنصرا من Ω $(3 \not\subset \Omega)$.

2) لدينا $\mathbb{C} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ .

**تحذير.** يجب التفرقة بين الرمزين ∈ و ⊂، بحيث رمز الانتماء " ∈ " يستخدم للتعبير عن العلاقة بين عنصر ومجموعة ورمز الاحتواء " ⊂ " يستخدم للتعبير عن العلاقة بين مجموعتين.[1]

### 4-6- مجموعة أجزاء مجموعة (Power Set)

*لتكن E مجموعة. المجموعة المؤلفة من جميع المجموعات الجزئية من E تسمى مجموعة أجزاء E ويرمز لها بالرمز $\mathcal{P}(E)$ والشكلان التاليان يوضحان ذلك.*




***شكل 1-4- مخطط فّن لمجموعة كلية E و مجموعة أجزائها***

**أمثلة 1-6**

1) إذا كان $E = \{ a , b , c \}$ فان $\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$ .

2) إذا كان $E = \phi$ فان $\mathcal{P}(E) = \{\phi\}$ .

**ملاحظة 1-5**

نلاحظ أن عدد عناصر E في الأمثلة 1-6 (1) هو 3 وعدد عناصر مجموعة أجزاء E هو 8 أي $2^3$ ، بشكل عام إذا كان عدد عناصر E يساوي n، فان عدد عناصر مجموعة أجزاء E يساوي $2^n$ .[2]

## 5- عمليات على المجموعات (Operations on Sets)

### 5-1- تساوي وتكافؤ مجموعتين (Equal and Equivalent Sets)

*نقول عن مجموعتين A و B أنهما متساويتان ونكتب " A = B " ونقرأ " A تساوي B "، إذا كان لهما*

---

[1] غوثي بوكلي حسن. *الوجيز في الرياضيات*. ط 2. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004، ص. 18.

[2] نفسه، ص. 18.

*العناصر نفسها، أي إذا كان*

$$A \subset B \text{ و } B \subset A \Leftrightarrow A = B$$

*أما المجموعتان المتكافئتان فهما مجموعتان لهما عدد العناصر نفسه ونكتب " $A \equiv B$ " ونقرأ "$A$ تكافئ $B$".*[1]

**أمثلة 1-7.** أي من الأزواج التالية متكافئ وأيهما متساوي وأيهما غير ذلك؟

$$A = \{-4, 1, 3, 8\}, B = \{1, 3, -4, 8\}$$

$$C = \{0, 1, \sqrt{2}, -\frac{7}{2}\}, D = \{a, b, h, l\}$$

$$E = \{-1, 2, 4, 9\}, F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

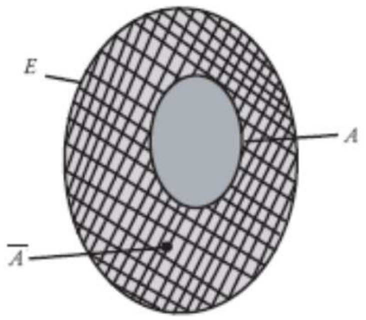
لدينا $A = B, \; C \equiv D, E \neq F, E \not\equiv F$ .

**5-2- متممة مجموعة (Set Complement)**

*لتكن $A$ مجموعة جزئية من $E$. نسمي المجموعة الجزئية من $E$ التي تحوي العناصر التي تنتمي إلى $E$ ولا تنتمي إلى $A$ بمتممة $A$ إلى $E$ ونرمز لها بالرمز $C_E\ A$ أو $\overline{A}$ والمعرفة كما يلي*

$$C_E\ A = \{x \in E / x \notin A\}$$

*والموضحة في الشكل التالي*




***شكل 1-5- مخطط ڤن لمتممة مجموعة جزئية بالنسبة لمجموعة كلية***[2]

**أمثلة 1-8.** إذا كان

$$E = \{a, b, d, h, k, f\}, A = \{b, h, f\}, B = \{a, f\}$$

فان $\overline{A} = \{a, d, k\}, \overline{B} = \{b, d, h, k\}$

**خواص 1-2.** *لتكن $A$ و $B$ مجموعتين جزئيتين من $E$. لدينا*

- $C_E\ \phi = E$
- $C_E\ E = \phi$
- $C_A\ \phi = A$
- $\forall A \in \mathcal{P}(E) : C_E\ (C_E\ A) = A$ أي $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow C_E\ B \subset C_E\ A$.

---

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 16.

[2] Géraud Sarrebourse de La Guillonnière. Op. Cit. Définition 12, p. 9.

### 5-3- التقاطع والاتحاد (Intersection and Union)

**تعريف 1-4.** *لتكن $A$ و $B$ مجموعتين جزئيتين من $E$.*

– *نسمي تقاطع $A$ و $B$، المجموعة الجزئية من $E$ التي نرمز لها بالرمز $A \cap B$ والمعرفة كما يلي*

$$A \cap B = \{ x \in E : (x \in A) \wedge (x \in B) \}$$

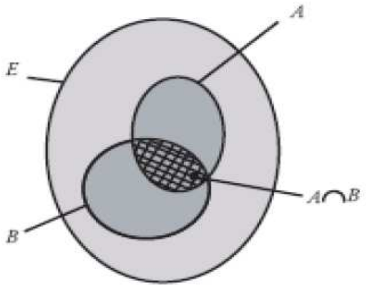
*ونقرأ " $A$ تقاطع $B$ هو مجموع العناصر $x$ من $E$ بحيث $x$ تنتمي إلى $A$ و $x$ تنتمي إلى $B$ ".*

– *نسمي اتحاد $A$ و $B$، المجموعة الجزئية من $E$ التي نرمز لها بالرمز $A \cup B$ والمعرفة كما يلي*

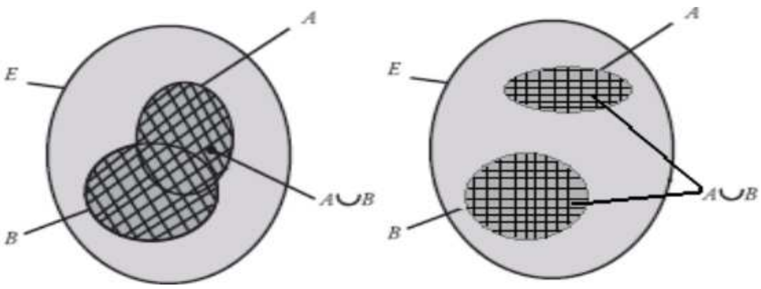
$$A \cup B = \{ x \in E : (x \in A) \vee (x \in B) \}$$

*ونقرأ " $A$ اتحاد $B$ هو مجموع العناصر $x$ من $E$ بحيث $x$ تنتمي إلى $A$ أو $x$ تنتمي إلى $B$ ".*

– *نقول أن مجموعتين جزئيتين من $E$، أنهما غير متقاطعتين أو منفصلتين (disjoint sets) إذا كان تقاطعهما خاليا. الأشكال التالية توضح اتحاد وتقاطع مجموعتين*




***شكل 1-6- مخطط فّن لتقاطع مجموعتين***




***شكل 1-7- مخططا فّن لاتحاد مجموعتين*** [1]

**نظرية 1-1.** *لتكن $A$ و $B$ مجموعتين. لدينا*

– $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$

– $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$ [2]

**أمثلة 1-9.** في كل مما يلي، جد $A \cap B$ و $A \cup B$ .

1) $A = \{ \sqrt{2} , m , -1, d\} , B = \{ m , d , s , 3 \}$

2) $A = ]0, 4] , B = [-2 , 3]$

لدينا

1) $A \cap B = \{ m , d\} , A \cup B = \{\sqrt{2} , 4, m , -1, d , s , 3 \}$

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص ص. 20-23.

[2] Géraud Sarrebourse de La Guillonnière. Op. Cit, p. 8.

2) $A \cap B = ]0,3]$ , $A \cup B = [-2\ ,4]$

**خواص 1−3.** *لتكن $A$، $B$ و $C$ ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة كلية $E$. لدينا*

1) $A \cap \phi = \phi \cap A = \phi$

2) $A \cup \phi = \phi \cup A = A$

3) $A \cap E = A$

4) $A \cup E = E$

5) $A \cup A = A$

6) $A \cap A = A$

7) $A \cup B = B \cup A$ *(الاتحاد تبديلي)*

8) $A \cap B = B \cap A$ *(التقاطع تبديلي)* [1]

9) $(A \cap B) \subset A$ و $(A \cap B) \subset B$

10) $A \subset (A \cup B)$ و $B \subset (A \cup B)$

11) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

12) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

13) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(الاتحاد تجميعي)*

14) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(التقاطع تجميعي)*

15) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(التقاطع توزيعي على الاتحاد)*

16) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(الاتحاد توزيعي على التقاطع)*

17) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

18) $A \cup \overline{A} = E$

19) $A \cap \overline{A} = \phi$

20) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ و $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(قانونا دي مورغان)* [2]

**5−4− تجزئة مجموعة (Partition of Set)**

*لتكن $I = \{ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n \}$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ و $E$ مجموعة. نقول عن جملة أجزاء $C = (A_i)_{i \in I}$ من $E$ أنها تشكل تجزئة لـ $E$، إذا كان*

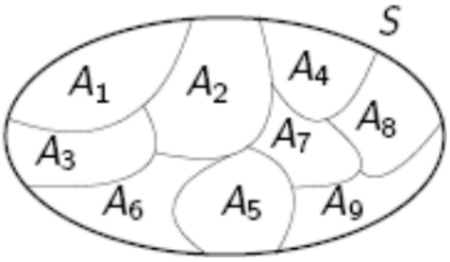
- $\forall i \in I : A_i \neq \phi$ *($A_i$ غير خالية)*
- $\forall i\ ,j \in I\ ,\ i \neq j : A_i \cap A_j = \phi$ *($A_i$ غير متقاطعة مثنى مثنى)*
- $\cup_{i \in I} A_i = E$

---

[1] Géraud Sarrebourse de La Guillonnière. Op. Cit, pp. 10-11.

[2] Ibid, pp. 10-11.

*وهذا ما يوضحه الشكل التالي*




***شكل 1-8- مخطط فّن لتجزئة مجموعة*** [1]

**أمثلة 1-10**

1) من أجل { 7 , 3, 1} = E، فان كل التجزئات الممكنة ل E هي

$\mathcal{C}_1 = \{\{1\},\{3\},\{7\}\}$ , $\mathcal{C}_2 = \{\{1,3\},\{7\}\}$ , $\mathcal{C}_3 = \{\{1,7\},\{3\}\}$ , $\mathcal{C}_4 = \{\{1\},\{3,7\}\}$ .

2) لتكن $E = \mathbb{N}$ ، $A_1$ مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ مكونة من الأعداد الزوجية و $A_2$ مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ مكونة من الأعداد الفردية ، إذا $A_1$ و $A_2$ تشكلان تجزئة ل $\mathbb{N}$ .

3) لتكن $E = \mathbb{R}$ ، $A_1 = \mathbb{R}_+^*$ ، $A_2 = \mathbb{R}_-^*$ ، $A_3 = \{0\}$، إذا المجموعات الجزئية $A_1$ ، $A_2$ و $A_3$ تشكل تجزئة ل $\mathbb{R}$.

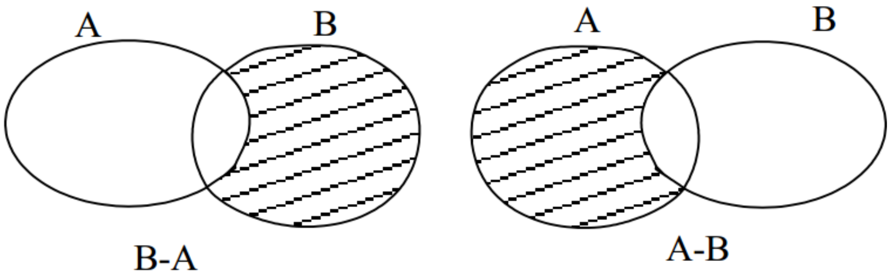
**5-5- الفرق والفرق التناظري بين مجموعتين (Difference and Symmetric Difference)**

**تعريف 1-5.** *لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من مجموعة معطاة E.*

- *الفرق بين A و B هو مجموعة العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B ويرمز له بالرمز "A\ B" أو "A– B" ونقرأ "A ناقص B " والمعرف كما يلي*

$$A - B = A \setminus B = \{x \in E : (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \overline{B}$$

*والشكلان التاليان يوضحان ذلك*




***شكل 1-9- مخطط فّن للفرق بين مجموعتين*** [2]

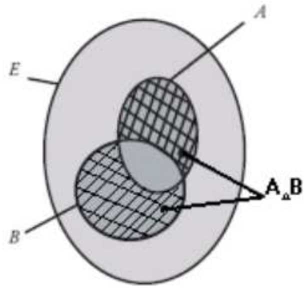
- *الفرق التناظري ل A و B هو مجموع عناصر المجموعتين عدا العناصر المشتركة بينها ويرمز له بالرمز "A Δ B" ونقرأ "A دلتا B " ويعرف كما يلي*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

*والشكل التالي يوضح ذلك*

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 23.

[2] Géraud Sarrebourse de La Guillonnière. Op. Cit, p, 9.




*شكل 1-10- مخطط ڤن للفرق التناظري بين مجموعتين* [1]

**خواص 1-4.** *لتكن A، B و C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E. لدينا*

1) $A - B \subset A$ و $B - A \subset B$

2) $A - B \neq B - A$

3) $A - A = \phi$

4) $A - \phi = A$

5) $E - A = \overline{A}$

6) $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subset B$

7) $C \cap (B - A) = (C \cap B) - A$

8) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$

9) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$

10) $A - (A - B) = A \cap B$

11) $A \Delta B = B \Delta A$ *(الفرق التناظري تبديلي)*

12) $A \Delta A = \phi$

13) $A \Delta \phi = A$. [2]

**أمثلة 1-11.** لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E ، في كل مما يلي جد : $A - B$ ، $B - A$ و $A \Delta B$

1) $A = \{1,2\}$، $B = \{1,3\}$ و $E = \{1,2,3,4\}$

2) $A = ]-\infty, 2]$, $B = [1, +\infty[$ و $E = \mathbb{R}$.

لدينا

1) $A - B = A \cap \overline{B} = \{2\}$, $B - A = \{3\}$ و $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{2,3\}$

2) $A - B = ]-\infty, 1[$, $B - A = ]2, +\infty[$ و $A \Delta B = ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$

## 6- تمارين

### 6 -1-تمارين محلولة

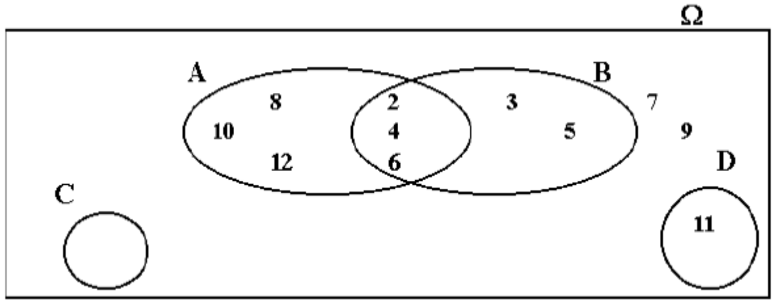
**تمرين 1-1.** إليك الشكل أدناه.

1) ضع أحد الرموز التالية في المكان المناسب : $\in$ ، $\notin$ ، $\subset$ ، $\not\subset$ ، $=$ ، $\neq$ ، $\equiv$ ، $\not\equiv$ .

---

[1] Géraud Sarrebourse de La Guillonnière. Op. Cit, p, 9.

[2] Ibid, pp. 11-12.




**شكل 1−11− مخطط فّن لمجموعة كلية ومجموعاتها الجزئية** $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$

$$10 \ldots A \qquad C \ldots \phi \qquad D \ldots \Omega \qquad A \ldots B$$
$$7 \ldots D \qquad \{2,4\} \ldots A \qquad \{8\} \ldots C \qquad \{2,3\} \ldots A$$

2) أوجد المجموعات التالية

$C_\Omega A$ , $C_\Omega B$ , $C_\Omega C$ , $C_B\{4,6\}$ , $A \cap B$ , $A \cup B$ , $D \cap C$ , $B - A$ , $\Omega - A$ , $A \Delta B$

**الحل**

1)

$$10 \in A \qquad C = \phi \qquad D \subset \Omega \qquad A \neq B \text{ و } A \not\equiv B$$
$$7 \notin D \qquad \{2,4\} \subset A \qquad \{8\} \not\subset C \qquad \{2,3\} \not\subset A$$

2)

$$C_\Omega A = \{3,5,7,9,11\} \qquad C_\Omega B = \{8,10,12,7,9,11\} \qquad C_\Omega C = \Omega \qquad C_B\{4,6\} = \{2,3,5\}$$
$$A \cap B = \{2,4,6\} \qquad A \cup B = \{10,8,12,2,4,6,3,5\} \qquad D \cap C = \phi$$
$$B - A = B \cap \overline{A} = \{3,5\} \qquad \Omega - A = \Omega \cap \overline{A} = \overline{A} = \{3,5,7,9,11\}$$
$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{8,10,12,3,5\}$$

**تمرين 1−2.** لتكن $\Omega$ مجموعة معرفة كما يلي

$\Omega = \{x /$ حرف من حروف الابجدية العربية $x\}$

ولتكن $A$ ، $B$ و $C$ مجموعات جزئية من $\Omega$، بحيث

$A = \{a /$ حرف من حروف كلمة تسيير $a\}$

$B = \{b /$ حرف من حروف كلمة اقتصاد $b\}$

$C = \{c /$ حرف من حروف كلمة تجارة $c\}$

1) أكتب المجموعات $\Omega$، $A$ ، $B$ و $C$ بذكر عناصرها.

2) أنشئ مخطط فّن للمجموعة الكلية $\Omega$ ومجموعاتها الجزئية $A$ ، $B$ و $C$.

3) ضع أحد الرموز التالية في المكان المناسب : $\in$ ، $\notin$ ، $\subset$ ، $\not\subset$ ، $=$ ، $\neq$ ، $\equiv$ ، $\not\equiv$ .

س....$A$ $\qquad$ $C \ldots \Omega$ $\qquad$ $A \ldots C$ $\qquad$ $A \ldots B$

{ق}.... B $\qquad$ {ي، ل}....A $\qquad$ {س، ي، ت، ر }....A

ه....B $\qquad$ {ز، خ، ش}....Ω

4) أوجد المجموعات التالية

$\overline{B}$ $\quad A\cap B$ $\quad B\cap C$ $\quad A\cap C$ $\quad A\cup\Omega$ $\quad B\cap\Omega$ $\quad \Omega\cap\overline{B}$

$A\cap B\cap C$ $\quad A\cap\overline{B}\cap\Omega$ $\quad \overline{A}\cup B\cup\Omega$ $\quad C_A^{\{ت\}}$ $\quad A-C$ $\quad \Omega-B$ $\quad B\Delta C$

**الحل**

1) كتابة المجموعات $\Omega$، $A$، $B$ و $C$ بذكر عناصرها. لدينا

$\Omega=\{x/$ $x$ حرف من حروف الابجدية العربية $\}$

أي

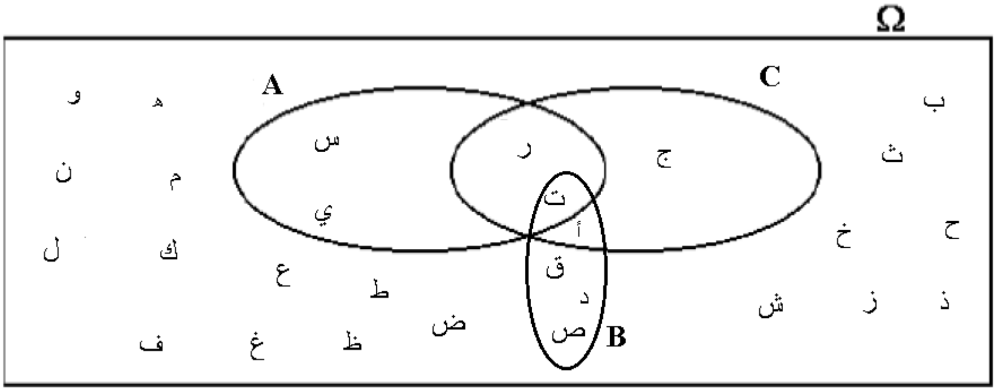
$\Omega=$ { أ، ب، ت، ث، ج،ح، خ، د، ذ، ر،ز، س، ش، ص، ض، ط، ظ،ع،غ، ف، ق، ك، ل، م، ن، هـ،و،ي}

**و** $A=\{a/$ $a$ حرف من حروف كلمة تسيير $\}$ أي $A=$ {ت، س، ي، ر}

و $B=\{b/$ $b$ حرف من حروف كلمة اقتصاد $\}$ أي $B=$ { أ، ق، ت، ص، د}

و $C=\{c/$ $c$ حرف من حروف كلمة تجارة $\}$ أي $C=$ {ت، ج، أ، ر}

2) إنشاء مخطط فّن للمجموعة الكلية $\Omega$ ومجموعاتها الجزئية $A$، $B$ و $C$




**شكل 1-12- مخطط فّن لمجموعة كلية ومجموعاتها الجزئية $A$، $B$ و $C$**

3)

س$\in A$ $\quad C\subset\Omega$ $\quad A\equiv C$ $\quad A\neq B$

{ق}$\subset B$ $\quad$ { ي، ل}$\not\subset A$ $\quad$ $A=$ {س، ي، ت، ر }

هـ$\notin B$ $\quad$ {ز، خ، ش}$\subset\Omega$

4) إيجاد المجموعات التالية

4-1)

$\overline{B}=\{t/$ $t$ حرف من حروف الابجدية العربية لا ينتمي الى $B\}$

$\overline{B}=$ {ب، ث، ج، ح، خ، ذ، ر، ز، س، ش، ض، ط، ظ، ع، غ، ف، ك، ل، م، ن، هـ، و، ي}

4-2) $A\cap B=\{y/$ $y$ حرف ينتمي الى A و B $\}$ أي $A\cap B=$ {ت}

4-3) $B\cap C=\{z/$ $z$ حرف ينتمي الى B و C $\}$ أي $B\cap C=$ {أ، ت}

4-4) $A\cap C$ هي مجموعة الحروف التي تنتمي إلى $A$ و $C$، أي $A\cap C=$ {ت، ر}

4-5) $A\cup\Omega$ هي مجموعة الحروف التي تنتمي إلى $A$ أو $\Omega$، بما أن $A\subset\Omega$ فان $A\cup\Omega=\Omega$

4-6) بما أن $B\subset\Omega$ فان $B\cap\Omega=B$

4-7) بما أن $\overline{B}\subset\Omega$ فان $\Omega\cap\overline{B}=\overline{B}$

4−8) بما أن التقاطع تجميعي، فان

$$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C$$
$$=\{\text{ت}\}\cap C=\{\text{ت}\}$$

4−9) بما أن التقاطع تجميعي، فان

$$A\cap \overline{B}\cap \Omega=\left(A\cap \overline{B}\right)\cap \Omega$$

= {س، ي، ر}$\cap\Omega$ = {س، ي، ر}

4−10) بما أن الاتحاد تجميعي، فان

$$\overline{A}\cup B\cup \Omega=\overline{A}\cup(B\cup \Omega)$$
$$=\overline{A}\cup \Omega=\Omega$$

4−11) $C_A^{\{\text{ت}\}}$ هي مجموعة الحروف التي تنتمي إلى $A$ عدا الحرف "ت"، أي $C_A^{\{\text{ت}\}}$ = {س، ي، ر}

4−12) $A-C$ هي مجموعة الحروف التي تنتمي إلى $A$ ولا تنتمي إلى $C$، أي $A-C=A\cap\overline{C}$ = {س، ي}

4−13) $\Omega-B$ هي مجموعة الحروف التي تنتمي إلى $\Omega$ ولا تنتمي إلى $B$، أي $\Omega-B=\Omega\cap\overline{B}=\overline{B}$

4−14) $B\Delta C$ هي مجموعة حروف $B$ و $C$ عدا الحروف المشتركة بينهما، أي

$$B\Delta C=(B-C)\cup(C-B)$$
$$=(B\cup C)-(B\cap C)$$

= {أ، ت، ج، د، ص، ق، ر} − {أ، ت} = {ج، د، ص، ق، ر}

**تمرين 1−3.** لتكن E مجموعة ،بحيث $E=\{c,e,f\}$

1) أوجد $\mathcal{P}$(E) مجموعة أجزاء E وكذا عدد عناصرها.

2) أوجد كل التجزئات الممكنة ل E .

**الحل**

1) إيجاد مجموعة أجزاء E

$$P(E)=\{\phi,\{c\},\{e\},\{f\},\{c,e\},\{c,f\},\{e,f\},E\}$$

بما أن عدد عناصر $E$ هو 3، فان عدد عناصر $P(E)$ هو $2^3$ أي 8 عناصر.

2) التجزئات الممكنة ل E هي

$$C_1=\{\{c\},\{e,f\}\} \qquad C_2=\{\{e\},\{c,f\}\}$$
$$C_3=\{\{f\},\{c,e\}\} \qquad C_4=\{\{c\},\{e\},\{f\}\}$$

**تمرين 1−4.** لتكن $E$ مجموعة معرفة كما يلي

$$E=\{x\in N/2<x\leq 5\}$$

1) أوجد مجموعة أجزاء $E$.

2) أوجد كل التجزئات الممكنة ل $E$.

**الحل.** لدينا

$$E=\{x\in N/2<x\leq 5\}$$
$$=\{3,4,5\}$$

1) إيجاد مجموعة أجزاء $E$. لدينا

$\mathcal{P}(E)$ مجموعة أجزاء $E$ هي المجموعة المؤلفة من المجموعات الجزئية ل $E$، أي

$$\mathcal{P}(E)=\{\varnothing,\{3\},\{4\},\{5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},E\}$$

2) إيجاد كل التجزئات الممكنة ل $E$. لدينا

$$C_1=\{\{3\},\{4\},\{5\}\} \qquad C_2=\{\{3,4\},\{5\}\} \qquad C_3=\{\{4\},\{3,5\}\} \qquad C_4=\{\{3\},\{4,5\}\}$$

**تمرين 1−5.** إذا كانت $E=\{x\in\mathbb{Z}: -4<x\leq 2\}$ و كانت A، B و C ثلاث مجموعات جزئية من E، بحيث

$A=\{x\in E:$ عدد فردي $x\}$، $B=\{x\in E:$ عدد موجب $x\}$ و $C=\{x\in E:$ ليس عدد موجب $x\}$

فجد ما يلي

$\overline{A}$, $\overline{B}$ , $A\cup\overline{B}$, $B\cap\overline{C}$ , $\overline{A}\cap\overline{C}$, $A\cup(B\cap C)$, $A\cap(B\cap C)$, $E-(B\cup C)$, $(A\cup B)-\overline{C}$, $\overline{A}-(B-C)$, $A\,\Delta\,B$.

**الحل.** لدينا

$$E=\{-3,-2,-1,0,1,2\} \qquad A=\{-3,-1,1\}$$
$$B=\{0,1,2\} \qquad C=\{-3,-2,-1\}$$

ومنه

$\overline{A}=\{-2,0,2\}$

$\overline{B}=\{-3,-2,-1\}=C$

$A\cup\overline{B}=\{-3,-2,-1,1\}$

$B\cap\overline{C}=B\cap B=B$ $\quad$ ($\overline{B}=C\Leftrightarrow\overline{\overline{B}}=\overline{C}\Leftrightarrow B=\overline{C}$ لأن)

$\overline{A}\cap\overline{C}=\overline{A}\cap B=\{0,2\}$ أو $\overline{A}\cap\overline{C}=\overline{A\cup C}=\overline{A\cup\overline{B}}=\{0,2\}$ (قانون دي مورغان)

$$A\cup(B\cap C)=A\cup(B\cap\overline{B})=A\cup\phi=A$$
$$A\cap(B\cap C)=A\cap(B\cap\overline{B})=A\cap\phi=\phi$$
$$E-(B\cup C)=E-(B\cup\overline{B})=E-E=\phi$$
$$\begin{aligned}(A\cup B)-\overline{C}&=(A\cup B)\cap\overline{\overline{C}}\\&=(A\cup B)\cap C\\&=(A\cap C)\cup(B\cap C)\\&=(A\cap C)\cup(B\cap\overline{B})\\&=(A\cap C)\cup\phi\\&=(A\cap C)\\&=\{-3,-1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A}-(B-C)&=\overline{A}-\left(B\cap\overline{C}\right)\\&=\overline{A}-(B\cap B)\\&=\overline{A}-B\\&=\overline{A}\cap\overline{B}\\&=\overline{A}\cap C\\&=\{-2\}\end{aligned}$$

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=\{-3,-1,0,1,2\}-\{1\}=\{-3,-1,0,2\}$$

**تمرين 1−6.** لتكن المجموعة الكلية $E=R$ ومجموعاتها الجزئية $A=[-5;20]$ ، $B=]-\infty;0]$ و $C=]20;+\infty[$

– استخدم خواص العمليات على المجموعات، لإيجاد ما يلي

$\overline{A}$ $\quad\overline{B}\quad$ $\overline{C}$ $\quad\overline{\overline{A}}\quad$ $A\cup E$ $\quad B\cap E\quad$ $C\cup\overline{C}$ $\quad\overline{C\cap\overline{A}}$

$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$ $\quad(A\cap B)\cup(A\cap C)\quad$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $\quad(B-C)\cup(B-A)\quad$ $B\Delta A$

**الحل.** لدينا

$$C=]20;+\infty[ \text{ و } B=]-\infty;0] \text{ ، } A=[-5;20] \text{ ، } E=R$$

باستخدام خواص العمليات على المجموعات، لدينا

$$\overline{A}=E-A=]-\infty;-5[\cup]20;+\infty[$$
$$\overline{B}=E-B=]0;+\infty[$$
$$\overline{C}=E-C=]-\infty;20]$$
$$\overline{\overline{A}}=\overline{]-\infty;-5[\cup]20;+\infty[}=[-5;20]=A$$
$$A\cup E=[-5;20]\cup R=R=E$$
$$B\cap E=]-\infty;0]\cap R=]-\infty;0]=B$$
$$C\cup\overline{C}=]20;+\infty[\cup]-\infty;20]=R=E$$

حسب قانون دي مورغان، لدينا

$$\begin{aligned}\overline{C\cap\overline{A}}&=\overline{C}\cup\overline{\overline{A}}=\overline{C}\cup A=]-\infty;20]\cup[-5;20]\\&=]-\infty;20]=\overline{C}\quad\left(A\subset\overline{C}\text{ لان }\right)\end{aligned}$$

حسب قانون دي مورغان، لدينا $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}=A\cap B=[-5;0]$

بما أن التقاطع توزيعي على الاتحاد، لدينا

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cup(A\cap C)&=A\cap(B\cup C)\\&=[-5;20]\cap(]-\infty;0]\cup]20;+\infty[)\\&=[-5;0]\end{aligned}$$

بما أن الاتحاد توزيعي على التقاطع، لدينا

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A\cup C)&=A\cup(B\cap C)\\&=A\cup\varnothing=A\end{aligned}$$

بما أن الفرق توزيعي على التقاطع، لدينا

$$\begin{aligned}(B-C)\cup(B-A)&=B-(C\cap A)\\&=B-\varnothing=B\end{aligned}$$

ولدينا

$$\begin{aligned} B\Delta A &= (A\cup B)-(A\cap B) \\ &= ]-\infty;20]-[-5;0] \\ &= ]-\infty;-5[\cup]0;20] \end{aligned}$$

## 6-2- تمارين للحل

**تمرين 1-7.** لتكن $E=\{a,b,c\}$ .

- أكمل الفراغات بأحد الرموز التالية: $\not\equiv$, $\in,\notin,\subset,\not\subset,=,\neq,\equiv$.

$a\ldots E$ $\quad\{a\}\ldots E$ $\quad d\ldots E$ $\quad\phi\ldots E$ $\quad\{a,b\}\ldots E$

$\{a,d\}\ldots E$ $\quad C_E\{a\}\ldots\{b,c\}$ $\quad\{1,4,5\}\ldots E$ $\quad\{a,b,c\}\ldots E$ $\quad\{b\}\ldots\{a,c\}$

**تمرين 1-8.** لتكن $A$ و $B$ مجموعتين، بحيث

$A=\{a$ / $a$ لـون مـن الـوان العلـم الجـزائري$\}$

$B=\{b$ / $b$ لـون مـن الـوان العلـم التونسـي$\}$

1) أكتب المجموعتين $A$ و $B$ بذكر عناصرها.

2) أنشئ مخطط فّن للمجموعتين $A$ و $B$ .

3) ضع أحد الرموز التالية في المكان المناسب : $\in$ ، $\notin$ ، $\subset$ ، $\not\subset$ ، $=$ ، $\neq$ ، $\equiv$ ، $\not\equiv$ .

احمر....$A$ $\quad\{a,b\}....A$ $\quad A....B$

A....{احمر ، ابيض،اخضر } $\quad$ A....{ احمر ، اسود} $\quad$ B ....{احمر}

$B$ ....{ 1،0} $\quad$ B....اصفر

4) أوجد المجموعات التالية

$A\cap B$ $\quad A\cup B$ $\quad C_A^{\{\text{اخضر}\}}$ $\quad A\Delta B$

**تمرين 1-9.** لتكن $E$ المجموعة، بحيث

$$E=\left\{e^2,-1,\sqrt{3},\frac{1}{4}\right\}$$

1) أوجد $\mathcal{P}(E)$ مجموعة أجزاء $E$ .

2) أوجد كل التجزئات الممكنة ل $E$ .

**تمرين 1-10.** إذا كانت $E$ المجموعة $\mathbb{R}$ = E. نضع $A=[1,6]$, $B=]-\infty,3]$ و $C=]-3,3[\cup]7,+\infty[$

أوجد المجموعات التالية

$\bar{A}$ $\quad\bar{B}$ $\quad\bar{C}$ $\quad A\cup B$ $\quad C\cap B$ $\quad A-B$

$A\cap(B\cup C)$ $\quad C-A$ $\quad B-(A\cup C)$ $\quad\overline{\bar{B}\cap\bar{C}}$ $\quad A\cap\bar{C}$ $\quad A-(B\cap C)$

**تمرين 1-11.** لتكن $E=\{a,b,c,d,e\}$ , $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,c,d\}$ و $C=\{e\}$

أوجد المجموعات التالية

$A\cup B$ $\quad A\cap C$ $\quad\bar{A}\cap\bar{B}$ $\quad B\cup C$

$A-(B\cap C)$ $\quad(\bar{A}\cup B)-C$ $\quad\overline{\bar{B}\cap\bar{C}}$ $\quad A\cap\bar{C}$

# الفصل الثاني

# التحليل التوفيقي

للتحليل التوفيقي دور محوري في نظرية الاحتمالات ويتمثل ذلك في عدد طرق تجميع عناصر مجموعة تبعا لوجود التكرار أو عدمه، مع الأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر من عدمه وتتمثل هذه الطرق في التبديلات، الترتيبات والتوفيقات التي تسمح بمعرفة التجميعات الممكنة دون الحاجة إلى كتابتها جميعا.

لتكن لدينا مجموعة مكونة من $n$ عنصرا.

## 1- التبديلات (Permutations)

**تعريف 2-1.** *نسمي تبديلة ل $n$ عنصرا، عدد الطرق التي يُوضع بها $n$ عنصرا بتراتيب مختلفة.* [1]

وهنا نميز حالتين

### 1-1- التبديلات بدون تكرار (Permutations of $n$ different things)

**تعريف 2-2.** *عدد الطرق التي يُرتب بها $n$ عنصرا غير مكرر تسمى تبديلة بدون تكرار ونكتب " $n!$ " ونقرأ " $n$ عاملي"*، بحيث

$$n!=n(n-1)(n-2)...2.1 \quad \text{مع} \quad 0!=1.$$ [2]

**أمثلة 2-1**

1) بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص جنبا إلى جنب على مقعد ؟

لدينا أربعة أشخاص، أي $n=4$ بدون تكرار (لا يمكن أن يتكرر الشخص نفسه مرتين). إذا لدينا حالة تبديلة بدون تكرار وعليه، يمكن أن يجلس أربعة أشخاص جنبا إلى جنب على مقعد ب

$$4!=4.3.2.1=24 \quad \text{طريقة}$$

2) كم كلمة -بمعنى أو بدون معنى- يمكن تشكيلها من حروف كلمة "بنك" ؟

كلمة "بنك" تتألف من ثلاثة حروف هي { ب، ن، ك}، أي $n=3$ ونلاحظ أن هذه الحروف الثلاثة غير مكررة وعليه، عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من حروف كلمة "بنك" هي

$$n!=3!=3.2.1=6 \quad \text{كلمات}$$

### 1-2- التبديلات بتكرار (Permutations of $n$ things all different)

**تعريف 2-3.** *نسمي تبديلة بتكرار، عدد الطرق التي يُرتب بها $n$ عنصرا يحوي $k$ عنصرا غير مكرر ونكتب*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

بحيث، $i=\overline{1,k}$ ,$n_i$ *عدد مرات تكرار العنصر $i$ من $n$ ، مع $n_1+n_2+...+n_k=n$.* [3]

**أمثلة 2-2**

1) كم كلمة -بمعنى أو بدون معنى- يمكن تشكيلها من حروف كلمة "اقتصاد" ؟

كلمة "اقتصاد" تتألف من ستة حروف مكررة هي { أ، ق، ت، ص، أ، د}، أي $n=6$، بحيث الحرف "أ" مكرر

---

[1] جاكلين فوراستييه. *الرياضيات التطبيقية على الاقتصاد*، ترجمة د. محمد الحجار. الكتاب للنشر والتوزيع، مصر، 1989، ص.73.

[2] S. M. Shahidul Islam. *Business mathematics*. Abir Publications, Dhaka, 2004., pp. 38-39.

[3] جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص ص. 81-82.

مرتين، أي $n_1 = 2$ والحرف "ق" مكرر مرة واحدة، أي $n_2 = 1$، أما الحروف "ت"، "ص" و "د" فمكررة مرة واحدة، أي $n_3 = 1$، $n_4 = 1$ و $n_5 = 1$ على التوالي، مع $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 2+1+1+1+1 = 6 = n$

وعليه، عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من حروف كلمة "اقتصاد" هي

$$\frac{6!}{2!1!1!1!1!} = \frac{720}{2} = 360 \quad \text{كلمة}$$

2) كم عددا يمكن تشكيله من أرقام العدد "644" ؟

العدد "644" به ثلاثة أرقام مكررة هي 4، 4، 6، أي $n = 3$، بحيث الرقم 4 مكرر مرتين، أي $n_1 = 2$ والرقم 6 مكرر مرة واحدة ، أي $n_2 = 1$، مع $n_1 + n_2 = 2+1 = 3 = n$

وعليه، عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من أرقام العدد "644" هي

$$\frac{3!}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{أعداد}$$

**خواص 2-1.** *لدينا*

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1 \\ &= n(n-1)! \\ &= n(n-1)(n-2)! \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)!; \qquad p<n \end{aligned}$$ [1]

لتكن لدينا مجموعة من $n$ عنصرا ونختار منها $p$ عنصرا، بحيث $p > n$، في هذه الحالة ينتج لنا إما ترتيبة أو توفيقة.

## 2- الترتيبات (Permutations of $n$ different things taken $p$ things)

**تعريف 2-4.** *نسمي ترتيبة، عدد الطرق التي يُرتب بها $p$ عنصرا من $n$ عنصرا.* [2]

وهنا نميز حالتين

### 2-1- الترتيبات بتكرار (Permutations of things which may be repeated)

**تعريف 2-5.** *عدد الطرق التي يُرتب بها p عنصرا مكررا من n عنصرا، تسمى ترتيبة بتكرار ونكتب* $n^p$. [3]

**أمثلة 2-3**

1) كم عددا من رقمين يمكن تشكيله من الأرقام 1، 7، 4 ؟

لدينا ثلاثة أرقام هي 1، 7، 4، أي $n = 3$، نختار منها رقمين، أي $p = 2$ .

عند تشكيل عدد ما، ترتيب الرقم مهم في هذا الأخير كما يمكن تكرار الرقم نفسه وعليه، يمكن تشكيل $n^p = 3^2 = 9$ أعداد من رقمين.

2) كم كلمة من ثلاثة حروف-بمعنى أو بدون معنى- يمكن تشكيلها من حروف كلمة "محاسبة" مع إمكانية تكرار الحرف نفسه ؟

---

(1) S. M. Shahidul Islam. Idem, p. 39.

(2) Ibid, p. 40.

(3) The institute of Cost Accountants of India. *Paper 4: Fundamentals of business mathematics and statistics (FMS). 2nd E.* Repro India Limited, India, 2014., p. 2.40.

كلمة "محاسبة" بها ستة حروف، أي $n=6$، نختار منها ثلاثة حروف، أي $p=3$ وبما أن التكرار موجود، فإن عدد الكلمات هو $6^3=216$ كلمة.

## 2-2- الترتيبات بدون تكرار (Permutations of $n$ different things taken $p$ at a time)

**تعريف 2-6.** *نسمي ترتيبة بدون تكرار، عدد الطرق التي يُرتب بها $p$ عنصرا غير مكرر من $n$ عنصرا ونكتب " $A_n^p$ " ونقرأ " $A$ ، $n$ ، $p$" وتعني عدد الترتيبات لـ n عنصرا في مجموعات جزئية بها p عنصرا، بحيث*

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!} \quad (1)$$

### خواص 2-2

1) لدينا

$$\begin{aligned}A_n^p&=\frac{n!}{(n-p)!}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}\\&=n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\end{aligned}$$

2) بوضع $n=p$ في العلاقة السابقة، نجد

$$\begin{aligned}A_n^n&=n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)\\&=n(n-1)(n-2)\ldots2.1\\&=n!\end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned}A_n^n&=\frac{n!}{(n-n)!}\\&=\frac{n!}{0!} \quad (2)\\&=n!\end{aligned}$$

3) $A_n^p=nA_{n-1}^{p-1}$

4) $A_n^n=A_n^{n-1}$ (3)

### أمثلة 2-4

1) بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أصدقاء في سيارة، بحيث نفرق بين الشخص الذي يقود وذلك الذي يجلس على يمينه ؟

لدينا، أربعة أصدقاء، أي $n=4$، نختار منهم اثنين، الذي يقود والذي بجانبه، أي $p=2$ . الترتيب مهم (السائق والذي بجانبه) والتكرار غير موجود (لا يمكن للشخص نفسه أن يتكرر مرتين) وعليه، يمكن أن يجلس الأصدقاء

(1) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص. 74.

(2) S. M. Shahidul Islam. Idem, pp. 39-40.

(3) Ibid, pp. 48-50.

الأربعة ب

$$A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=\frac{4.3.2!}{2!}=12$$ طريقة

2) كم عددا من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله من الأرقام 0، 1، ...، 9، شرط عدم تكرار الرقم نفسه ؟

لدينا، عشرة أرقام، أي $n=10$ ونريد تشكيل عدد من ثلاثة أرقام، أي $p=3$ . في تشكيل الأعداد، الترتيب مهم والتكرار غير موجود (حسب شرط عدم تكرار الرقم نفسه في هذا المثال) وعليه عدد الأعداد هو

$$A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=\frac{10.9.8.7!}{7!}=10.9.8=720$$ عددا

## 3- التوفيقات (Combinations)

**تعريف 2-7.** *عدد المجموعات الجزئية من p عنصرا غير مرتب التي يمكن تشكيلها من n عنصرا، تسمى توفيقة.* (1)

ونميز حالتين

### 3-1- التوفيقات بدون تكرار (Combinations of things all different)

**تعريف 2-8.** *نسمي توفيقة بدون تكرار، عدد المجموعات الجزئية من p عنصرا غير مرتب وغير مكرر، التي يمكن تشكيلها من n عنصرا ونكتب " $C_n^p$ " أو " $\binom{n}{p}$ " ونقرأ على التوالي " C ، n، p" أو " n، p"، بحيث*

$$C_n^p=\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (2)$$

### خواص 2-3

(1

$$C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)(n-p)!}{p!(n-p)!}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!} \quad (3)$$

(1) The institute of Cost Accountants of India. Idem, p. 2.45.

(2) S. M. Shahidul Islam. Idem, p. 44.

(3) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص. 78.

(2

$$C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$
$$=\frac{1}{p!}\frac{n!}{(n-p)!}$$
$$=\frac{1}{p!}A_n^p$$
$$=\frac{A_n^p}{p!}$$

وعليه $A_n^p=C_n^p.p!$

(3 $C_n^1=n,\ \ C_n^n=1,\ \ C_n^0=1$ (1)

(4 $C_n^p=C_n^{n-p},\ \ \ 0\le p\le n$

(5 $C_{n+1}^p=C_n^p+C_n^{p-1},\ \ \ 0\le p\le n$ (2)

(6 $C_n^p+C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p-2}=C_{n+1}^p,\ \ \ 0\le p\le n$ (3)

(7 $C_{n+1}^{p+1}=C_n^p+C_n^{p+1},\ \ \ 0\le p\le n$ (4)

**أمثلة 2-5.** في مصنع به ثلاثون عاملا، نريد تشكيل أفواج من أربعة عمال. ما هو عدد الأفواج الممكنة ؟ المصنع به ثلاثون عاملا، أي $n=30$ والفوج به أربعة عمال، أي $p=4$ . الفوج لا يوجد به ترتيب (لأنه لا توجد مهام معينة في هذه الأفواج) وبدون تكرار (لأنه لا يمكن للشخص نفسه أن يتكرر مرتين) وعليه، لدينا حالة توفيقة بدون تكرار، أي $C_n^p$ وعليه، عدد الأفواج الممكنة من أربعة عمال هو

$$C_n^p=C_{30}^4$$
$$=\frac{30!}{4!(30-4)!}$$
$$=\frac{30!}{4!26!}$$
$$=\frac{30.29.28.27.26!}{4.3.2.1.26!}$$
$$=5.29.7.27$$
$$=27405$$ فوجا

## 3-2- التوفيقات بتكرار (Combinations of things not all different)

**تعريف 2-9.** نسمي *توفيقة بتكرار*، *عدد المجموعات الجزئية من $p$ عنصرا غير مرتب ومكرر، التي يمكن تشكيلها من $n$ عنصرا* ونكتب

$$C_{n+p-1}^p=\binom{n+p-1}{p}=\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

(1) The institute of Cost Accountants of India. Idem, p. 2.45.

(2) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص. 78.

(3) S. M. Shahidul Islam. Idem, p. 51.

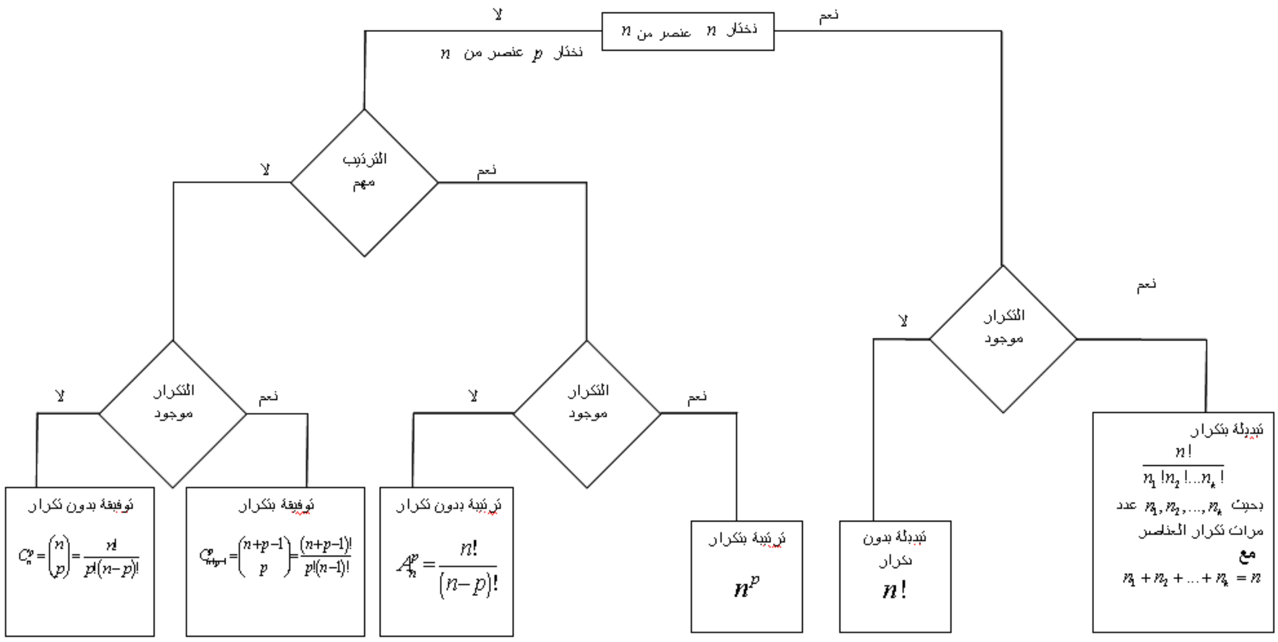
(4) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. *Essential mathematics for economics analysis. 4th E.* Pearson Education Limited, London, 2012, p. 58.

**أمثلة 2-6.** صندوق به عشر كريات. نسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد وبإرجاع. ما هو عدد الحالات الممكنة ؟

لدينا، $n=10$ و $p=2$ . الترتيب غير مهم (لأن السحب في آن واحد) والتكرار موجود (لأن السحب بإرجاع) وعليه، لدينا حالة توفيقة بتكرار وعليه، عدد الحالات الممكنة هو

$$\begin{aligned} C_{n+p-1}^{p} &= C_{10+2-1}^{2} \\ &= C_{11}^{2} \\ &= \frac{11!}{2!9!} \\ &= \frac{11.10.9!}{2.1.9!} \\ &= 11.5 \\ &= 55 \quad \text{حالة ممكنة} \end{aligned}$$

يمكن جمع حالات التحليل التوفيقي السابقة في المخطط التالي




***شكل 2-1- مخطط يوضح التحليل التوفيقي***

**- ثنائي الحد لنيوتن (Newton's binomial)**

*نعلم أن*

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

*ولتعميم نشر $(a+b)^m$، بحيث $m$ عدد طبيعي، لدينا صيغة ثنائي الحد لنيوتن التالية*

$$\begin{aligned}(a+b)^m &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k \\ &= \binom{m}{0}a^m b^0+\binom{m}{1}a^{m-1}b+\ldots+\binom{m}{m-1}ab^{m-1}+\binom{m}{m}a^0b^m \\ &= a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}b+\ldots+\binom{m}{m-1}ab^{m-1}+b^m\end{aligned}$$

بحيث $\binom{m}{k}$ تُسمى *معاملات ثنائي الحد (binomial coefficients)*، معرفة من أجل $m=1,2,\ldots$ و $k=0,1,2,\ldots,m$ ب

$$\begin{aligned}\binom{m}{k} = C_m^k &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \\ &= \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)!}{k!(m-k)!} \\ &= \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\end{aligned}$$

مع $\binom{m}{0}=\binom{m}{m}=1$ و $\binom{m}{1}=m$ .[1]

**حالة خاصة.** بوضع $a=b=1$، نجد

$$\begin{aligned}(a+b)^m &= (1+1)^m = 2^m \\ &= \binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{m}\end{aligned}$$

**أمثلة 2-7.** من أجل $m=5$ ، لدينا

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}a^{5-k}b^k \\ &= a^5+\binom{5}{1}a^4b+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}ab^4+b^5\end{aligned}$$

بحيث

$$\binom{5}{1}=5 \qquad \binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10$$

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=10 \qquad \binom{5}{4}=\frac{5!}{4!1!}=5$$

وعليه

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

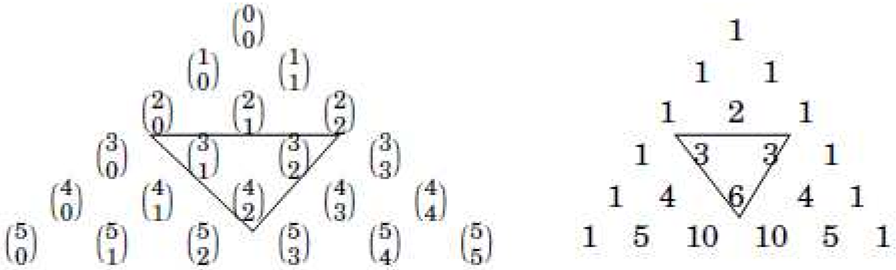
**– مثلث باسكال (Pascal's triangle)**

*معاملات ثنائي الحد لنيوتن $(a+b)^m$ تشكل ما يُسمى بمثلث باسكال التالي*

---

[1] جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص ص. 79–80، ينظر أيضا

Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, pp. 57-58.



***شكل 2-2- مثلث باسكال***

*من الشكل أعلاه، نلاحظ أن أعداد كل سطر متناظرة بالنسبة إلى العمود الذي يتوسط مثلث باسكال والذي يتكون من الأعداد 1، 2، 6، هذا التناظر يتضح من خلال المساواة*

$$\binom{m}{k}=\binom{m}{m-k}$$

*فمثلا* $5=\binom{5}{4}=\binom{5}{1}$*. نلاحظ أيضا أن كل سطر يبدأ وينتهي بالعدد 1 وهذا راجع لكون كل سطر يبدأ ب* $\binom{m}{0}=1$ *وينتهي ب* $\binom{m}{m}=1$*. كما نلاحظ أن كل عدد هو مجموع العددين المجاورين له في السطر الذي يسبق سطره، فمثلا، العدد 6 في السطر الرابع هو مجموع العددين 3 و 3 المجاورين له في السطر الثالث – نستثني من هذه القاعدة العدد 1 في بداية ونهاية كل سطر– وتتضح هذه القاعدة في العلاقة التالية*

$$\binom{m+1}{k+1}=\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}$$

*ففي مثالنا السابق، لدينا*

$$\binom{4}{2}=\binom{3}{1}+\binom{3}{2} \quad \text{أي} \quad 6=3+3$$ [1]

## 4- تمارين

### 4-1- تمارين محلولة

**تمرين 2-1.** كم كلمة –بمعنى أو بدون معنى– يمكن تشكيلها من حروف كلمة "جامعة " ؟

**الحل.** كلمة "جامعة " مكونة من خمسة حروف غير مكررة، أي $n=5$ وعليه عدد الكلمات هو

$$n!=5!=5.4.3.2.1=120$$

إذا، يمكن تشكيل 120 كلمة من حروف كلمة "جامعة ".

**تمرين 2-2.** مجموعة تضم طالبين وطالبة، كم لجنة مكونة من رئيس ونائبيه الأول والثاني يمكن تشكيلها من هذه المجموعة؟

**الحل.** المجموعة مكونة من ثلاثة طلاب، أي $n=3$ دون تكرار (الشخص نفسه لا يمكن أن يتكرر) وعليه عدد اللجان هو

$$n!=3!=3.2.1=6 \quad \text{لجان}$$

---

[1] Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 58, see also

جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص ص. 78-79.

**تمرين 2-3.** 1) بكم طريقة يمكن ترتيب أربعة كتب رياضيات وثلاثة كتب محاسبة وخمسة كتب اقتصاد على رف مكتبة ؟

2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب السابقة شرط أن تُوضع

- كتب الرياضيات جنبا إلى جنب ؟
- كتب المحاسبة جنبا إلى جنب ؟
- كتب الاقتصاد جنبا إلى جنب ؟
- كتب كل تخصص جنبا إلى جنب ؟

**الحل**

1) لدينا $n_1 = 4$ عدد كتب الرياضيات و $n_2 = 3$ عدد كتب المحاسبة و $n_3 = 5$ عدد كتب الاقتصاد وعليه العدد الإجمالي للكتب هو $n = n_1 + n_2 + n_3 = 4+3+5 = 12$ وعليه يمكن ترتيب هذه الأخيرة ب

$$\begin{aligned}\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} &= \frac{12!}{4!3!5!} \\ &= \frac{12.11.10.9.8.7.6.5!}{4.3.2.1.3.2.1.5!} \\ &= 11.5.9.8.7 = 27720\end{aligned}$$

أي، يمكن ترتيب الكتب ب 27720 طريقة.

(2

- لتبقى كتب الرياضيات جنبا إلى جنب، نعتبرها ككتاب واحد وعليه يصبح لدينا تسعة كتب (كتاب رياضيات واحد، ثلاثة كتب محاسبة وخمسة كتب اقتصاد) التي يمكن ترتيبها ب $\frac{9!}{1!3!5!}$ طريقة ويمكن ترتيب كتب الرياضيات فيما بينها ب $4!$ طريقة.

إذا، يمكن ترتيب الكتب السابقة بحيث تبقى كتب الرياضيات جنبا إلى جنب ب

$$\begin{aligned}4!.\frac{9!}{1!3!5!} &= 4.3!.\frac{9.8.7.6.5!}{1!3!5!} \\ &= 4.9.8.7.6 = 12096\end{aligned}$$

- لتبقى كتب المحاسبة جنبا إلى جنب، نعتبرها ككتاب واحد وعليه يصبح لدينا عشرة كتب (أربعة كتب رياضيات، كتاب محاسبة واحد وخمسة كتب اقتصاد) التي يمكن ترتيبها ب $\frac{10!}{4!1!5!}$ طريقة ويمكن ترتيب كتب المحاسبة فيما بينها ب $3!$ طريقة.

إذا، يمكن ترتيب الكتب السابقة بحيث تبقى كتب المحاسبة جنبا إلى جنب ب

$$\begin{aligned}3!.\frac{10!}{4!1!5!} &= 3!.\frac{10.9.8.7.6.5!}{4.3!5!} \\ &= 10.9.2.7.6 = 7560\end{aligned}$$

- لتبقى كتب الاقتصاد جنبا إلى جنب، نعتبرها ككتاب واحد وعليه يصبح لدينا ثمانية كتب (أربعة كتب رياضيات، ثلاثة كتب محاسبة وكتاب اقتصاد واحد) التي يمكن ترتيبها ب $\frac{8!}{4!3!1!}$ طريقة ويمكن ترتيب كتب الاقتصاد فيما بينها ب $5!$ طريقة.

إذا، يمكن ترتيب الكتب السابقة بحيث تبقى كتب الاقتصاد جنبا إلى جنب ب

$$5!.\frac{8!}{4!3!1!}=5.4!.\frac{8.7.6.5.4.3!}{4!3!1!}$$
$$=5.8.7.6.5.4=33600$$

–لتبقى كتب كل تخصص جنبا إلى جنب، نعتبرها كل منها على حِدا ككتاب واحد وعليه يصبح لدينا ثلاثة كتب (كتاب رياضيات واحد، كتاب محاسبة واحد وكتاب اقتصاد واحد) التي يمكن ترتيبها ب $3!$ طريقة ويمكن ترتيب كتب الرياضيات فيما بينها ب $4!$ طريقة وكتب المحاسبة ب $3!$ طريقة وكتب الاقتصاد ب $5!$ طريقة.

إذا، يمكن ترتيب الكتب السابقة بحيث تبقى كتب كل تخصص جنبا إلى جنب ب $3!4!3!5!=103680$ طريقة.

**تمرين 2–4.** 1) كم رقم هاتف يمكن تشكيله لشبكة الاتصالات " موبيليس" ؟ "جازي" ؟ " أُريد" ؟

2) كم رقم هاتف يمكن تشكيله لشبكة الاتصالات " موبيليس" شرط

- أن يكون رقم آحاده "4" ؟
- أن يكون عددا زوجيا ؟
- ألا يحوي الرقمين "5" أو "3" ؟
- ألا يحوي الأرقام "1"، "3" و "7" ؟
- أن يكون من مضاعفات العدد "5" ؟
- ألا يحوي أرقاما مكررة ؟

**الحل**

1) لدينا عشرة أرقام هي 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 و 9، أي $n=10$.

أرقام الهاتف بالنسبة لشبكة "موبيليس" مكونة من عشرة أرقام، بحيث الرقمين الأول والثاني هما 06، إذا يتبقى أن نختار ثمانية أرقام من أصل عشرة، أي $p=8$ مع إمكانية تكرار نفس الرقم أكثر من مرة وعليه، عدد أرقام الهواتف هو $10^8$ وهو العدد نفسه بالنسبة لشبكتي "جازي" و " أُريد" مع مراعاة أن الرقمين الأول والثاني لكليهما هو على التوالي 07 و 05.

2)

– لتشكيل أرقام الهاتف بالنسبة لشبكة "موبيليس"، نختار ثمانية أرقام من أصل عشرة، بما أن رقم الآحاد هو "4"، تبقى لنا سبعة أرقام من عشرة وعليه عدد أرقام الهواتف هو $10^7$.

– أن يكون رقم الهاتف عددا زوجيا، معناه رقم آحاده هو أحد الأرقام 0، 2، 4، 6 أو 8 .

إذا كان رقم الآحاد هو "0"، علينا اختيار سبعة أرقام من عشرة وعليه عدد أرقام الهواتف في هذه الحالة هو $10^7$ وهو العدد نفسه في حالة رقم الآحاد هو 2، 4، 6 أو 8.

إذا، عدد أرقام الهواتف التي تشكل أعدادا زوجية هو $5.10^7$.

– ألا يحوي الرقمين "5" أو "3"، معناه نختار ثمانية أرقام من تسعة لكل حالة وعليه عدد أرقام الهواتف هو $2.9^8$.

– ألا يحوي الأرقام "1"، "3" و "7"، معناه نختار ثمانية أرقام من سبعة، أي يوجد $7^8$ رقم هاتف.

– أن يكون من مضاعفات العدد "5"، معناه رقم آحاده هو أحد الرقمين 0 أو 5.

إذا كان رقم الآحاد هو "0"، علينا اختيار سبعة أرقام من عشرة وعليه عدد أرقام الهواتف في هذه الحالة هو $10^7$ وهو العدد نفسه في حالة رقم الآحاد هو 5.

إذا، عدد أرقام الهواتف التي تكون من مضاعفات العدد "5" هو $2.10^7$.

– ألا يحوي أرقاما مكررة، معناه نختار ثمانية أرقام من أصل ثمانية دون تكرار العدد أكثر من مرة وهذه حالة ترتيبية بدون تكرار $A_n^p$، أي عدد أرقام الهواتف هو

$$A_n^p = A_8^8 = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = \frac{8!}{1} = 8! = 40320$$

**تمرين 2–5.** في فوج به ثلاثون طالبا، نريد انتخاب لجنة للفوج مكونة من ممثل للفوج ونائبيه الأول والثاني.

1) ما هو عدد اللجان الممكنة ؟

2) ما هو عدد اللجان الممكنة في كل حالة مما يلي

- الطالب $x$ هو ممثل الفوج ؟
- الطالبان $y$ و $z$ لن يكونا في اللجنة ؟

3) إن كان الفوج يضم 18 طالبا و 12 طالبة. ما هو عدد اللجان الممكنة فيما يلي

- اللجنة لن تضم أي طالبة ؟
- اللجنة تضم على الأقل طالبا ؟
- اللجنة تضم على الأكثر طالبة ؟

**الحل**

1) الفوج به ثلاثون طالبا، أي $n=30$، نختار منهم ثلاثة طلاب، أي $p=3$. بما أنه يوجد ترتيب ولا يوجد تكرار، فهذه حالة ترتيبية بدون تكرارٍ $A_n^p$ وعليه عدد اللجان الممكنة هو

$$A_n^p = A_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{30!}{27!} = \frac{30.29.28.27!}{27!} = 30.29.28 = 24360$$

2)

– الطالب $x$ هو ممثل الفوج، معناه تبقى أن نختار النائبين الأول والثاني، أي $p=2$ من 29 طالبا، أي $n=29$ وعليه عدد اللجان الممكنة هو

$$A_{29}^2 = \frac{29!}{(29-2)!} = \frac{29!}{27!} = \frac{29.28.27!}{27!} = 29.28 = 812$$

– الطالبان $y$ و $z$ لن يكونا في اللجنة، معناه تبقى 28 طالبا، أي $n=28$، نختار منهم ثلاثة طلاب، أي $p=3$ وعليه عدد اللجان الممكنة هو

$$A_{28}^{3}=\frac{28!}{(28-3)!}$$
$$=\frac{28!}{25!}=\frac{28.27.26.25!}{25!}$$
$$=28.27.26=19656$$

(3

– اللجنة لن تضم أي طالبة، معناه اللجنة تضم ثلاثة طلاب نختارهم من 18 طالبا، أي $n=18$ و $p=3$ وعليه عدد اللجان الممكنة هو

$$A_{18}^{3}=\frac{18!}{(18-3)!}$$
$$=\frac{18!}{15!}=\frac{18.17.16.15!}{15!}$$
$$=18.17.16=4896$$

– اللجنة تضم على الأقل طالبا، أي تضم إما طالبا وطالبتين، أي $A_{18}^{1}.A_{12}^{2}$ أو طالبين وطالبة، أي $A_{18}^{2}.A_{12}^{1}$ أو ثلاثة طلاب، أي $A_{18}^{3}$ وعليه عدد اللجان الممكنة هو

$$A_{18}^{1}.A_{12}^{2}+A_{18}^{2}.A_{12}^{1}+A_{18}^{3}=\frac{18!}{17!}.\frac{12!}{10!}+\frac{18!}{16!}.\frac{12!}{11!}+\frac{18!}{15!}$$
$$=\frac{18.17!}{17!}.\frac{12.11.10!}{10!}+\frac{18.17.16!}{16!}.\frac{12.11!}{11!}+\frac{18.17.16.15!}{15!}$$
$$=18.12.11+18.17.12+18.17.16$$
$$=10944$$

– اللجنة تضم على الأكثر طالبة، معناه تضم إما طالبة وطالبين، أي $A_{12}^{1}.A_{18}^{2}$ أو ثلاثة طلاب، أي $A_{18}^{3}$ وعليه عدد اللجان الممكنة هو

$$A_{12}^{1}.A_{18}^{2}+A_{18}^{3}=8568$$

**تمرين 2–6.** في قسم العلوم الاقتصادية، يوجد 25 أستاذا، منهم عشر أستاذات. نريد انتخاب اللجنة العلمية للقسم من ست أساتذة.

1) ما هو عدد اللجان الممكنة ؟

2) ما هو عدد اللجان الممكنة في كل حالة مما يلي

- اللجنة تضم أستاذتين ؟
- اللجنة لا تضم أي أستاذ ؟
- اللجنة تضم ثلاث أستاذات على الأقل ؟
- اللجنة تضم أستاذين على الأكثر ؟

**الحل**

1) القسم به 25 أستاذا، أي $n=25$ ونختار منه 6 أساتذة، أي $p=6$ . بما أنه لا يوجد تكرار أو ترتيب فإنها حالة توفيقة بدون تكرار، أي $C_{n}^{p}=\binom{n}{p}$ ومنه عدد اللجان الممكنة هو

$$\begin{aligned}C_{25}^{6}&=\binom{25}{6}=\frac{25!}{6!(25-6)!}\\&=\frac{25!}{6!19!}\\&=\frac{25.24.23.22.21.20.19!}{6.5.4.3.2.1.19!}\\&=25.2.23.22.7=177100\end{aligned}$$

أي، يمكن تشكيل 177100 لجنة من 6 أساتذة من مجموع 25 أستاذا.

2)

– أن تضم اللجنة أستاذتين، معناه $C_{10}^{2}=\binom{10}{2}$ وأربعة أساتذة المتبقيين نختارهم من 15 أستاذا، أي $C_{15}^{4}=\binom{15}{4}$ وعليه عدد اللجان الممكنة هو

$$\begin{aligned}\binom{10}{2}.\binom{15}{4}&=\frac{10!}{2!(10-2)!}.\frac{15!}{4!(15-4)!}\\&=\frac{10!}{2!8!}.\frac{15!}{4!11!}\\&=\frac{10.9.8!}{2.1.8!}.\frac{15.14.13.12.11!}{4.3.2.1.11!}\\&=5.9.15.7.13=61425\end{aligned}$$

أي، يمكن تشكيل 61425 لجنة تضم أستاذتين.

– ألا تضم اللجنة أي أستاذ، معناه أنها تضم فقط الأستاذات، أي

$$\begin{aligned}\binom{10}{6}&=\frac{10!}{6!(10-6)!}\\&=\frac{10!}{6!4!}\\&=\frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!}\\&=10.3.7=210\end{aligned}$$

وعليه يمكن تشكيل 210 لجنة لا تضم أي أستاذ.

– أن تضم اللجنة ثلاث أستاذات على الأقل، معناه ثلاث أستاذات، أي $\binom{10}{3}$ وثلاثة أساتذة، أي $\binom{15}{3}$ أو أربع أستاذات، أي $\binom{10}{4}$ وأستاذين، أي $\binom{15}{2}$ أو خمس أستاذات، أي $\binom{10}{5}$ وأستاذ واحد، أي $\binom{15}{1}$ أو ست أستاذات، أي $\binom{10}{6}$ ومنه عدد اللجان الممكنة هو

$$\begin{aligned}&\binom{10}{3}.\binom{15}{3}+\binom{10}{4}.\binom{15}{2}+\binom{10}{5}.\binom{15}{1}+\binom{10}{6}\\&=\frac{10!}{3!7!}.\frac{15!}{3!12!}+\frac{10!}{4!6!}.\frac{15!}{2!13!}+\frac{10!}{5!5!}.\frac{15!}{1!14!}+\frac{10!}{6!4!}\\&=\frac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!}.\frac{15.14.13.12!}{3.2.1.12!}+\frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!}.\frac{15.14.13!}{2.1.13!}\\&+\frac{10.9.8.7.6.5!}{5.4.3.2.1.5!}.\frac{15.14!}{1.14!}+\frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!}\\&=163800+22050+3780+210=189840\end{aligned}$$

وعليه يمكن تشكيل 189840 لجنة تضم ثلاث أستاذات على الأقل.

– أن تضم اللجنة أستاذين على الأكثر، معناه أستاذين، أي $\binom{15}{2}$ وأربع أستاذات، أي $\binom{10}{4}$ أو أستاذ واحد، أي $\binom{15}{1}$ وخمس أستاذات، أي $\binom{10}{5}$ أو لا يوجد أستاذ، أي $\binom{15}{0}$ وتوجد ست أستاذات، أي $\binom{10}{6}$ ومنه عدد اللجان الممكنة هو

$$\binom{15}{2}.\binom{10}{4}+\binom{15}{1}.\binom{10}{5}+\binom{10}{6}=22050+3780+210=26040$$

وعليه يمكن تشكيل 26040 لجنة تضم أستاذين على الأكثر.

**تمرين 2–7.** كم كلمة مرور من 28 حرفا يمكن تشكيلها من حروف الأبجدية العربية ؟

**الحل.** عدد حروف الأبجدية العربية هو 28 حرفا ومنه $n=28$ ولا يوجد تكرار في الحروف وعليه، عدد كلمات المرور هو $n!=28!$.

**تمرين 2–8.** بكم طريقة يمكن وضع جنبا إلى جنب سبعة كتب مختلفة على رف مكتبة ؟

**الحل.** لدينا سبعة كتب مختلفة، أي $n=7$ دون تكرار الكتب (الكتب مختلفة) ومنه، عدد الطرق لصف هذه الكتب هي

$$n!=7!=7.6.5.4.3.2.1=5040 \quad \text{طريقة}$$

**تمرين 2–9.** في سباق للخيول، يتنافس عشرون مشتركا. ما هو عدد التشكيلات الممكنة للفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى ؟

**الحل.** لدينا 20 مشتركا، أي $n=20$، عدد الفائزين هو 3، أي $p=3$. في السباق، الترتيب مهم والتكرار غير موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بدون تكرار $A_n^p$ وعليه، عدد التشكيلات الممكنة للفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى هو

$$\begin{aligned}A_n^p&=A_{20}^3=\frac{20!}{(20-3)!}\\&=\frac{20!}{17!}=\frac{20.19.18.17!}{17!}\\&=20.19.18=6840\end{aligned}$$

**تمرين 2–10.** كم عددا طبيعيا محصورا بين 2000 و4000 (أي $2000<x<4000$) يمكن تشكيله من الأرقام التالية 0، 3، 5، 2، 4 ؟

**الحل.** لدينا خمسة أرقام، أي $n=5$، نختار منها أربعة أرقام لأن $2000<x<4000$ وعليه رقم الآلاف هو أحد الرقمين 2 أو 3، إذا تبقى أن نختار ثلاثة أرقام من خمسة، أي $p=3$ ونستثني العدد 2000 لأن $2000<x$،

في تشكيل الأعداد، الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار $n^p$ ومنه، عدد الأعداد الطبيعية المحصورة بين 2000 و 4000 التي يمكن تشكيلها من الأرقام السابقة هو

$$2.5^3 - 1 = 249 \quad \text{عددا}$$

**تمرين 2−11.** كم عددا طبيعيا من أربعة أرقام وأكبر من 6000 يمكن تشكيله من الأرقام التالية 6، 3، 8، 5، 1 ؟

**الحل.** لدينا خمسة أرقام، أي $n = 5$، نختار منها أربعة أرقام وحسب الأرقام المتاحة فإن رقم الآلاف هو أحد الرقمين 6 أو 8، إذا تبقى أن نختار ثلاثة أرقام من خمسة، أي $p = 3$، في تشكيل الأعداد، الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار $n^p$ ومنه، عدد الأعداد الطبيعية من أربعة أرقام والأكبر من 6000 التي يمكن تشكيلها من الأرقام السابقة هو

$$2.5^3 = 250 \quad \text{عددا}$$

**تمرين 2−12.** شركة مقاولات تضم 12 مهندسا معماريا و30 مهندسا مدنيا و20 رئيسا لعمال البناء؛ نريد تكوين فريق عمل يضم مهندسا معماريا وآخرا مدنيا ورئيس عمال البناء.

1) كم فريق عمل يمكن تكوينه في هذه الشركة ؟

2) إذا علمت أن المهندس المعماري $x$ موجود في الفريق ورئيس العمال $y$ لا يتواجد فيه؛ فكم فريق عمل يمكن تشكيله في هذه الحالة ؟

**الحل**

1) لدينا $n_1 = 12$ و $p_1 = 1$ ؛ $n_2 = 30$ و $p_2 = 1$ ؛ $n_3 = 20$ و $p_3 = 1$ . الترتيب غير مهم والتكرار غير موجود؛ لدينا حالة توفيقة بدون تكرار وعليه، عدد فرق العمل الذي يمكن تشكيلها في هذه الشركة هو

$$\begin{aligned}\binom{12}{1}.\binom{30}{1}.\binom{20}{1} &= \frac{12!}{1!11!}.\frac{30!}{1!29!}.\frac{20!}{1!19!}\\ &= \frac{12.11!}{1.11!}.\frac{30.29!}{1.29!}.\frac{20.19!}{1.19!}\\ &= 12.30.20\\ &= 7200\end{aligned}$$

2) بما أن المهندس المعماري $x$ موجود في الفريق فلا داعي لاختيار مهندس معماري، أي لدينا $\binom{1}{1} = 1$ حالة وحيدة وهي اختيار المهندس $x$ وبما أن رئيس العمال $y$ لا يتواجد في الفريق، فعلينا اختيار رئيس عمال واحد من أصل 19، أي $\binom{19}{1}$ وتبقى اختيار مهندس مدني واحد من أصل 30، أي $\binom{30}{1}$ وعليه، عدد الفرق الممكن تشكيلها في هذه الحالة هو

$$\begin{aligned}\binom{30}{1}.\binom{19}{1} &= \frac{30!}{1!29!}.\frac{19!}{1!18!}\\ &= \frac{30.29!}{1.29!}.\frac{19.18!}{1.18!}\\ &= 30.19\\ &= 570\end{aligned}$$

**تمرين 2−13**

1) بين أن

أ) $A_n^p = n.A_{n-1}^{p-1}$ ب) $C_n^p = C_n^{n-p};\quad 0 \le p \le n$

2) أوجد قيمة $n$، بحيث

أ) $3A_n^2 = A_n^3$ ب) $\dfrac{C_n^4}{C_n^3} = 1$

3) باستعمال ثنائي الحد لنيوتن، أنشر $(3x-4)^6$.

**الحل**

1−أ) تبيان أن $A_n^p = n.A_{n-1}^{p-1}$

لدينا $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ و $A_{n-1}^{p-1} = \dfrac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-p)!}$

وعليه

$$\begin{aligned} n.A_{n-1}^{p-1} &= n.\frac{(n-1)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p \end{aligned}$$

1−ب) تبيان أن $C_n^p = C_n^{n-p};\quad 0 \le p \le n$

لدينا $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ و

$$\begin{aligned} C_n^{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p \end{aligned}$$

2- أ) إيجاد قيمة $n$، بحيث $3A_n^2 = A_n^3$

لدينا

$$\begin{aligned}
3A_n^2 = A_n^3 &\Leftrightarrow 3\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-3)!}\\
&\Leftrightarrow 3.\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}\\
&\Leftrightarrow 3n(n-1) = n(n-1)(n-2)\\
&\Leftrightarrow 3n(n-1) - n(n-1)(n-2) = 0\\
&\Leftrightarrow n(n-1)(5-n) = 0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} n=0\\ n-1=0\\ 5-n=0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} n=0\\ n=1\\ n=5 \end{cases}
\end{aligned}$$

$n=0$ و $n=1$ حلان مرفوضان لأنهما أصغر من العددين 2 و 3 لأن $n \geq p$ وعليه الحد الوحيد هو $n=5$.

2- ب) إيجاد قيمة $n$، بحيث $\frac{C_n^4}{C_n^3} = 1$

لدينا

$$\begin{aligned}
\frac{C_n^4}{C_n^3} &= \frac{\frac{n!}{4!(n-4)!}}{\frac{n!}{3!(n-3)!}}\\
&= \frac{n!}{4!(n-4)!}.\frac{3!(n-3)!}{n!}\\
&= \frac{3!(n-3)(n-4)!}{4.3!(n-4)!}\\
&= \frac{n-3}{4}
\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}
\frac{C_n^4}{C_n^3} = 1 &\Leftrightarrow \frac{n-3}{4} = 1\\
&\Leftrightarrow n-3 = 4\\
&\Leftrightarrow n = 7
\end{aligned}$$

3) باستعمال ثنائي الحد لنيوتن، نشر $(3x-4)^6$

$$
\begin{aligned}
(3x-4)^6 &= \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(3x)^{6-k}(-4)^k \\
&= \binom{6}{0}(3x)^6(-4)^0+\binom{6}{1}(3x)^5(-4)^1+\binom{6}{2}(3x)^4(-4)^2+\binom{6}{3}(3x)^3(-4)^3 \\
&\quad +\binom{6}{4}(3x)^2(-4)^4+\binom{6}{5}(3x)^1(-4)^5+\binom{6}{6}(3x)^0(-4)^6 \\
&= 729x^6-5832x^5+19440x^4-34560x^3+34560x^2-18432x+4096
\end{aligned}
$$

**4-2- تمارين للحل**

**تمرين 2-14.** كم كلمة مرور يمكن تشكيلها من حروف كلمة "رمز" إضافة لأرقام العدد "12" ؟

**تمرين 2-15.** بكم طريقة يمكن أن يصطف عشرون تلميذا في صف واحد ؟

**تمرين 2-16.** كم عددا يمكن تشكيله من أرقام العدد "679" ؟

**تمرين 2-17.** كم كلمة مرور يمكن تشكيلها من أرقام العدد "8939" ؟

**تمرين 2-18**

1) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة "تذبذُب" ؟

2) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة السابقة، شرط أن

- يُكتب حرفا "ذ" متتابعين ؟
- ألا يُكتب حرفا "ذ" متتابعين ؟
- أن يُكتب الحرفان "ذ" و "ب" متتابعين ؟

**تمرين 2-19.** كم كلمة من أربعة حروف -بمعنى أو بدون معنى- يمكن تشكيلها من حروف الأبجدية العربية؟ شرط أن

- ألا يتكرر الحرف نفسه ؟
- أن تبدأ الكلمة بحرف "ل" ؟
- أن تنتهي الكلمة ب "مي" ؟
- أن تضم الحروف "ك"، "ن" و "أ" ؟
- ألا تضم حروف العلة ؟

**تمرين 2-20.** لجنة مناقشة مذكرة الماستر 2، تحوي رئيسا ومؤطرا ومناقشين. إذا أراد المؤطر $x$ اختيار لجنة المناقشة من 20 أستاذا منهم 9 نساء و 11 رجلا.

1) ما هو عدد اللجان الممكنة ؟

2) ما هو عدد اللجان الممكنة في كل حالة مما يلي

- أن يكون رئيس اللجنة امرأة ؟
- أن تضم اللجنة على الأقل رجلا ؟
- ألا تضم اللجنة أي امرأة ؟
- ألا تضم اللجنة الرجل $y$ والمرأة $z$ ؟

**تمرين 2−21.** صندوق يضم 14 راية ملونة −لا نميز بينها باللمس− منها أربع رايات حمراء ورايتان خضراوان وثلاث رايات بيضاء وخمس رايات سوداء. نسحب عشوائيا ثلاث رايات على التوالي وبإرجاع.

1) ما هو عدد الحالات الممكنة ؟

2) ما هو عدد الحالات الممكنة في كل مما يلي

- أن تشكل الرايات المسحوبة ألوان العلم الجزائري ؟
- أن تشكل الرايات المسحوبة ألوان العلم التونسي ؟
- ألا تُسحب أي راية بيضاء ؟
- أن تُسحب راية واحدة حمراء على الأقل ؟
- أن تُسحب راية واحدة سوداء على الأكثر ؟
- أن تُسحب رايتان واحدة بيضاء والأخرى سوداء ؟

**تمرين 2−22.** تُكرر معطيات وأسئلة التمرين 1−14 نفسها، لكن في حالة سحب ثلاث رايات على التوالي وبدون بإرجاع.

**تمرين 2−23.** كم عددا أكبر تماما من 2000 وأصغر تماما من 3000 يمكن تشكيله ؟ علما أن هذا العدد

- لا يحوي أرقاما مكررة ؟
- عدد فردي ؟
- لا يحوي الرقمين 3 و 7 ؟
- رقم آحاده هو 6 ؟

**تمرين 2−24.** كيس به أربع كريات صفراء، ست كريات زرقاء وكريتان خضراوان. نسحب عشوائيا أربع كريات.

1) ما هو عدد الحالات الممكنة ؟

2) ما هو عدد الحالات الممكنة في كل مما يلي

- أن نسحب على الأقل كرية صفراء ؟
- ألا نسحب أي كرية خضراء ؟
- أن نسحب على الأكثر كرية زرقاء ؟
- أن نسحب كريتين خضراوين ؟

**تمرين 2−25**

1) بين أن

أ) $A_n^n = A_n^{n-1}$ ب) $C_n^p + C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p-2} = C_{n+1}^p; \quad 0 \le p \le n$

2) أوجد قيمة $n$، بحيث

أ) $A_n^2 = 240$ ب) $C_n^3 = 120$

3) باستعمال ثنائي الحد لنيوتن، أنشر $(x+5)^7$.

# الفصل الثالث

# مفاهيم عامة حول

# المتتاليات والسلاسل

للمتتاليات والسلاسل دور مهم في نمذجة بعض الظواهر المتقطعة، كملاحظة –على فترات زمنية منتظمة– الإنتاج السنوي لشركة معينة، الراتب الشهري لموظف، النمو الديمغرافي لدولة معينة.

**تعريف 3-1.** *نسمي متتالية عددية كل تطبيق $u$ ل $\mathbb{N}$ (أو جزء $I$ لانهائي من $\mathbb{N}$) في $\mathbb{R}$، نرمز عادة ب $u_n$ لصورة العدد الطبيعي $n$ وفق التطبيق $u$ ونكتب*

$$u:\mathrm{N}\to R$$
$$n\to u(n)=u_n$$

*ونرمز المتتالية بأحد الرموز التالية $(u_n)_n$، $(u_n)_{n\in N}$، $(u_n)$، $n\to u_n$ أو $u_0,u_1,u_2,...$. ندعو المقادير $u_n$ (حيث $n\in N$) حدود المتتالية $(u_n)$ ونقول عن العدد $u_n$ أنه الحد من الرتبة $n$.* [1]

## 1- اتجاه تغير متتالية عددية

### تعريف 3-2

- *نقول عن متتالية عددية $(u_n)$ أنها متزايدة (متناقصة، على التوالي)، إذا كان $u_n\le u_{n+1}$ ($u_n\ge u_{n+1}$، على التوالي)، مهما كان $n\in N$. نقول أن $(u_n)$ متزايدة (متناقصة، على التوالي) تماما، إذا كان $u_n<u_{n+1}$ ($u_n>u_{n+1}$، على التوالي)، من أجل كل $n\in N$.*
- *نقول عن متتالية أنها رتيبة (رتيبة تماما، على التوالي) إذا كانت متزايدة أو متناقصة (متزايدة تماما أو متناقصة تماما، على التوالي).* [2]

**تعريف 3-3.** *نقول عن متتالية $(u_n)$ أنها ثابتة، إذا كان $\forall n\in N: u_n=a / a\in R$.* [3]

### أمثلة 3-1

1) المتتاليات التالية ثابتة: $u_n=3,\ v_n=-\sqrt{2},\ w_n=\frac{1}{7}$.

2) المتتاليات: $u_n=n,(n\in N),\ \ v_n=4^n,(n\in N),\ \ w_n=n^5,(n\in N)$ متزايدة.

3) المتتاليات: $u_n=\frac{1}{n},(n\in N^*),\ \ v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n,(n\in N),\ \ w_n=-(2n)^3+1,(n\in N)$ متناقصة.

4) المتتالية $u_n=(-1)^n$ ليست رتيبة، تسمى متتالية متناوبة (أو متذبذبة)، لأنها تأخذ قيمتين 1 و $-1$ حسب قيم $n$، أي

$$u_n=(-1)^n=\begin{cases}-1, & n \text{ فردي}\\ 1, & n \text{ زوجي}\end{cases}$$

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 143، ينظر أيضا:
Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. *Mathématiques pour l'économie. Analyse-Algèbre. 5e É.* Dunod. Paris, 2015. Définition 1, p. 57.

[2] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 1، ص ص. 143 -144.

[3] نفسه. تعريف 2، ص. 144.

## 2- تقارب أو تباعد متتالية عددية

### تعريف 3-4

- *نقول عن متتالية* $(u_n)$ *أنها* تنتهي *إلى* $l$ *أو* تتقارب *نحو* $l$ *(حيث* $l \in R$*) عندما يؤول* $n$ *إلى ما لا نهاية ونكتب*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l$$

- *نقول عن* $(u_n)$ *أنها* متباعدة *إن لم تكن متقاربة.* [1]

**نظرية 3-1.** *لكل متتالية متقاربة نهاية وحيدة.* [2]

**أمثلة 3-2**

1) المتتالية $n \in N^*$، $u_n = \frac{1}{n}$ متقاربة نحو الصفر لأن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 = l$$

2) المتتالية $n \in N$، $v_n = \frac{(-1)^n}{3n+5} + 4$ متقاربة نحو 4 لأن

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+5} + 4 = 4$$

3) المتتالية $n \in N$، $w_n = -n+7$ متباعدة لأن

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} -n+7 = -\infty$$

## 3- المتتاليات المتجاورة

**تعريف 3-5.** *نقول عن متتاليتين* $(u_n)$ *و* $(v_n)$ *أنهما* متجاورتان، *إذا كان*

*1)* $(u_n)$ *متزايدة و* $(v_n)$ *متناقصة،*

*2)* $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ [3]

**نظرية 3-2.** *كل متتاليتين متجاورتين متقاربتان و لهما نفس النهاية.* [4]

**أمثلة 3-3.** لتكن $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3}$، $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان متجاورتان لأن

1) $(u_n)$ متزايدة لأن

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3}\right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)^3} > 0$$

---

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 61-63.

[2] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. قضية 1، ص. 146.

[3] نفسه. ص. 150، ينظر أيضا:

Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 8, p. 69.

[4] Ibid. Théorème 2 , p. 69.

و

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}+\frac{1}{n+1}-\left(u_n+\frac{1}{n}\right)\\ &= (u_{n+1}-u_n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\\ &=\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\\ &=\frac{-(n^2+1)}{n(n+1)^3}<0 \end{aligned}$$

ومنه $(v_n)$ متناقصة.

2) $u_n - v_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

## 4- متتاليات خاصة

### 4-1- المتتالية الحسابية

**تعريف 3-6.** نسمي *متتالية حسابية ذات الأساس* $r$، *المتتالية $(u_n)$ التي يكون الفرق بين حدين متتالين منها ثابتا $r$، أي*

$$\forall n\in N:\ u_{n+1}-u_n=r \qquad (\text{مع } u_0 \text{ معطاة})$$

*بحيث $u_n$ الحد ذو الدليل $n$. تعطى عبارة الحد العام بالعلاقات التالية*

- *إذا كان الحد الأول هو $u_0$، فان* $\forall n\in N: u_n=u_0+nr$
- *إذا كان الحد الأول هو $u_1$، فان* $\forall n\in N: u_n=u_1+(n-1)r$ *(بتصرف).* (1)

**ملاحظة 3-1.** من التعريف 3-6، إذا كان $u_m$ و $u_n$ حدين من متتالية حسابية $(u_n)$، فان

$u_m=u_n+(m-n)r$ (بتصرف). (2)

#### 4-1-1- رتابة، تقارب أو تباعد متتالية حسابية

**تعريف 3-7.** *لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r$.*

- *إذا كان $r>0$، فان $(u_n)$ متزايدة ومتباعدة تؤول إلى $+\infty$.*
- *إذا كان $r<0$، فان $(u_n)$ متناقصة ومتباعدة تؤول إلى $-\infty$.*
- *إذا كان $r=0$، فان $\forall n\in N: u_n=u_0$، أي $(u_n)$ ثابتة ومتقاربة نحو $u_0$ (بتصرف).* (3)

**أمثلة 3-4**

1) أساس المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي حدها الرابع 6 وحدها الخامس 8، هو $r=u_4-u_3=8-6=2$.

إذا كان $u_0=1$، فالحد العام ل $(u_n)$ يعطى بالعبارة التالية

$$\forall n\in N: u_n=u_0+nr=1+2n$$

---

(1) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص.68، ينظر أيضا:

Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 10 ,p .74.

(2) Ibid. Définition 10, p. 74.

(3) Ibid.p . 74.

$(u_n)$ متزايدة ومتباعدة تؤول إلى $+\infty$، لأن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1+2n = +\infty$$

2) $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية حدها الثاني $1$ وحدها العاشر $-15$. جد عبارة حدها العام.

لتكن $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية حدها الأول $v_1$ وأساسها $r$، لدينا : $v_2 = 1$ و $v_{10} = -15$، حسب الملاحظة 3−1،

$$v_{10} = v_2 + (10-2)r \Leftrightarrow -15 = 1+8r \Leftrightarrow r = -2$$

$$v_2 = v_1 + r \Leftrightarrow v_1 = v_2 - r = 1-(-2) = 3$$

وعليه عبارة الحد العام ل $(v_n)_{n\geq1}$ هي

$$v_n = v_1 + (n-1)r = 3 + (n-1)(-2)$$

أي

$$v_n = -2n + 5$$

بما أن $r = -2 < 0$ فان $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية متناقصة ومتباعدة تؤول إلى $-\infty$.

### 4−1−2− عبارة مجموع $n$ حد من حدود متتالية حسابية

**تعريف 3−8.** *يرمز لمجموع $n$ حد من حدود متتالية حسابية $(u_n)_n$ حدها الأول $u_1$ وأساسها $r$ ب $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ أو اختصارا ب $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ ويعطى بالعلاقة التالية*

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحد الاول} + \text{الحد الاخير}\right)$$

*بحيث: عدد الحدود= دليل الحد الأخير من المجموع − دليل الحد الأول من المجموع +1، أي*

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$ [1]

**أمثلة 3−5**

1) $(u_n)_n$ متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = -1$ وأساسها $r = 6$.

1−1) أحسب الحدود الثاني، الثامن والحادي عشر.

1−2) أحسب المجاميع

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_8 \qquad \text{و} \qquad S' = u_2 + u_3 + \ldots + u_{11}$$

لدينا عبارة الحد العام ل $(u_n)_n$ كما يلي

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)r \\ &= -1 + 6(n-1) \\ &= 6n - 7 \end{aligned}$$

وعليه

1−1) $u_2 = 6(2) - 7 = 5,\quad u_8 = 6(8) - 7 = 41,\quad u_{11} = 6(11) - 7 = 59$

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص .73، ينظر أيضا:
Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. p. 75.

2-1) لدينا

$$\begin{aligned} S &= u_1+u_2+...+u_8 \\ &= \frac{8}{2}(u_1+u_8) \\ &= 4(-1+41)=160 \\ S' &= u_2+u_3+...+u_{11} \\ &= \frac{10}{2}(u_2+u_{11}) \\ &= 5(5+59)=320 \end{aligned}$$

2) $(v_n)_n$ متتالية حسابية حدها الأول $v_1=4$ وحدها الأخير $v_n=20$ ومجموع حدودها 108. جد عدد حدودها.

لدينا، مجموع حدود المتتالية $(v_n)_n$ من حدها الأول $v_1$ إلى الأخير $v_n$، يعطى بالعلاقة التالية

$$\begin{aligned} S &= v_1+v_2+...+v_n \\ &= \frac{n}{2}(v_1+v_n) \\ &= \frac{n}{2}(4+20)=12n \end{aligned}$$

لكن $S=108$ وعليه $108=12n$ إذا $n=9$، أي، عدد حدود المتتالية $(v_n)_n$ هو 9 حدود.

### 4-2- المتتالية الهندسية

**تعريف 3-9.** *المتتالية الهندسية هي التي تكون فيها النسبة بين أي حدين متتالين ثابتة وتسمى أساس المتتالية ويرمز لها بالرمز $q$، أي إذا كانت $(u_n)$ متتالية هندسية، فان* $\forall n\in N: \frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ *(1)*

*تعطى عبارة الحد العام للمتتالية $(u_n)$ بالعلاقات التالية*

- *إذا كان الحد الأول هو $u_0$، فان* $\forall n\in N: u_n=u_0q^n$
- *إذا كان الحد الأول هو $u_1$، فان* $\forall n\in N: u_n=u_1q^{n-1}$

*وعليه، إذا كان $u_m$ و $u_n$ حدين من المتتالية $(u_n)$، فان* $u_m=u_nq^{m-n}$ *(بتصرف) (2)*

### أمثلة 3-6

1) أوجد أساس متتالية هندسية $(u_n)$ حدها الخامس $u_5=6$ وحدها السادس $u_6=18$.

لدينا $q=\frac{u_6}{u_5}=\frac{18}{6}=3$

2) $(v_n)$ متتالية هندسية موجبة تماما بحيث حدها الثالث $v_3=2$ وحدها السابع $v_7=32$. أوجد حدها الأول $v_1$ وأساسها $q$.

---

(1) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 75.

(2) نفسه. ص. 77، ينظر أيضا:

Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 11, p. 76.

- لنحسب أساس المتتالية

لدينا $v_m = v_n q^{m-n}$ أي $v_7 = v_3 q^4$ وعليه $q^4 = \frac{v_7}{v_3} = \frac{32}{2} = 16$ ومنه $q = \sqrt[4]{16} = 2$ (لأن $(v_n)$ موجبة تماما).

- لنحسب الحد الأول $v_1$، لدينا

$$v_3 = v_1 q^2 \Leftrightarrow v_1 = \frac{v_3}{q^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = \frac{1}{2}$ وأساسها $q = 2$.

### 4-2-1- رتابة، تقارب أو تباعد متتالية هندسية

يمكن تلخيص اتجاه تغير وتقارب متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq1}$ تبعا لقيم أساسها $q$ وحدها الأول $u_1$ في الجدول التالي.

| الأساس | $u_1 > 0$ | $u_1 < 0$ |
|---|---|---|
| $q < -1$ | *$(u_n)$ متناوبة ومتباعدة بحيث* $\lvert u_n \rvert \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ | *$(u_n)$ متناوبة ومتباعدة بحيث* $\lvert u_n \rvert \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ |
| $q = -1$ | *$(u_n)$ متناوبة ومتباعدة (لا تقبل نهاية)* | *$(u_n)$ متناوبة ومتباعدة (لا تقبل نهاية)* |
| $-1 < q < 0$ | *$(u_n)$ متناوبة ومتقاربة بحيث* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ | *$(u_n)$ متناوبة ومتقاربة بحيث* (1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ |
| $q = 0$ | *$(u_n)$ متتالية معدومة* | *$(u_n)$ متتالية معدومة* |
| $0 < q < 1$ | *$(u_n)$ متناقصة ومتقاربة بحيث* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ | *$(u_n)$ متزايدة ومتقاربة بحيث* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ |
| $q = 1$ | *$(u_n)$ متتالية ثابتة بحيث* $\forall n \in N : u_n = u_1$ | *$(u_n)$ متتالية ثابتة بحيث* $\forall n \in N : u_n = u_1$ |
| $q > 1$ | *$(u_n)$ متزايدة ومتباعدة بحيث* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ | *$(u_n)$ متناقصة ومتباعدة بحيث* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ |

***جدول 3-1- رتابة، تقارب أو تباعد متتالية هندسية تبعا لقيم أساسها وحدها الأول (بتصرف)*** (2)

### 4-2-2- عبارة مجموع $n$ حد من حدود متتالية هندسية

**تعريف 3-10.** *مجموع أول $n$ حد من المتتالية الهندسية $(u_n)$ التي حدها الأول $u_1$ وأساسها $q$ هو*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

*نميز حالتين*

- *إذا كان $q = 1$، فان*

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit, p. 77.
(2) Ibid .p. 76.

$$S_n = u_1 + u_1 + ... + u_1$$

*وعليه*

$$S_n = nu_1$$

- *إذا كان* $q \neq 1$، *فان*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$= \text{الحــد الاول} \frac{\text{الاســاس}^{\text{عدد الحدود}} - 1}{\text{الاســاس} - 1}$$

*أي*

$$(1) \quad S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

*وعليه يمكن جمع الحالتين السابقتين بالعلاقة التالية*

$$(2) \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \begin{cases} nu_1; & q = 1 \\ u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}; & q \neq 1 \end{cases}$$

**أمثلة 3-7.** $(u_n)$ متتالية هندسية حدها الأول $u_1 = 1$ وأساسها $q = 3$.

1) أحسب الحد $u_2$.

2) أحسب المجاميع

$S = u_1 + u_2 + ... + u_5$ و $S' = u_2 + u_3 + ... + u_6$

لدينا

1) $u_2 = u_1 q = 1.3 = 3$.

2)

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_5$$
$$= u_1 \frac{1-q^5}{1-q}$$
$$= 1 \frac{1-3^5}{1-3} = 121$$
$$S' = u_2 + u_3 + ... + u_6$$
$$= u_2 \frac{1-q^5}{1-q}$$
$$= 3 \frac{1-3^5}{1-3} = 363$$

## 5- السلاسل العددية

السلاسل العددية هي متتاليات خاصة ولأهميتها يجب أن تدرس بشكل منفصل عن المتتاليات العددية.

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit, p. 77, see also :

فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 81

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit, p. 77.

**تعريف 3-11.** *لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية. نسمي سلسلة عددية ذات الحد العام $u_n$، المتتالية $(S_n)_n$ المعرفة ب*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

*أي*

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\vdots$$

*والتي يرمز لها بالرمز $\sum_{k=1}^{n} u_k$ أو اختصارا $\sum u_n$ ويسمى $S_n$ المجموع الجزئي للسلسلة.* (1)

**أمثلة 3-8**

1) السلسلة ذات المجموع الجزئي $1+2+3+4+5$ يمكن كتابتها على الشكل $S_5 = \sum_{i=1}^{5} i = 15$ بحيث حدها العام $u_i = i$.

2) السلسلة $2+4+6+8+\ldots$ يمكن كتابتها على الشكل $2(1+2+3+4+\ldots)$ ونرمز لها اختصارا $\sum_{k=1}^{\infty} 2k$ بحيث حدها العام $u_k = 2k$.

3) السلسلة $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ يمكن كتابتها على الشكل $\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$ ونرمز لها اختصارا $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ بحيث حدها العام $u_n = \frac{1}{3^n}$.

**– تقارب أو تباعد سلسلة عددية**

من الواضح أن المجموع الجزئي لسلسلة عددية هو دائما عدد منته، لكن هذا لا ينطبق على السلسلة العددية إذ تمثل مجموعا غير منته، لكن لدراسة هذه الأخيرة (نقصد تقارب أو تباعد سلسلة عددية) نلجأ لدراسة مجموعها الجزئي وهذا ما يوضحه التعريف التالي.

**تعريف 3-12**

– *نقول عن السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ذات الحد العام $u_k$ أنها متقاربة، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(S_n)_n$ ذات المجاميع الجزئية متقاربة، أي*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = l$$

*ويسمى $l$ مجموع السلسلة.*

– *نقول عن السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ أنها متباعدة إن لم تكن متقاربة.* (2)

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 12, p. 80, see also : Yadolah Dodge. *Mathématiques de base pour économistes.* Springer, Paris, 2007. Définitions 6.1, 6.2, pp. 153-154.
(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 13, p. 81,see also : Yadolah Dodge. Op. Cit. Définition 6.3, p. 156.

**ملاحظة 3-2**

- الشرط الضروري لتكون السلسلة $\sum u_n$ ذات الحد العام $u_n$ متقاربة هو أن يؤول $u_n$ نحو $0$ لما تؤول $n$ إلى $\infty$ (أي، إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متقاربة فان $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$).

لكن هذا الشرط ليس كافيا لتقارب السلسلة، أي، إذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.[1]

- يمكن استخدام نقيض الشرط الضروري للبرهان على تباعد سلسلة، أي، إذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ فان السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.[2]

**أمثلة 3-9**

1) السلسلة $$1+2+3+4+...=\sum_{n=1}^{\infty} n$$

متباعدة لأنه، حسب الملاحظة 3-2، لدينا $u_n = n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \neq 0$.

2) لتكن السلسلة $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

لنحسب المجموع الجزئي $S_n$ لهذه السلسلة.

لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

ولدينا

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n+1} = 1 = l$$

وعليه، حسب التعريف 3-12، السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ متقاربة نحو 1، أي

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = 1$$

**أ- سلاسل خاصة**

**أ-1- السلسلة الهندسية** $\sum u_1 q^{n-1}$

- *نسمي سلسلة هندسية، كل سلسلة حدها العام $u_n = u_1 q^{n-1}$ مع $u_1$ معطى، أي $(u_n)$ متتالية هندسية حدها الأول $u_1$ وأساسها $q$ وتعطى بالعلاقة التالية*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1} &= u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + ... \\ &= u_1\left(1+q+q^2+...\right) \end{aligned}$$

[1] Yadolah Dodge. Op. Cit. Remarque, p. 157, see also : Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Proposition 6, p. 81.
[2] Ibid .p. 82.

*أي السلسلة الهندسية هي مجموع لا نهائي لحدود متتالية هندسية.*

- *لدراسة تقارب هذه السلسلة يكفي دراسة تقارب مجموعها الجزئي الذي تطرقنا إليه في جزء المتتاليات الهندسية (أنظر التعريف 3−10)، لدينا*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_1 q^{k-1} = \begin{cases} nu_1; & q=1 \\ u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}; & q \neq 1 \end{cases}$$

*ومنه السلسلة* $\sum u_1 q^{n-1}$ *متقاربة ذات النهاية* $u_1 \dfrac{1}{1-q}$ *إذا كان* $|q|<1$ *ومتباعدة إذا كان* $|q| \geq 1$.(1)

**أمثلة 3−10**

1) لتكن السلسلة الهندسية

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

بحيث $u_1=1$ و $q=\frac{1}{3}$. بما أن $q=\frac{1}{3}<1$، فان السلسلة متقاربة نحو $\frac{3}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}.1 = u_1 \frac{1}{1-q}$، أي

$$\sum\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}$$

2) لتكن السلسلة الهندسية

$$\begin{aligned}3+6+12+24+\ldots &= 3(1+2+4+8+\ldots)\\ &= 3\left(2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 3(2)^{n-1}\end{aligned}$$

بحيث $u_1=3$ و $q=2$. بما أن $q=2>1$، فان السلسلة متباعدة، أي

$$\sum 3(2)^{n-1}=+\infty$$

**أ−2− سلسلة ريمان** $\sum \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha \in R$ **(Riemann Series)**

- *تكون سلسلة ريمان* $\sum \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha \in R$ *متقاربة إذا كان* $\alpha>1$ *ومتباعدة إذا كان* $\alpha \leq 1$.(2)
- *إذا كان* $\alpha=1$، *نحصل على السلسلة الحسابية*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

*وهذه السلسلة متباعدة.* (3)

**أمثلة 3−11**

1) السلسلة $\sum \frac{1}{n^3}$ متقاربة لأن $\alpha=3>1$.

2) السلسلة $\sum n^4$ يمكن كتابتها على الشكل $\sum \frac{1}{n^{-4}}$ فهي متباعدة لأن $\alpha=-4 \leq 1$.

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Exemples, p. 81, see also : Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 158-159.
(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Exemples, p. 81, see also : Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 161.
(3) Ibid, p. 161.

3) السلسلة $\sum \frac{1}{\sqrt[7]{n}}$ يمكن كتابتها على الشكل $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{7}}}$ فهي متباعدة لأن $\alpha = \frac{1}{7} \leq 1$.

**ب- معايير تقارب أو تباعد سلسلة عددية**

معرفة تقارب أو تباعد سلسلة عددية يعد صعبا إن لم تُعرف عبارة مجموعها الجزئي، لذلك نلجأ إلى بعض المعايير التي تساعدنا في التعرف على طبيعة (تقارب أو تباعد) السلاسل العددية وفيما يلي أشهر هذه المعايير.

**ب-1- معيار المقارنة**

**نظرية 3-3.** *لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين موجبتين تحققان $\forall n : 0 \leq u_n \leq v_n$.*

- *إذا كانت السلسلة $\sum v_n$ متقاربة فان السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.*
- *إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متباعدة فان السلسلة $\sum v_n$ متباعدة.*[(1)]

**أمثلة 3-12**

1) السلسلة $\sum \frac{n+1}{n}$ متباعدة لأن حدها العام $v_n = \frac{n+1}{n}$ و

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} = u_n, \ \forall n \geq 1$$

والسلسلة $\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ متباعدة باعتبارها سلسلة ريمان من أجل $\alpha = 1$.

2) السلسلة $\sum \frac{1}{n^2+4}$ متقاربة لأن حدها العام $u_n = \frac{1}{n^2+4}$ و

$$\frac{1}{n^2+4} < \frac{1}{n^2} = v_n, \ \forall n \geq 1$$

والسلسلة $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة باعتبارها سلسلة ريمان من أجل $\alpha = 2 > 1$.

3) السلسلة $\sum 5^n + 3n$ متباعدة لأن حدها العام $v_n = 5^n + 3n$ و

$$5^n + 3n > 5^n = u_n, \ \forall n \geq 0$$

والسلسلة $\sum u_n = \sum 5^n$ متباعدة باعتبارها سلسلة هندسية ذات الحد الأول $u_0 = 1$ والأساس $q = 5 \geq 1$.

**ب-2- معيار دالمبار (D'Alembert's Rule)**

**نظرية 3-4.** *لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة. لنفرض أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.*

- *إذا كان $l < 1$، فان السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.*
- *إذا كان $l > 1$، فان السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.*
- *إذا كان $l = 1$، فلا يوجد استنتاج عام حول طبيعة السلسلة $\sum u_n$.*[(2)]

**أمثلة 3-13**

1) لندرس طبيعة السلسلة $\sum \frac{1}{n!}$.

لدينا $u_n = \frac{1}{n!}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$، بتطبيق معيار دالمبار، نجد

[(1)] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Proposition 7, p. 82, see also : Yadolah Dodge. Op. Cit., pp. 160-161.
[(2)] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Proposition 9, p. 83, see also : Yadolah Dodge. Op. Cit., p. 163.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)n!}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\\&=0<1\end{aligned}$$

ومنه السلسلة $\sum\frac{1}{n!}$ متقاربة.

2) لندرس طبيعة السلسلة $\sum\frac{n!}{2^n}$.

لدينا $u_n=\frac{n!}{2^n}$ و $u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$، بتطبيق معيار دالمبار، نجد

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}.\frac{2^n}{n!}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)n!}{2.2^n}.\frac{2^n}{n!}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2}\\&=+\infty>1\end{aligned}$$

ومنه السلسلة $\sum\frac{n!}{2^n}$ متباعدة.

**ملاحظة 3-3.** المعياران السابقان (نقصد، معيار المقارنة ومعيار دالمبار) صالحان للسلاسل ذات الحدود الموجبة، لكن يمكن تطبيقهما على السلاسل ذات الحدود السالبة، إذ يكفي اعتبار الأخيرة كمعاكس للسلاسل ذات الحدود الموجبة. [1]

**أمثلة 3-14**

1) السلسلة

$$\sum-\frac{1}{n}=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots$$

هي معاكسة السلسلة الحسابية

$$\sum\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

وفي هذه الحالة

$$\sum-\frac{1}{n}=-\sum\frac{1}{n}$$

وبما أن السلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة فان السلسلة $\sum-\frac{1}{n}$ متباعدة كذلك.

2) السلسلة $\sum-\frac{1}{n!}$ معاكسة السلسلة $\sum\frac{1}{n!}$ المدروسة في الأمثلة 3-13 (1) وبما أن $\sum\frac{1}{n!}$ متقاربة فان $\sum-\frac{1}{n!}$ متقاربة أيضا.

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit. Remarque, p. 165.

## 6- تمارين

### 6-1- تمارين محلولة

**تمرين 3-1.** إذا علمت أن حجم إنتاج شركة ما في السنة الأولى هو 1000 وحدة وإذا كان هذا الإنتاج يتضاعف سنويا. فما هو حجم إنتاج هذه الشركة في السنة الخامسة ؟

**الحل.** لدينا إنتاج الشركة عبارة عن متتالية هندسية حدها الأول هو إنتاج السنة الأولى $u_1 = 1000$ وأساسها $q = 2$ وعليه عبارة الحد العام لهذه المتتالية هو

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 1000.2^{n-1}$$

ومنه، إنتاج السنة الخامسة هو

$$u_5 = 1000.2^4 = 16000 \text{ وحدة}$$

**تمرين 3-2.** اتفق عامل مع صاحب عمله أن يزيده كل سنة 800 دينار، فإذا كان أجره السنوي عند الإتفاق 120000 دينار، فبعد كم سنة يصبح أجره السنوي 125600 دينار؟

**الحل.** لدينا أجر العامل عبارة عن متتالية حسابية حدها الأول هو أجره السنوي عند الإتفاق $u_0 = 120000$ وأساسها $r = 800$ وعليه عبارة الحد العام لهذه المتتالية هي

$$u_n = u_0 + nr = 120000 + 800n$$

ولدينا $u_n = 125600$ ومنه

$$u_n = 125600 = 120000 + 800n \Rightarrow n = \frac{125600 - 120000}{800} = 7$$

أي، بعد سبع سنوات سيصبح أجر العامل 125600 دينار.

**تمرين 3-3.** مبيعات شركة ما، تزداد كل سنة مرة ونصف عن السنة التي سبقتها، فإذا بلغت مبيعاتها في السنة السابعة 3797 وحدة، فكم بلغت مبيعاتها في السنة الثانية ؟

**الحل.** مبيعات الشركة تمثل متتالية هندسية $(u_n)$ حدها الأول $u_1$ هو مبيعات السنة الأولى وأساسها $q = 1,5$ وعليه مبيعات السنة السابعة هو $u_7 = 3797$ وحدة.

- لنجد مبيعات الشركة في السنة الثانية، أي $u_2$

لدينا $u_m = u_n q^{m-n}$ وعليه $u_7 = u_2 q^5$ ومنه $u_2 = \frac{u_7}{q^5} = \frac{3797}{(1,5)^5} = 500$

إذا مبيعات الشركة في السنة الثانية، بلغت 500 وحدة.

**تمرين 3-4.** أودع شخص مبلغ 3000 دج لدى بنك، إذا علمت أن هذا المبلغ يزداد سنويا بنسبة 5%. ما هي مدة إيداع المبلغ إذا تحصل في نهاية المدة على 4654 دج ؟

**الحل.** المبلغ المحصل عليه في نهاية كل سنة يمثل حدا من حدود متتالية هندسية $(u_n)$ حدها الأول $u_0 = 3000\ DA$ المبلغ المودع في بداية المدة وأساسها $q = 1,05$، لأن

- المبلغ المودع في بداية المدة $u_0 = 3000\ DA$
- المبلغ المحصل عليه بعد سنة واحدة هو $u_1$، بحيث

$$u_1 = u_0 + 0.05u_0 = (1.05)u_0 \quad \text{مع} \quad 5\% = 0.05$$

- المبلغ المحصل عليه بعد سنتين هو $u_2$، بحيث

$$u_2 = u_1 + 0.05u_1 = (1.05)u_1$$
$$= (1.05)\left[(1.05)u_0\right] = (1.05)^2 u_0$$

وعليه المبالغ المحصل عليها في نهاية كل سنة تمثل حدود متتالية هندسية $(u_n)$ حدها الأول $u_0 = 3000$ وأساسها $q = 1,05$.

وعليه عبارة الحد العام لهذه المتتالية هي $u_n = u_0 q^n$ أي $u_n = 3000(1.05)^n$.

- إيجاد مدة إيداع المبلغ إذا تحصل في نهاية المدة على 4654 دج.

لدينا $u_n = 4654$ وعليه $4654 = 3000(1.05)^n \Leftrightarrow (1.05)^n = \dfrac{4654}{3000} = 1.55$

ومنه

$$\ln\left[(1.05)^n\right] = \ln(1.55) \Leftrightarrow n\ln(1.05) = \ln(1.55)$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(1.55)}{\ln(1.05)}$$
$$\Leftrightarrow n = 8.98 \approx 9$$

إذا مدة إيداع المبلغ هي 9 سنوات.

**تمرين 3-5.** في محطة وقود، خزان به 1023 لترا من الوقود، يتسرب منه في أول يوم لتر واحد وفي اليوم الثاني لتران وفي اليوم الثالث أربعة لترات وهكذا، فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغا ؟

**الحل.** لدينا

- كمية الوقود المتسرب في اليوم الأول هي $u_1 = 1L$
- كمية الوقود المتسرب في اليوم الثاني هي $u_2 = 2L$، أي $u_2 = 2(1) = 2u_1$
- كمية الوقود المتسرب في اليوم الثالث هي $u_3 = 4L$، أي $u_3 = 2(2) = 2u_2 = 2(2u_1) = 2^2 u_1$
- وهكذا، كمية الوقود المتسرب في اليوم $n$ هي $u_n$، بحيث $u_n = 2^{n-1}u_1$

وعليه، كمية الوقود المتسرب في كل يوم تمثل حدا من حدود متتالية هندسية $(u_n)$ حدها الأول $u_1 = 1$ وأساسها $q = 2$.

ومنه مجموع ما تسرب من الخزان من اليوم الأول إلى غاية اليوم $n$ هو

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

أي

$$S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$= 1.\frac{1-2^n}{1-2}$$
$$= 2^n - 1$$

إذا، كي يصبح الخزان فارغا، يجب أن يكون مجموع ما تسرب منه 1023 لترا، أي $S_n = 1023$ ومنه

$$\begin{aligned} 2^n-1=1023 \Leftrightarrow 2^n &= 1024 \\ &\Leftrightarrow \ln(2^n)=\ln(1024) \\ &\Leftrightarrow n\ln(2)=\ln(1024) \\ &\Leftrightarrow n=\frac{\ln(1024)}{\ln(2)}=10 \end{aligned}$$

أي، بعد 10 أيام يصبح الخزان فارغا.

**تمرين 3-6.** طفل يدخر يوميا 20 دينارا، فإذا فتح حصالته بعد 15 يوما ووجد فيها 400 دينارا، فكم كان في حصالته قبل أن يبدأ الادخار ؟

**الحل.** المبلغ المدخر لدى الطفل يمثل متتالية حسابية $(u_n)$ حدها الأول $u_0$ المبلغ قبل الادخار وأساسها $r=20$ دينارا وعليه $u_{15}=400$ دينار ومنه عبارة الحد العام هي $u_n=u_0+nr$ أي $u_n=u_0+20n$

ومنه $u_{15}=u_0+20(15)=u_0+300$ أي $400=u_0+300 \Leftrightarrow u_0=100$

إذا، كان في حصالة الطفل قبل الادخار 100 دينار.

**تمرين 3-7.** سيارة من النوع $x$، طُرحت للبيع سنة 2010 بمبلغ ابتدائي يتناقص سنويا بقيمة ثابتة، إذا كان سعرها سنة 2015 هو 5.000.000 دينارا جزائريا وسنة 2020 هو 4.000.000 دينارا جزائريا.

1) ما هو سعر السيارة الابتدائي سنة 2010 ؟

2) ابتداء من أي سنة يمكن الحصول على السيارة بسعر أقل من 3.600.000 دينارا جزائريا ؟

3) سنويا، يقوم وكيل معتمد بشراء ست سيارات من النوع $x$. أوجد إجمالي المبلغ الذي دفعه هذا الوكيل من بداية 2013 إلى نهاية 2020.

**الحل**

1) إيجاد سعر السيارة الابتدائي سنة 2010

بما أن سعر السيارة يتناقص سنويا بقيمة ثابتة، فهو يمثل متتالية حسابية $(u_n)$ حدها الأول $u_0$ يمثل سعر السيارة الابتدائي سنة 2010 وأساسها $r$ يمثل القيمة التي يتناقص بها سعر السيارة سنويا وعليه $u_5=5.000.000\quad DA$ هو سعر السيارة سنة 2015 و $u_{10}=4.000.000\quad DA$ سعرها سنة 2020.

لدينا $u_m=u_n+(m-n)r$ وعليه $u_{10}=u_5+(10-5)r$ ومنه

$$r=\frac{u_{10}-u_5}{10-5}=\frac{4.000.000-5.000.000}{5}=-200.000\quad DA$$

أي، سعر السيارة يتناقص سنويا بمبلغ 200.000 دينارا جزائريا وعليه $u_0=u_5+(0-5)r$، أي

$$u_0=5.000.000-5(-200.000)=6.000.000\quad DA$$

إذا، سعر السيارة الابتدائي سنة 2010 هو 6.000.000 دينارا جزائريا.

2) إيجاد السنة التي انطلاقا منها يمكن الحصول على السيارة بسعر أقل من 3.600.000 دينارا جزائريا

لدينا عبارة الحد العام $u_n=u_0+nr=6.000.000-200.000n$ وعليه

$$\begin{aligned} u_n<3.600.000 &\Leftrightarrow 6.000.000-200.000n<3.600.000 \\ &\Leftrightarrow n>12 \end{aligned}$$

أي، ابتداء من سنة 2023 يمكن الحصول على السيارة بسعر أقل من 3.600.000 دينارا جزائريا.

3) إيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه الوكيل من بداية 2013 إلى نهاية 2020

لدينا، سنة 2013 تقابل $u_3$ وسنة 2020 تقابل $u_{10}$ وبما أن الوكيل يشتري سنويا ست سيارات، فان مجموع المبلغ الذي دفعه من بداية 2013 إلى نهاية 2020 هو

$$\begin{aligned} S &= 6\left(u_3+u_4+...+u_{10}\right) \\ &= 6\left[\frac{8}{2}\left(u_3+u_{10}\right)\right] \\ &= 24\left(5.400.000+4.000.000\right) \\ &= 225.600.000 \quad DA \end{aligned}$$

بحيث

$$\begin{aligned} u_3 &= u_0+3r \\ &= 6.000.000+3\left(-200.000\right) \\ &= 5.400.000 \quad DA \end{aligned}$$

**تمرين 3-8.** أودع شخص الآن مبلغ 30000 دج لدى بنك، بحيث مجموع المبلغ المحصل عليه سنويا يزداد بنسبة 5%، بعد أربع سنوات عَلِمَ أن البنك رفع نسبة الزيادة إلى 6%؛ فقام الشخص بإضافة 60000 دج إلى حسابه.

- أحسب جملة المبلغ المتجمع في حسابه بعد مرور أربع سنوات ثم سبع سنوات من الآن.

**الحل**

1) إيجاد جملة المبلغ المتجمع في حساب الشخص بعد أربع سنوات من الآن

لدينا، جملة المبلغ المتجمع تمثل متتالية هندسية $\left(u_n\right)$ حدها الأول $u_0=30000\ DA$ وأساسها $q=1.05$.

لدينا، عبارة الحد العام $u_n=u_0q^n$ وعليه

$$\begin{aligned} u_4 &= u_0q^4 \\ &= 30000\left(1.05\right)^4 \\ &= 36465.18 \quad DA \end{aligned}$$

إذا، جملة المبلغ المتجمع في حساب الشخص بعد أربع سنوات من الآن هي 36465.18 دج.

2) إيجاد جملة المبلغ المتجمع في حساب الشخص بعد سبع سنوات من الآن

بما أن البنك رفع نسبة الزيادة إلى 6%، فإن $q'=1.06$ وعليه، جملة المبلغ المتجمع بعد زيادة النسبة تمثل متتالية هندسية $\left(v_n\right)$ أساسها $q'=1.06$ وحدها الأول

$$\begin{aligned} v_0 &= u_4+60000 \\ &= 36465.18+60000 \\ &= 96465.18\ DA \end{aligned}$$

لدينا، عبارة الحد العام $v_n=v_0q'^n$ وعليه

$$\begin{aligned} v_3 &= v_0q'^3 \\ &= 96465.18\left(1.06\right)^3 \\ &= 114891.58 \quad DA \end{aligned}$$

إذا، جملة المبلغ المتجمع في حساب الشخص بعد سبع سنوات من الآن هي 114891.58 دج.

**تمرين 3−9.** إنتاج شركة يتناقص سنويا ب 500 وحدة، إذا كان إنتاجها في السنة الثانية هو 40.000 وحدة، فما هو إنتاجها في السنة الثامنة ؟

**الحل.** إنتاج الشركة يمثل متتالية حسابية $(u_n)$ حدها الأول $u_1$ هو إنتاج السنة الأولى وأساسها $r=-500$ وعليه إنتاج السنة الثانية هو $u_2=40000$ وحدة.

- لنجد إنتاج الشركة في السنة الثامنة، أي $u_8$

لدينا $u_m=u_n+(m-n)r$ وعليه $u_8=u_2+6r$ ومنه $u_8=40000+6(-500)=37000$

إذا إنتاج الشركة في السنة الثامنة، بلغ 37000 وحدة.

**تمرين 3−10.** مبيعات شركة تزداد سنويا بنسبة 3%، عليها أن تبيع سنويا على الأقل 10.000 وحدة للحصول على الأرباح. إذا علمت أن مبيعاتها في السنة الأولى بلغت 8.000 وحدة، انطلاقا من أي سنة يمكن للشركة الحصول على الأرباح ؟

**الحل.** مبيعات الشركة تمثل متتالية هندسية $(u_n)$ حدها الأول $u_1=8000$ وحدة وأساسها $q=1.03$.

إيجاد السنة التي انطلاقا منها يمكن الحصول على الأرباح

لدينا عبارة الحد العام $u_n=u_1q^{n-1}=8000(1.03)^{n-1}$ وعليه

$$\begin{aligned} u_n\geq 10000 &\Leftrightarrow 8000(1.03)^{n-1}\geq 10000\\ &\Leftrightarrow (1.03)^{n-1}\geq \frac{5}{4}\\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(1.03)\geq \ln\left(\frac{5}{4}\right)\\ &\Leftrightarrow n\geq \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\ln(1.03)}+1\simeq 8.54 \end{aligned}$$

أي، يمكن للشركة الحصول على الأرباح انطلاقا من السنة التاسعة.

**تمرين 3−11.** أوجد عدد السنوات اللازمة لإيداع مبلغ ما من المال لتصبح جملة المبلغ المستحق ضعف المبلغ المودع، إذا علمت أن هذا الأخير يزداد سنويا بنسبة 5%.

**الحل.** لدينا، جملة المبلغ المستحق تمثل متتالية هندسية $(u_n)$ حدها الأول $u_0$ وأساسها $q=1.05$.

لدينا، عبارة الحد العام $u_n=u_0q^n=u_0(1.05)^n$ وعليه

$$\begin{aligned} u_n=2u_0 &\Leftrightarrow u_0(1.05)^n=2u_0\\ &\Leftrightarrow u_0(1.05)^n-2u_0=0\\ &\Leftrightarrow u_0\left[(1.05)^n-2\right]=0\\ &\Leftrightarrow (1.05)^n-2=0 \qquad (\text{لان } u_0\neq 0)\\ &\Leftrightarrow (1.05)^n=2\\ &\Leftrightarrow \ln\left[(1.05)^n\right]=\ln(2)\\ &\Leftrightarrow n\ln(1.05)=\ln(2)\\ &\Leftrightarrow n=\frac{\ln(2)}{\ln(1.05)}\simeq 14.2 \end{aligned}$$

وعليه، يجب إيداع المبلغ لمدة 15 سنة تقريبا حتى يتضاعف.

**تمرين 3−12.** آلة ثمنها وقت الشراء 1000 وحدة نقدية، تُستهلك في أول كل سنة بنسبة 15% عن السنة التي سبقتها. ما هي قيمة هذه الآلة في أول السنة السابعة ؟

**الحل.** قيمة الآلة في أول كل سنة تمثل متتالية هندسية $(u_n)$ حدها الأول $u_0=1000$ ثمن الآلة وقت الشراء وأساسها $q=1-0.15=0.85$.

لدينا، عبارة الحد العام $u_n=u_0q^n=1000(0.85)^n$ وعليه، قيمة الآلة في أول السنة السابعة هي

$$u_7=1000(0.85)^7=320.577 \quad \text{وحدة نقدية}$$

**تمرين 3−13.** أدرس طبيعة السلاسل التالية

$$1)\ \sum\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n},\ n\geq1 \qquad 2)\ \sum\frac{1}{n^4},\ n\geq1 \qquad 3)\ \sum n^2,\ n\geq1$$

$$4)\ \sum\frac{1}{5^n},\ n\geq0 \qquad 5)\ \sum\frac{1}{\sqrt{n-3}},\ n>3 \qquad 6)\ \sum\frac{1}{5^n n!},\ n\geq0$$

**الحل**

1) لنحسب المجموع الجزئي للسلسلة $\sum\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n},\ n\geq1$، أي

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\\&=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}-1\end{aligned}$$

وبما أن

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}-1=-1$$

فان السلسلة $\sum\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n},\ n\geq1$ متقاربة نحو $-1$، أي

$$\sum\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-1$$

2) السلسلة $\sum\frac{1}{n^4},\ n\geq1$ متقاربة باعتبارها سلسلة ريمان من أجل $\alpha=4>1$.

3) السلسلة $\sum n^2,\ n\geq1$ متباعدة لأن حدها العام $u_n=n^2\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty\neq0$ (أنظر الملاحظة 3−2)، أو يمكن ملاحظة أن

$$\sum n^2=\sum\frac{1}{n^{-2}}$$

أي، أنها سلسلة ريمان متباعدة لأن $\alpha=-2\leq1$.

4) السلسلة $\sum\frac{1}{5^n}=\sum\left(\frac{1}{5}\right)^n,\ n\geq1$ متقاربة لأنها سلسلة هندسية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها $q=\frac{1}{5}<1$.

5) نلاحظ أن

$$\forall n>3:\ n-3\le n \Rightarrow \sqrt{n-3}\le\sqrt{n}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n-3}}\ge\frac{1}{\sqrt{n}}$$

وبما أن السلسلة $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ متباعدة (سلسلة ريمان من أجل $\alpha=\frac{1}{2}\le 1$) وحسب معيار المقارنة، فان السلسلة $\sum\frac{1}{\sqrt{n-3}},\ n>3$ متباعدة.

6) من أجل السلسلة $\sum\frac{1}{5^n n!},\ n\ge 0$ نطبق معيار دالمبار، نحسب

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5^{n+1}(n+1)!}.5^n n!$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5(n+1)}$$
$$=0<1$$

ومنه السلسلة $\sum\frac{1}{5^n n!},\ n\ge 0$ متقاربة.

**تمرين 3-14.** أدرس طبيعة السلاسل التالية

$1)\sum\frac{n}{2},\quad n\ge 1$ $\qquad 2)\sum\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1},\quad n\ge 2$ $\qquad 3)\sum 7^n,\quad n\ge 0$

$4)\sum\frac{-3}{8^n},\quad n\ge 0$ $\qquad 5)\sum\frac{1}{n^6},\quad n\ge 1$ $\qquad 6)\sum\frac{1}{(n+5)^2},\quad n\ge 1$

$7)\sum\frac{n^2}{n!},\quad n\ge 1$

**الحل.** دراسة طبيعة السلاسل التالية

1) السلسلة $\sum\frac{n}{2},\ n\ge 1$ متباعدة لأن حدها العام $u_n=\frac{n}{2}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty\ne 0$ أو يمكن ملاحظة أن

$$\sum\frac{n}{2}=\frac{1}{2}\sum n=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^{-1}}$$

أي، أنها سلسلة ريمان متباعدة لأن $\alpha=-1\le 1$.

2) لنحسب المجموع الجزئي للسلسلة $\sum\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1},\ n\ge 2$، أي

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)$$
$$=\frac{1}{n}-1$$

وبما أن

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-1=-1$$

فان السلسلة $\sum\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1},\ n\ge 2$ متقاربة نحو $-1$، أي

$$\sum \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}=-1$$

3) السلسلة $\sum 7^n,\ \ n\geq 0$ متباعدة لأنها سلسلة هندسية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها $q=7\geq 1$.

4) السلسلة $\sum \frac{-3}{8^n},\ \ n\geq 0$ متقاربة لأنه يمكن ملاحظة أن

$$\sum \frac{-3}{8^n}=\sum -3\left(\frac{1}{8}\right)^n,\quad n\geq 0$$

أي أنها سلسلة هندسية حدها الأول $u_0=-3$ وأساسها $q=\frac{1}{8}<1$.

5) السلسلة $\sum \frac{1}{n^6},\ n\geq 1$ متقاربة باعتبارها سلسلة ريمان من أجل $\alpha=6>1$.

6) نلاحظ أن

$$\forall n\geq 0:\ n+5\geq n\Rightarrow (n+5)^2\geq n^2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(n+5)^2}\leq \frac{1}{n^2}$$

وبما أن السلسلة $\sum \frac{1}{n^2},\ n\geq 1$ متقاربة (سلسلة ريمان من أجل $\alpha=2>1$) وحسب معيار المقارنة، فان السلسلة $\sum \frac{1}{(n+5)^2},\ n\geq 1$ متقاربة.

7) من أجل السلسلة $\sum \frac{n^2}{n!},\ n\geq 1$ نطبق معيار دالمبار، نحسب

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^2}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{(n+1)n!}.\frac{n!}{n^2}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{(n+1)n^2}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^3+n^2}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^3}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\\&=0=l<1\end{aligned}$$

ومنه السلسلة $\sum \frac{n^2}{n!},\ n\geq 1$ متقاربة.

### 6-2- تمارين للحل

**تمرين 3-15.** يُراد تعبيد طريق طوله عشرة أمتار، إذا علمت أن مصاريف تعبيد المتر الأول هي 200 دينارا ومصاريف كل متر بعد ذلك تساوي $\frac{3}{2}$ من مصاريف المتر الذي قبله.

- ما هي مصاريف تعبيد آخر متر ؟ وما هي مصاريف تعبيد الطريق بأكمله ؟

**تمرين 3−16.** تعاقد موظف مع إحدى الشركات في عقد العمل معها على أن يتقاضى مرتبا شهريا قدره 20000 دج، على أن يزداد مرتبه كل شهر بنسبة معينة من مرتب الشهر السابق له مباشرة.

- أحسب هذه النسبة، إذا علمت أن مرتبه بعد ستة أشهر بلغ 35431 دج.

**تمرين 3−17.** أدرس طبيعة السلاسل التالية

1) $\sum \frac{n-4}{n},\ n \geq 1$    2) $\sum \frac{1}{2n^3+5},\ n \geq 0$    3) $\sum \frac{n!}{3^n},\ n \geq 0$    4) $\sum \frac{1}{n^3},\ n \geq 1$

5) $\sum -\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ n \geq 0$    6) $\sum \sqrt{n},\ n \geq 1$    7) $\sum \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n},\ n \geq 1$    8) $\sum \frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4},\ n \geq 0$

# الفصل الرابـع

# التطبيقات المستمرة

النهايات والاستمرارية من المفاهيم الأساسية في الحساب، إذ نهتم بسلوك دالة أو تطبيق عندما يقترب المتغير المستقل من قيمة حقيقية معينة وهذا ما يعرف بالنهاية وتحدد هذه الأخيرة استمرارية دالة عند قيمة معينة من عدمها.

## 1- نهاية دالة

### 1-1- نهاية دالة عند نقطة معينة

*ليكن $a \in R$ و $f$ دالة معرفة على المجال $I = ]a-\alpha, a+\alpha[$ ، بحيث $\alpha > 0$ باستثناء محتمل لـ $a$ (نقول أن $f$ معرفة في جوار $I$ لـ $a$، باستثناء محتمل لـ $a$).*

**تعريف 4-1.** *نقول أن $f$ تنتهي إلى عدد حقيقي $l$ عندما ينتهي $x$ إلى $a$، إذا كان*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 : \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

ونكتب

$f(x) \to l$ عندما $x \to a$ أو $\lim\limits_{a} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$. [1]

### أمثلة 4-1

1) لتكن الدالة

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = x+1$$

لنبين أن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

بما أن الدالة $f$ معرفة عند $x = 0$، يكفي تعويض $x$ ب $0$ في عبارة الدالة $f$، أي

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0+1 = 1$$

2) لتكن الدالة

$$g : R_+ \to R_+$$
$$x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$$

لنبين أن $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = 2$.

الدالة $g$ معرفة عند $x = 4$، بالتعويض عن $x$ بالقيمة $4$ في عبارة الدالة $g$، نجد

$$\lim_{x \to 4} g(x) = \sqrt{4} = 2$$

### - نهاية دالة عن يمين وعن يسار نقطة معينة

### تعريف 4-2

- *نقول أن لـ $f$ نهاية حقيقية $l_1$ عن يمين $a$ ونرمز لذلك ب*

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 2، ص. 207، ينظر أيضا:
Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 1. pp. 87-88.

$$\lim_{\substack{x \to a}} f(x) = l_1 \quad \text{أو} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l_1 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$$

*إذا كان*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \left]a, a+\alpha\right[, \alpha > 0, \quad 0 < x - a < \eta_\varepsilon \Rightarrow \left| f(x) - l_1 \right| < \varepsilon$$

- *ونقول أن ل $f$ نهاية حقيقية* $l_2$ عن يسار $a$ *ونرمز لذلك ب*

$$\lim_{\substack{x \to a}} f(x) = l_2 \quad \text{أو} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l_2 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$$

*إذا كان*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \left]a-\alpha, a\right[, \alpha > 0, \quad 0 < a - x < \eta_\varepsilon \Rightarrow \left| f(x) - l_2 \right| < \varepsilon$$ [1]

**ملاحظة 4−1.** إن وجود نهاية ل $f$ عند النقطة $a$ معناه وجود نهاية مشتركة ل $f$ عن يمين وعن يسار $a$، أي

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ و $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ . [2]

## أمثلة 4−2

1) لتكن الدالة

$$f : R^* \to R$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

لنبين أن $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة.

بما أن $D_f = R^* = \left]-\infty, 0\right[ \cup \left]0, +\infty\right[$ فان الدالة $f$ غير معرفة عند $x = 0$ وتقبل نهايتين عن يمين وعن يسار 0.

- لنحسب نهاية $f$ عن يسار 0، أي

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- لنحسب نهاية $f$ عن يمين 0، أي

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

بما أن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ وحسب الملاحظة 4−1 فان $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة.

---

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 3، ص. 208، ينظر أيضا:

Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 3. p. 88.

(2) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. ملاحظة 1، ص. 208، ينظر أيضا:

Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Proposition 1. p. 89.

2) لتكن الدالة

$$g : R^* \to R^+$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{|x|}$$

لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

بما أن $D_g = R^* = ]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ فان الدالة $g$ غير معرفة عند $x=0$ وتقبل نهايتين عن يمين وعن يسار 0.

نعلم أن

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

- لنحسب نهاية $g$ عن يسار 0، أي

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{|x|}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{-x}$$
$$= \frac{1}{-0^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- لنحسب نهاية $g$ عن يمين 0، أي

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{|x|}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{0^+} = +\infty$$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$ وحسب الملاحظة 4-1 فان $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

### 1-2- خواص النهايات

**نظرية 4-1.** *إذا كانت لدالة معطاة نهاية عند نقطة معينة، فان هذه النهاية وحيدة.* [1]

**نظرية 4-2.** *لتكن $f$ و $g$ دالتين معرفتين على جوار $I$ لنقطة $a$، بحيث $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = k$.*

*لدينا*

*1)* $\forall \alpha, \beta \in R : \lim\limits_{x\to a}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha l + \beta k$

*2)* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$

*3)* $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = l.k$

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. قضية 1، ص. 210، ينظر أيضا:

Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Proposition 2. p. 93.

*4) إذا كان* $g(x)\neq 0$ *، من أجل كل* $x\in I$ *و* $k\neq 0$ *، فان* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{k}$

*5) إذا كان* $\forall x\in I: f(x)\leq g(x)$ *، فان* $l\leq k$.

*6) إذا كان* $l=0$ *و* $g$ *محدودة على* $I$ *، فان* $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=0$

*7) إذا كان* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ *و* $\forall x\in I: f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ *، فان* $\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$. [(1)]

**ملاحظة 4−2.** عند حساب النهايات قد نحصل على حالات عدم التعيين، أشهرها

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ +\infty-\infty,\ 0.\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},...$$

ولإزالة هذه الحالات نلجأ لعدة طرق، منها، العامل المشترك أو التحليل، الحصر (النظرية 4−2 (7))، المرافق،... ، والأمثلة التالية توضح هذه الطرق.

**أمثلة 4−3**

1) $\lim\limits_{x\to 0} 2x^3+x-1=-1$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-3}{x+1}=\frac{1}{5}$

3) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\frac{0}{0}$

نستخدم طريقة العامل المشترك أو التحليل (أي، نحلل البسط إلى جداء عوامل). لدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}&=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}\\&=\lim_{x\to 3}x+1=4\end{aligned}$$

4) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=+\infty-\infty$

نستخدم طريقة المرافق (مرافق $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ هو $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$). لدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}-\sqrt{x-1}&=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\\&=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\\&=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=0\end{aligned}$$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} x+\sin x$

لاحظ أن $x\mapsto \sin x$ دالة دورية تأخذ صورها في المجال $[-1,1]$ ولا تقبل نهاية عند $\infty$ ، أي $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$ غير موجودة ولحساب $\lim\limits_{x\to +\infty} x+\sin x$ ، نلجأ لطريقة الحصر (النظرية 4−2 (7)).

---

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. قضيتان 2 و 3، ص. 210، ينظر أيضا:

Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Proposition 3, pp. 93-94.

لدينا

$$\forall x \in R : -1 \leq \sin x \leq 1$$

ومنه

$$\forall x \in R : x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x-1 =$ فان $\lim_{x\to+\infty} x+\sin x = +\infty$ .

## 2- الاستمرارية

تعرف استمرارية دالة بيانيا، على أنها رسم منحنى هذه الدالة دون رفع القلم وجبريا، هي تساوي صورة دالة عند نقطة معينة بنهايتها عند هذه الأخيرة.

### 2-1- الاستمرارية عند نقطة معينة

**تعريف 4-3.** *لتكن $a \in R$ و $f$ دالة معرفة على جوار ل $a$. نقول أن $f$ مستمرة عند $a$، إذا كان*

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ .[(1)]

**تعريف 4-4.** *نقول عن دالة $f$ أنها مستمرة على مجال $I$، إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من $I$.*[(2)]

**أمثلة 4-4**

1) الدالة الثابتة

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = 2$$

مستمرة على $R$ لأنها مستمرة عند كل نقطة $a$ من $R$، أي

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2 = f(a)$$

2) الدالة الخطية (دالة المنصف الأول)

$$g : R \to R$$
$$x \mapsto g(x) = x$$

مستمرة على $R$ لأنها مستمرة عند كل نقطة $a$ من $R$، أي

$$\lim_{x\to a} g(x) = a = g(a)$$

**- الاستمرارية عن يمين وعن يسار نقطة معينة**

**تعريف 4-5.** *لنفرض أن $I$ جوار للنقطة $a$.*

- *نقول أن $f$ مستمرة عن يمين (يسار)، على التوالي النقطة $a$، إذا كان*

$\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = f(a)$ ($\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = f(a)$، على التوالي).[(3)]

---

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 1، ص. 211، ينظر أيضا:
Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 10, p. 99.

(2) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 2، ص. 211، ينظر أيضا:
Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 12, p. 101.

(3) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. ملاحظات (أ)، ص. 211، ينظر أيضا:
Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 11, p. 99.

– *تكون $f$ مستمرة عند النقطة $a$، إذا وفقط إذا كانت مستمرة عن يمين وعن يسار النقطة $a$، أي*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x) = f(a)$$ (1)

## أمثلة 4-5

1) لتكن $f$ دالة معرفة على المجال $[0,4]$ ب

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 \le x \le 2 \\ x+1; & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

الدالة $f$ غير مستمرة عند $x=2$ لأنها مستمرة فقط عن يسارها، أي

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} x = 2 = f(2)$$

وليست مستمرة عن يمين $x=2$، أي

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} x+1 = 3 \ne f(2)$$

وعليه

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) \ne \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = f(2)$$

إذا $f$ مستمرة فقط على $[0;2[\cup]2;4]$.

2) لتكن $g$ دالة معرفة على $R$، بحيث

$$g(x) = \begin{cases} x^2+3; & x<1 \\ 4; & x \ge 1 \end{cases}$$

لندرس استمرارية $g$ عند $x=1$.

– ندرس استمرارية $g$ عن يمين $x=1$، لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} g(x) = 4 = g(1)$$

ومنه $g$ مستمرة عن يمين 1.

– ندرس استمرارية $g$ عن يسار $x=1$، لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} x^2+3 = 4 = g(1)$$

ومنه $g$ مستمرة عن يسار 1.

وعليه

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} g(x) = g(1) = 4$$

إذا $g$ مستمرة على $R$.

## تعريف 4-6

– *نقول عن دالة $f$ أنها مستمرة على مجال مغلق $[a,b]$، إذا كانت مستمرة على المجال المفتوح $]a,b[$ ومستمرة عن يمين $a$ وعن يسار $b$.*

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Proposition 6, p. 100.

- نقول عن $f$ أنها مستمرة على $[a,+\infty[$، إذا كانت مستمرة على $]a,+\infty[$ ومستمرة عن يمين $a$.
- نقول عن $f$ أنها مستمرة على $]-\infty,b]$، إذا كانت مستمرة على $]-\infty,b[$ ومستمرة عن يسار $b$.(1)

**أمثلة 4-6**

الدالة

$$\begin{aligned} f : R_+ &\to R_+ \\ x &\mapsto f(x)=\sqrt{x} \end{aligned}$$

مستمرة على $R_+=[0,+\infty[$ لأنها مستمرة على $]0,+\infty[$ ومستمرة عن يمين $0$ $\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sqrt{x}=0=f(0)\right)$.

## 2-2- خواص الدوال المستمرة

نستخلص من دراسة النهايات الخواص التالية.

**نظرية 4-3.** *إذا كانت $f$ و $g$ دالتين مستمرتين عند نقطة $a$، فان*

1) $\alpha f+\beta g$ مستمرة عند $a$ من أجل كل $\alpha,\beta\in R$.

2) $f.g$ مستمرة عند $a$.

3) $\dfrac{f}{g}$ مستمرة عند $a$، إذا كان $g(a)\neq 0$.

4) إذا كانت $f$ مستمرة عند $a$ و $g$ مستمرة عند $f(a)$ فان $g\circ f$ مستمرة عند $a$ وعليه، إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $g$ مستمرة عند $l$ فان $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=g(l)$.

وبالمثل، إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ و $g$ مستمرة عند $l$ فان $\lim\limits_{x\to\infty}(g\circ f)(x)=g(l)$.(2)

**ملاحظة 4-3**

- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $R$، الدوال الناطقة، دوال القوى، الدوال الأسية، اللوغاريتمية، $\sin$، $\cos$، مستمرة على مجموعات تعريفها.
- كل دالة محصل عليها باستعمال خاصية أو أكثر من خواص النظرية 4-3 هي دالة مستمرة.(3)

**أمثلة 4-7.** لنحسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+2)$

لدينا $\ln(x+2)=(g\circ f)(x)$ بحيث $f(x)=x+2$ و $g(x)=\ln x$.

لدينا $\lim\limits_{x\to 0} x+2=2$ والدالة $g(x)=\ln x$ مستمرة على $]0,+\infty[$ أي $\ln x$ مستمرة عند $x=2$ ومنه

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 13, p. 101.

(2) Ibid. Propositions 7 et 8, pp. 102-103, see also :

غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. ملاحظات، ص. 212.

(3) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 103.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln(x+2) &= \lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)\\ &= g\left(\lim_{x\to 0} f(x)\right)\\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0} x+2\right)\\ &= \ln(2)\end{aligned}$$

2) $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{3x^2-1}$

لدينا $\sqrt{3x^2-1}=(g\circ f)(x)$ بحيث $f(x)=3x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

لدينا $\lim_{x\to -\infty} 3x^2-1=+\infty$ والدالة $g(x)=\sqrt{x}$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\sqrt{3x^2-1} &= \sqrt{\lim_{x\to -\infty} 3x^2-1}\\ &= \sqrt{\lim_{x\to -\infty} 3x^2}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

### 2-3- التمديد بالاستمرار

**تعريف 4-7.** *لتكن $f$ دالة من $E$ في $R$ و $a\notin E$، نفرض أن ل $f$ نهاية حقيقية $l$ عند $a$، في هذه الحالة نقول أن $f$ قابلة للتمديد بالاستمرار عند $a$ وتشكل الدال*

$$g: E\cup\{a\}\to R$$

$$x\mapsto g(x)=\begin{cases} f(x); & x\in E\\ l; & x=a\end{cases}$$

*تمديدا ل $f$ بالاستمرار عند النقطة $a$.* [1]

### أمثلة 4-8

لتكن الدالة

$$f: R-\{1\}\to R$$

$$x\mapsto f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

$f$ غير مستمرة عند $x=1$ لأنها غير معرفة عندها. لنحسب $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

نستخدم طريقة التحليل لإزالة حالة عدم التعيين، أي

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1} x+1=2\end{aligned}$$

ومنه $f$ تقبل 2 كنهاية عند $x=1$ وعليه فهي تقبل تمديدا بالاستمرار متمثلا في الدالة $g$، بحيث

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف، ص. 213.

$$g : R \to R$$
$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}; & x \neq 1 \\ 2; & x = 1 \end{cases}$$

النظريتان التاليتان تمثلان تطبيقا مباشرا لاستمرارية دالة.

**نظرية 4−4 (نظرية القيم المتوسطة).** *إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجال $[a,b]$، فانه من أجل كل عدد $d$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ :*

(1) $\exists c \in [a,b] : f(c) = d$

من أجل $d = 0$، نحصل من النظرية 4−4 على الحالة الخاصة التالية.

**نظرية 4−5.** *إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ و $f(a).f(b) \leq 0$ فان*

(2) $\exists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = 0$

**أمثلة 4−9**

لنبين أن المعادلة $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ تقبل حلا $\alpha$ في المجال $[1,2]$.

نضع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ ، لدينا

- $f$ مستمرة على $R$ وعليه $f$ مستمرة على $[1,2]$.
- $f(1) = -2 < 0$ و $f(2) = 3 > 0$ ومنه $f(1).f(2) < 0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة: $\exists \alpha \in [1,2] : f(\alpha) = 0$

## 3− تمارين

**تمرين 4−1.** أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+7x-30}{x-3} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x-2}{3x^2+1} \qquad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{4x+3}\right) \qquad \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

**الحل**

1) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+7x-30}{x-3} = \frac{0}{0}$ ومنه

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+7x-30}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+10)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+10 = 13$$

2) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x-2}{3x^2+1} = \frac{+\infty-\infty}{+\infty}$ ومنه

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x-2}{3x^2+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Théorème 1, p. 103.
(2) Ibid. Proposition 10, p. 106.

3) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x=+\infty-\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

4) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ ومنه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+x}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x}{x}$$

أ)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1=0$$

ب)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1=2$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ غير موجودة.

لكن نعلم أن $\forall x\in R:-1\leq\sin x\leq1$ ومنه $-1\leq\sin x\leq1\Rightarrow-1\leq1+2\sin x\leq3$

وبما أن $\forall x\in R_+:1+\sqrt{x}>0$ فان $\dfrac{-1}{1+\sqrt{x}}\leq\dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}\leq\dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{1+\sqrt{x}}=0$ وحسب طريقة الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}=0$.

(6

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x+1}{4x+3}\right)&=\sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x}{4x}\right)\\&=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(7 $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

لدينا $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ غير موجودة.

نضع $y=\frac{1}{x^2}$ ومنه لما $x\to0$ فان $y\to+\infty$ وعليه $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\cos(y)}{y}$

لكن نعلم أن $\forall y\in R:-1\le\cos y\le1$ ومنه $\frac{-1}{y}\le\frac{\cos y}{y}\le\frac{1}{y}$

وبما أن $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{-1}{y}=0$ و $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}=0$ وحسب طريقة الحصر $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\cos y}{y}=0$.

**تمرين 4−2.** أوجد النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-x\qquad\lim_{x\to4}\frac{x-4}{x^2-x-12}\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{x^2-x+3}\qquad\lim_{x\to1}x^3-2$$

**الحل.** لنحسب النهايات التالية

(1 $\lim\limits_{x\to1}x^3-2=(1)^3-2=-1$

(2 حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{x^2-x+3}=\frac{+\infty}{+\infty-\infty}$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{x^2-x+3}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0\end{aligned}$$

(3 حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{x^2-x-12}=\frac{0}{0}$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{x-4}{x^2-x-12}&=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(x+3)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{7}\end{aligned}$$

(4 حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-x=+\infty-\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+5}-x\right)\left(\sqrt{x+5}+x\right)}{\sqrt{x+5}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5-x^2}{\sqrt{x+5}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$$

### تمرين 4−3

1) لتكن $f$ و $g$ دالتين معرفتين على $R$، بحيث

$$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$$

− هل الدالتان $f$ و $g$ مستمرتان على $R$؟

2) عين قيمة العدد الحقيقي $\lambda$ حتى تكون الدالة $h$ مستمرة على المجال $[0,1]$، بحيث

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & 0\leq x<\dfrac{1}{2}\\ 2x+\lambda x^2, & \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$$

**الحل**

1) لندرس استمرارية $f$ و $g$ على $R$

1−1) لندرس استمرارية $f$ على $R$.

بما أن $f$ مستمرة على $R^*$، ندرس استمرارية $f$ عند $x=0$.

وبما أن $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ فان

$$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{x}{x}=x+1, & x>0\\ x+\dfrac{-x}{x}=x-1, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

بما أن $\lim_{x\geq 0}f(x)=\lim_{x\geq 0}x+1=1$ و $\lim_{x\leq 0}f(x)=\lim_{x\leq 0}x-1=-1$ و $f(0)=0$

وعليه $\lim_{x\leq 0}f(x)\neq\lim_{x\geq 0}f(x)\neq f(0)$

إذا $f$ غير مستمرة عند $x=0$ وعليه $f$ مستمرة فقط على $R^*$.

2−1) لندرس استمرارية $g$ على $R$.

بما أن $g$ مستمرة على $R^*$، ندرس استمرارية $g$ عند $x=0$.

لدينا: حالة عدم التعيين $\lim_{x\leq 0}g(x)=\lim_{x\leq 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{0}{0}$

وحسب قانون قابلية اشتقاق الدالة $\sin x$ عند $x=0$ ، لدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x\leq 0} g(x) &= \lim_{x\leq 0}\frac{\sin x-\sin(0)}{x-0}\\ &= \sin'(0)\\ &= \cos(0)=1\end{aligned}$$

و $\lim_{x\geq 0} g(x) = \lim_{x\geq 0} x^2+1=1$ .

بما أن $\lim_{x\leq 0} g(x) = \lim_{x\geq 0} g(x) = g(0)=1$ فان $g$ مستمرة عند $x=0$ وعليه $g$ مستمرة على $R$ .

2) لنعين قيمة العدد الحقيقي $\lambda$ حتى تكون الدالة $h$ مستمرة على المجال $[0,1]$

لدينا $h$ مستمرة على $\left[0,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},1\right]$ وحتى تكون $h$ مستمرة على $[0,1]$ يجب أن تكون مستمرة عند $x=\frac{1}{2}$ ،

أي $\lim_{x\leq\frac{1}{2}} h(x) = \lim_{x\geq\frac{1}{2}} h(x) = h\left(\frac{1}{2}\right)$ ، معناه

$$\lim_{x\leq\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x} = \lim_{x\geq\frac{1}{2}} 2x+\lambda x^2$$

$$\frac{2}{3}=1+\frac{1}{4}\lambda$$

إذا $\lambda=-\frac{4}{3}$ .

ومنه $h(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & 0\leq x<\frac{1}{2}\\ 2x-\frac{4}{3}x^2, & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$ مستمرة على $[0,1]$ .

**تمرين 4−4.** أدرس استمرارية $f$ على المجال $[-2;6]$، بحيث

$$f(x)=\begin{cases}4x-1; & x\in[-2;1]\\ 3x; & x\in]1;5[\\ -x; & x\in[5;6]\end{cases}$$

**الحل.** لندرس استمرارية $f$ على المجال $[-2;6]$ .

بما أن $f$ مستمرة على $[-2;1[\cup]1;5[\cup]5;6]$ . ندرس استمرارية $f$ عند $x=1$ و $x=5$ .

- من أجل $x=1$ ، لدينا

$\lim_{x\leq 1} f(x)=\lim_{x\leq 1} 4x-1=3$ و $\lim_{x\geq 1} f(x)=\lim_{x\geq 1} 3x=3$ و $f(1)=3$ .

بما أن $\lim_{x\leq 1} f(x)=\lim_{x\geq 1} f(x)=f(1)$ فان $f$ مستمرة عند $x=1$ .

- من أجل $x=5$ ، لدينا

$\lim_{x\leq 5} f(x)=\lim_{x\leq 5} 3x=15$ و $\lim_{x\geq 5} f(x)=\lim_{x\geq 5} -x=-5$ و $f(5)=-5$ .

بما أن $\lim_{x\leq 5} f(x)\neq\lim_{x\geq 5} f(x)=f(5)$ فان $f$ غير مستمرة عند $x=5$ .

وعليه $f$ مستمرة على $[-2;5[\cup]5;6]$ .

**تمرين 4−5.** عين قيمة العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون الدالة $g$ مستمرة على $R$، بحيث

$$g(x)=\begin{cases} x+3; & x<0 \\ 2x-\alpha; & x\geq 0 \end{cases}$$

**الحل.** تعيين قيمة العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون الدالة $g$ مستمرة على $R$.

لدينا $g$ مستمرة على $R^*$ وحتى تكون $g$ مستمرة على $R$ يجب أن تكون مستمرة عند $x=0$، أي $\lim\limits_{x\leq 0} g(x)=\lim\limits_{x\geq 0} g(x)=g(0)$، معناه

$$\lim_{x\leq 0} x+3=\lim_{x\geq 0} 2x-\alpha$$
$$3=-\alpha$$

إذا $\alpha=-3$.

ومنه $g(x)=\begin{cases} x+3; & x<0 \\ 2x+3; & x\geq 0 \end{cases}$ مستمرة على $R$.

**تمرين 4−6.** بين أن المعادلة $x^3+3x-2=0$ تقبل على الأقل حلا في $R$.

**الحل**

نضع $f(x)=x^3+3x-2$

لدينا

- $f$ معرفة ومستمرة على $R$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+3x-2=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+3x-2=+\infty$

وعليه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة: $\exists\alpha\in R: f(\alpha)=0$

### 3−2− تمارين للحل

**تمرين 4−7.** أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^4$$

**تمرين 4−8**

1) أدرس استمرارية الدالتين التاليتين على مجموعتي تعريفهما

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x<1 \\ 2x+1, & x\geq 1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1[ \\ x^2+1, & x\in[1,+\infty[ \end{cases}$$

2) أوجد قيمة العدد الحقيقي $b$ حتى تكون الدالة $k$ مستمرة على $R$ ، بحيث

$$k(x)=\begin{cases} ax+b, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}, \qquad a\in R$$

**تمرين 4−9.** بين أن المعادلة $x^2+\sin(x)-1=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0,\pi]$.

# الفصل الخامس

# المشتقات

الحساب التفاضلي أو الاشتقاق من المفاهيم الرياضية الهامة التي تستخدم بشكل واسع في كثير من المجالات منها الإدارية والاقتصادية. يعرف تطبيق الاشتقاق في الاقتصاد بالحساب الحدي ومثال ذلك، أن مشتق التكلفة الكلية يسمى التكلفة الحدية.

# 1- قابلية اشتقاق دالة

## 1-1- قابلية اشتقاق دالة عند نقطة

**تعريف 5-1.** *لتكن $f$ دالة معرفة على جوار نقطة $a\in R$. نقول عن $f$ أنها قابلة للاشتقاق عند $a$، إذا كانت*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*موجودة ومنتهية وتسمى العدد المشتق ل $f$ عند $a$* [1] *ويرمز له بأحد الرموز*

$$f'(a) \qquad \frac{df}{dx}(a) \qquad \frac{d}{dx}[f(a)]$$

ونكتب

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*أو بعبارة أخرى*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ [2]

**أمثلة 5-1.** لتكن

$$f:R\to R$$
$$x\mapsto f(x)=2x+1$$

ليكن $a\in R$. لنبين أن $f$ قابلة للاشتقاق عند $a$ بحيث $f'(a)=2$.

لدينا

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(2x-1)-(2a-1)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)}{x-a}=2$$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق عند $a$ لأن $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجودة وعليه $f'(a)=2$.

**تعريف 5-2**

– *لتكن $f$ دالة معرفة على مجال $]a-\alpha,a]$ بحيث $\alpha>0$. نقول أن قابلة للاشتقاق عن يسار $a$ إذا كان*

$$\lim_{x\leq a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\beta$$

*ويسمى العدد الحقيقي $\beta$ بالعدد المشتق ل $f$ عن يسار $a$ ونرمز له ب $f_g'(a)$ أو $f_-'(a)$.*

---

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 1, pp. 111-112.
[2] Edward T Dowling. *Introduction to mathematical economics. 3rd E.* The McGraw-Hill Companies, New York, 2001, p. 36.

– ومن أجل $f$ معرفة على مجال $[a,a+\alpha[$ بحيث $\alpha>0$. نقول أن *قابلة للاشتقاق عن يمين* $a$ إذا كان

$$\lim_{x \geq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \gamma$$

*ويسمى العدد الحقيقي $\gamma$ بالعدد المشتق ل $f$ عن يمين $a$ ونرمز له ب $f'_d(a)$ أو $f'_+(a)$.* [1]

**نظرية 5−1.** *نقول أن $f$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $a$، إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عن يمين وعن يسار $a$ وكان*

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$ [2]

**أمثلة 5−2**

لتكن

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = |x|$$

لندرس قابلية اشتقاق $f$ عند $x=0$.

نعلم أن

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

– لندرس قابلية اشتقاق $f$ عن يسار $x=0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \leq 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\leq 0} \frac{|x|}{x} \\ &= \lim_{x\leq 0} \frac{-x}{x} \\ &= -1 = f'_-(0)\end{aligned}$$

بما أن $f'_-(0) = -1 < \infty$ فان $f$ قابلة للاشتقاق عن يسار $x=0$.

– لندرس قابلية اشتقاق $f$ عن يمين $x=0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \geq 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\geq 0} \frac{|x|}{x} \\ &= \lim_{x\geq 0} \frac{x}{x} \\ &= 1 = f'_+(0)\end{aligned}$$

بما أن $f'_+(0) = 1 < \infty$ فان $f$ قابلة للاشتقاق عن يمين $x=0$.

لكن $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ وعليه $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

**نظرية 5−2.** *إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة $a$ وكان $f'(a)=\lambda$، فإنها مستمرة عند هذه النقطة.* [3]

---

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 3, pp. 113-114.
[2] Ibid. Proposition 2, p. 114.

[3] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. قضية 2، ص. 230.

### 1-2- قابلية اشتقاق دالة على مجال

#### 1-2-1- قابلية اشتقاق دالة على مجال مفتوح

**تعريف 5-3.** *لتكن $f$ دالة معرفة على مجال (أو اتحاد مجالات) مفتوح $I$ من $R$. نقول أن $f$ قابلة للاشتقاق على $I$، إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من $I$.*[1]

#### 1-2-2- قابلية اشتقاق دالة على مجال مغلق

**تعريف 5-4**

- *نقول عن دالة $f$ أنها قابلة للاشتقاق على $[a,b]$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ وقابلة للاشتقاق عن يمين $a$ وعن يسار $b$.*
- *نقول عن دالة $f$ أنها قابلة للاشتقاق على $[a,+\infty[$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a,+\infty[$ وقابلة للاشتقاق عن يمين $a$.*
- *نقول عن دالة $f$ أنها قابلة للاشتقاق على $]-\infty,b]$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]-\infty,b[$ وقابلة للاشتقاق عن يسار $b$.*[2]

**أمثلة 5-3.** لتكن

$$f : R_+ \to R$$
$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$

لدينا $D_f = [0,+\infty[$، لندرس قابلية اشتقاق $f$ عند $x=0$. لدينا

حالة عدم التعيين $\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{0}{0}$

لنُزِل حالة عدم التعيين

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{0^+} = +\infty\end{aligned}$$

بما أن $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ غير منتهية فان $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ وعليه $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

### 2- الدالة المشتقة

**تعريف 5-5.** *إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$، نعرف دالتها المشتقة $f'$ ب*

$$f' : I \to R$$
$$x \mapsto f'(x)$$

*ونسميها اختصارا مشتقة $f$ عوضا عن الدالة المشتقة ل $f$ ويرمز لها بأحد الرموز*

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 1، ص. 231.

[2] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 5, p. 115.

$$f' \quad \frac{df}{dx} \quad \frac{d}{dx}[f(x)] \quad D_x[f(x)]$$ [1]

**أمثلة 5-4**

1) لتكن

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = 3x + 5$$

ومنه

$$f' : R \to R$$
$$x \mapsto f'(x) = 3$$

2) لتكن

$$g : R_+ \to R$$
$$x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$$

ومنه

$$g' : R_+^* \to R$$
$$x \mapsto g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**تعريف 5-6**

- *إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ من $R$ وكانت دالتها المشتقة $f'$ قابلة للاشتقاق هي الأخرى على $I$، فإننا نقول أن $f$ قابلة للاشتقاق مرتين على $I$ ونرمز ب $f''$ للمشتقة الثانية أو مشتقة $f$ من الرتبة 2.* [2]
- *وتعرف بصفة عامة مشتقة $f$ من الرتبة $n$ إذا كانت موجودة ونرمز لها ب $f^{(n)}$ أو $\frac{d^n f}{dx^n}$ ، بعلاقة تراجعية*

$$f^{(1)} = f', \ f^{(2)} = f'', \ f^{(3)} = f''', \ldots, f^{(n)} = \left[ f^{(n-1)} \right]', \quad n \in N^*$$

مع $f^{(0)} = f$. [3]

**أمثلة 5-5.** لتكن

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 + 1$$

لدينا $f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2, \quad f^{(n)} = 0, \quad n \geq 3$

**2-1- عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق**

**نظرية 5-3.** *لتكن $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق عند نقطة $a$. الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند $a$ ومشتقاتها كالآتي:*

---

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 6, p. 115.

[2] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 2، ص ص. 234-235.

[3] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 8, p. 116.

1) $\forall \alpha, \beta \in R : (\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$

2) $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$

3) $(f(a) \neq 0)$ $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{[f(a)]^2}$

4) $(g(a) \neq 0)$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{[g(a)]^2}$

5) $\left[f^n(a)\right]' = nf^{n-1}(a).f'(a)$

6) $(f^{n+1}(a) \neq 0,\ f^n(a) \neq 0)$ $\left(\frac{1}{f^n}\right)'(a) = -\frac{nf'(a)}{f^{n+1}(a)}$ (بتصرف).[1]

7) $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$

8) $(b = f(a))$ $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$ [2]

**2-2- مشتقات الدوال المألوفة**

الجدول التالي يمثل مشتقات بعض الدوال المألوفة.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $k / k \in R$ | $0$ |
| $x$ | $1$ |
| $kx$ | $k$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ |

***جدول 5-1- مشتقات الدوال المألوفة*** [3]

[1] Edward T Dowling. Idem, pp. 38-39.
[2] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Propositions 5 et 6, pp. 117-118.
[3] Ibid, p. 119.

**أمثلة 5-6**

1) $\left(1+3x^2+2x\right)'=6x+2$

2) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\sqrt{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $\left[(3x-4)(5x+2)\right]'=3(5x+2)+5(3x-4)=30x-14$

4) $\left(\frac{2x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{6x^2\left(x^2-1\right)-2x\left(2x^3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^4-6x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$

5) $\left[\left(x^3+1\right)^5\right]'=5\left(3x^2\right)\left(x^3+1\right)^4=15x^2\left(x^3+1\right)^4$

6) $\left[\frac{1}{(4x-6)^2}\right]'=\frac{-2(4)}{(4x-6)^3}=\frac{-8}{(4x-6)^3}$

7) $\left(\sqrt{x^3-7}\right)'=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-7}}$

8) $\left[\sin\left(x^2+\pi\right)\right]'=2x\cos\left(x^2+\pi\right)$

9) $\left[\ln\left(x^4+x\right)\right]'=\frac{4x^3+1}{x^4+x}$

10) $\left(e^{5x^3+4x}\right)'=\left(15x^2+4\right)e^{5x^3+4x}$

## 3- تطبيقات الاشتقاق

### 3-1- قاعدة لوبيتال (L'Hôpital's Rule)

**نظرية 5-4.** *لتكن $f$ و $g$ دالتين مستمرتين وقابلتين للاشتقاق على مجال مفتوح $I\subset R$، $a\in I$ و $g(x)\neq 0$ من أجل $x\neq a$.*

*إذا كان* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ *أو* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ *وكان* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$ *فان*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$$ [(1)]

**ملاحظة 5-1.** يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال في الحالات التالية: $a=\pm\infty$ و $\lambda=\pm\infty$، كما يمكن تطبيقها أكثر من مرة لإزالة حالة عدم التعيين.[(2)]

**أمثلة 5-7**

1) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$

بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Proposition 9, p. 125.
(2) Ibid, pp. 125-126.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

2) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$

بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1}$$
$$=\lim_{x\to0}\cos x=1$$

3) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{0}{0}$

بتطبيق قاعدة لوبيتال مرتين، نجد

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

### 3-2- القيم الحدية لدالة (Extreme values of a function)

**نظرية 5-5.** *لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $I$ من $R$ و $a\in I$.*

- *إذا كان $f'(a)=0$ و $f''(a)>0$ فان $f$ تقبل قيمة حدية محلية صغرى $f(a)$ عند $a$.*
- *إذا كان $f'(a)=0$ و $f''(a)<0$ فان $f$ تقبل قيمة حدية محلية عظمى $f(a)$ عند $a$.*
- *إذا كان $f'(a)=0$ و $f''(a)=0$ فلا يمكن استنتاج قيم حدية ل $f$.*[(1)]

**أمثلة 5-8.** لنجد القيم الحدية للدوال التالية

1) $f(x)=x^3$

$f$ قابلة للاشتقاق مرتين على $R$، بحيث $\forall x\in R: f'(x)=3x^2$

لنحل المعادلة

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

ومنه $x=0$ قيمة حرجة للدالة $f$ . لدينا

$$\forall x\in R: f''(x)=6x$$

و $f''(0)=0$ وعليه لا يمكن استنتاج قيم حدية ل $f$ .

2) $g(x)=-2x^2+1$

$g$ قابلة للاشتقاق مرتين على $R$، بحيث $\forall x\in R: g'(x)=-4x$

---

(1) Edward T Dowling. Idem, p. 60.

لنحل المعادلة

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow -4x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

ومنه $x=0$ قيمة حرجة للدالة $g$. لدينا

$$\forall x\in R: g''(x)=-4<0$$

وعليه $g$ تقبل قيمة حدية عظمى $g(0)=1$ من أجل $x=0$.

3) $h(x)=x^2-x$

$h$ قابلة للاشتقاق مرتين على $R$، بحيث $\forall x\in R: h'(x)=2x-1$

لنحل المعادلة

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

ومنه $x=\frac{1}{2}$ قيمة حرجة للدالة $h$. لدينا

$$\forall x\in R: h''(x)=2>0$$

وعليه $h$ تقبل قيمة حدية صغرى $h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ من أجل $x=\frac{1}{2}$.

### 3-3- الحساب الحدي في الاقتصاد

الحساب الحدي في الاقتصاد هو نسبة التغير في متغير بالنسبة لتغير طفيف في متغير آخر، فمثلا، تعرف التكلفة الحدية على أنها التغير في التكلفة الكلية الناجم عن إنتاج وحدة واحدة إضافية وللتعرف أكثر على تطبيقات الاشتقاق في الاقتصاد، نلخص بعض المصطلحات والقوانين الاقتصادية في الجدول التالي.

| المصطلح | الرمز | القانون |
|---|---|---|
| *التكلفة الكلية (Total Cost)* | $TC$ | – |
| *الإيراد الكلي (Total Revenue)* | $TR$ | $TR=PQ$ حيث $P$ السعر و $Q$ الكمية |
| *الربح الكلي (Total Profit)* | $TP$ | $TP=TR-TC$ |
| *التكلفة الحدية (Marginal Cost)* | $MC$ | $MC=\frac{dTC}{dQ}$ |
| *الإيراد الحدي (Marginal Revenue)* | $MR$ | $MR=\frac{dTR}{dQ}$ |
| *الربح الحدي (Marginal Profit)* | $MP$ | $MP=MR-MC$ أو $MP=\frac{dTP}{dQ}$ |

***جدول 5-2- رموز وقوانين الحساب الحدي في الاقتصاد (بتصرف)*** [1]

### أمثلة 5-9

1) في مؤسسة ما، يعطى الإيراد الكلي والتكلفة الكلية بالعلاقتين التاليتين

$$TC(Q)=Q^3-2Q^2+420Q+750 \quad و \quad TR(Q)=3300Q-26Q^2$$

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص.195.

- لنجد الكمية المطلوب إنتاجها لتعظيم الربح الكلي.
- لنجد دالة الربح الكلي $TP(Q)$

لدينا

$$\begin{aligned}TP(Q) &= TR(Q) - TC(Q)\\ &= \left(3300Q - 26Q^2\right) - \left(Q^3 - 2Q^2 + 420Q + 750\right)\\ &= -Q^3 - 24Q^2 + 2880Q - 750\end{aligned}$$

لإيجاد الكمية التي تعظم الربح الكلي، نبحث عن القيم الحدية للدالة $TP(Q)$. لدينا

$$\begin{aligned}MP(Q) &= \frac{dTP}{dQ}(Q)\\ &= -3Q^2 - 48Q + 2880\end{aligned}$$

نحل المعادلة

$$\begin{aligned}MP(Q) = 0 &\Leftrightarrow -3Q^2 - 48Q + 2880 = 0\\ &\Leftrightarrow -3(Q-24)(Q+40) = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Q = 24\\ Q = -40\end{cases}\end{aligned}$$

ومنه القيم الحرجة ل $TP$هي $Q = 24$ و $Q = -40$(مرفوضة، لأن $Q \geq 0$) ولدينا

$$\frac{dMP}{dQ}(Q) = -6Q - 48$$

وعليه

$$\frac{dMP}{dQ}(24) = -6(24) - 48 = -192 < 0$$

ومنه دالة الربح الكلي $TP$ تقبل قيمة حدية عظمى $TP(24) = 40,722$ من أجل $Q = 24$، أي، أعظم ربح للمؤسسة هو $40,722$ وحدة نقدية من أجل إنتاج $24$ وحدة.

2) إذا كان الدخل الكلي لبيع كمية من القمح بالطن معطى بالعلاقة

$$TR(Q) = Q^2 + 20Q + 4$$

- لنحسب الدخل الحدي الناتج عن بيع $10$ طن.
- لنحسب الدخل الحدي $MR$. لدينا

$$\begin{aligned}MR(Q) &= \frac{dTR}{dQ}(Q)\\ &= 2Q + 20\end{aligned}$$

وعليه الدخل الحدي عند بيع طن $Q = 10$ هو وحدة نقدية $MR(10) = 2(10) + 20 = 40$.

## 4- تمارين

### 4-1- تمارين محلولة

**تمرين 5-1.** أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية على $R$.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \qquad g(x)=x^2+|x-2|$$

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \qquad k(x)=\begin{cases} 2x+1; & x<3\\ x+4; & 3\leq x<6\\ \frac{1}{2}x^2-5x+22; & x\geq 6\end{cases}$$

**الحل**

1) لدينا

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$f$ قابلة للاشتقاق على $R^*$. لندرس قابلية اشتقاق $f$ عند $x=0$.

لدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$ غير موجودة

ومنه $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$. إذا $f$ قابلة للاشتقاق على $R^*$.

2) لدينا

$$g(x)=x^2+|x-2|=\begin{cases} x^2+x-2, & x\geq 2\\ x^2-x+2, & x<2\end{cases}$$

$g$ قابلة للاشتقاق على $R-\{2\}$. لندرس قابلية اشتقاق $g$ عند $x=2$.

لدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x\gneqq 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}&=\lim_{x\gneqq 2}\frac{\left(x^2+x-2\right)-4}{x-2}\\ &=\lim_{x\gneqq 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}\\ &=\lim_{x\gneqq 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}\\ &=\lim_{x\gneqq 2}x+3\\ &=5=g'_+(2)\end{aligned}$$

ومنه $g$ قابلة للاشتقاق عن يمين $x=2$.

ولدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x\leq 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}&=\lim_{x\leq 2}\frac{\left(x^2-x+2\right)-4}{x-2}\\&=\lim_{x\leq 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}\\&=\lim_{x\leq 2}\frac{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{x-2}\\&=\lim_{x<2}x+1\\&=3=g'_-(2)\end{aligned}$$

ومنه $g$ قابلة للاشتقاق عن يسار $x=2$ .

نلاحظ أن $g'_+(2)\neq g'_-(2)$ ومنه $g$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$ . إذا قابلة للاشتقاق على $R-\{2\}$ .

3) لدينا

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$h$ قابلة للاشتقاق على $R^*$ . لندرس قابلية اشتقاق $h$ عند $x=0$ .

لدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\frac{1}{2}=h'(0)\end{aligned}$$

ومنه $h$ قابلة للاشتقاق عند $x=0$ . إذا $h$ قابلة للاشتقاق على $R$ .

4) لدينا

$$k\left(x\right)=\begin{cases}2x+1; & x<3\\ x+4; & 3\leq x<6\\ \frac{1}{2}x^2-5x+22; & x\geq 6\end{cases}$$

$k$ قابلة للاشتقاق على $R-\{3;6\}$ . لندرس قابلية اشتقاق $k$ عند $x=3$ و $x=6$ .

- من أجل $x=3$ . لدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x \gtrless 3}\frac{k(x)-k(3)}{x-3} &= \lim_{x \gtrless 3}\frac{(x+4)-7}{x-3}\\ &= \lim_{x \gtrless 3}\frac{x-3}{x-3}\\ &= 1 = k'_+(3)\end{aligned}$$

ومنه $k$ قابلة للاشتقاق عن يمين $x=3$ .

ولدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x \lesssim 3}\frac{k(x)-k(2)}{x-3} &= \lim_{x \lesssim 3}\frac{(2x+1)-7}{x-3}\\ &= \lim_{x \lesssim 3}\frac{2x-6}{x-3}\\ &= \lim_{x \lesssim 3}\frac{2(x-3)}{x-3}\\ &= 2 = k'_-(3)\end{aligned}$$

ومنه $k$ قابلة للاشتقاق عن يسار $x=3$ .

نلاحظ أن $k'_+(3) \neq k'_-(3)$ ومنه $k$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$ .

- من أجل $x=6$ . لدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x \gtrless 6}\frac{k(x)-k(6)}{x-6} &= \lim_{x \gtrless 6}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2-5x+22\right)-10}{x-6}\\ &= \lim_{x \gtrless 6}\frac{\frac{1}{2}x^2-5x+12}{x-6}\\ &= \lim_{x \gtrless 6}\frac{\frac{1}{2}(x-6)(x-4)}{x-6}\\ &= \lim_{x \gtrless 6}\frac{1}{2}(x-4)\\ &= 1 = k'_+(6)\end{aligned}$$

ومنه $k$ قابلة للاشتقاق عن يمين $x=6$ .

ولدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x \lesssim 6}\frac{k(x)-k(6)}{x-6} &= \lim_{x \lesssim 6}\frac{(x+4)-10}{x-6}\\ &= \lim_{x \lesssim 6}\frac{x-6}{x-6}\\ &= 1 = k'_-(6)\end{aligned}$$

ومنه $k$ قابلة للاشتقاق عن يسار $x=6$ .

نلاحظ أن $k'_+(6) = k'_-(6)$ ومنه $k$ قابلة للاشتقاق عند $x=6$ . إذا $k$ قابلة للاشتقاق على $R-\{3\}$ .

**تمرين 5−2.** أوجد مشتقات الدوال التالية

$$2+\frac{1}{x}+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (3x-5)^4 \qquad \sqrt{\sin(3x)} \qquad \sqrt{x}\cos x$$

$$\frac{\cos(4x)-2}{x^2+5x} \qquad \frac{1}{\sin(x^2)} \qquad \frac{1}{(4-5x)^3} \qquad \frac{1}{x-1}\left(1+\sqrt{x}\right)$$

**الحل**

$$\left[2+\frac{1}{x}+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x^{3/2}}$$

$$\left[(3x-5)^4\right]'=12(3x-5)^3$$

$$\left[\sqrt{\sin(3x)}\right]'=\frac{3\cos(3x)}{2\sqrt{\sin(3x)}}$$

$$\left[\sqrt{x}\cos x\right]'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x-\sqrt{x}\sin x$$

$$\left[\frac{\cos(4x)-2}{x^2+5x}\right]'=\frac{(-4\sin(4x))\left(x^2+5x\right)-(\cos(4x)-2)(2x+5)}{\left(x^2+5x\right)^2}$$

$$\left[\frac{1}{\sin\left(x^2\right)}\right]'=-\frac{2x\cos\left(x^2\right)}{\sin^2\left(x^2\right)}$$

$$\left[\frac{1}{(4-5x)^3}\right]'=\frac{15}{(4-5x)^4}$$

$$\left[\frac{1}{x-1}\left(1+\sqrt{x}\right)\right]'=\frac{-1}{(x-1)^2}\left(1+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{2\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}$$

**تمرين 5−3.** أوجد مشتقات الدوال التالية

$$2x^3+x^4-5 \qquad \frac{3}{5x+1}+\frac{1}{x}-6\sqrt{x} \qquad (4x-1)\left(x^2+7\right)$$

$$\frac{x^2}{x^3-7} \qquad (5x+2)^4 \qquad \frac{1}{\left(x^2+3\right)^5}$$

$$\sqrt{5x^3-x} \qquad \ln\left(x^2-6\right) \qquad e^{3x-4}$$

**الحل.** إيجاد مشتقات الدوال التالية

$$\left(2x^3+x^4-5\right)'=6x^2+4x^3$$

$$\left(\frac{3}{5x+1}+\frac{1}{x}-6\sqrt{x}\right)'=3\frac{-5}{(5x+1)^2}-\frac{1}{x^2}-6\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-15}{(5x+1)^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\left[(4x-1)\left(x^2+7\right)\right]'=4\left(x^2+7\right)+(2x)(4x-1)=12x^2-2x+28$$

$$\left(\frac{x^2}{x^3-7}\right)' = \frac{2x\left(x^3-7\right)-3x^2\left(x^2\right)}{\left(x^3-7\right)^2} = \frac{-x^4-14x}{\left(x^3-7\right)^2}$$

$$\left(\left(5x+2\right)^4\right)' = 4\left(5\right)\left(5x+2\right)^3 = 20\left(5x+2\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{\left(x^2+3\right)^5}\right)' = -\frac{5\left(2x\right)}{\left(x^2+3\right)^6} = \frac{-10x}{\left(x^2+3\right)^6}$$

$$\left(\sqrt{5x^3-x}\right)' = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-x}}$$

$$\left(\ln\left(x^2-6\right)\right)' = \frac{2x}{x^2-6}$$

$$\left(e^{3x-4}\right)' = 3e^{3x-4}$$

**تمرين 5−4.** أوجد المشتقات المتتابعة من الرتبة $n$ للدوال التالية

$$f(x) = 3x^5-2x+7 \qquad g(x) = \frac{1}{x};\quad x \neq 0$$

$$h(x) = \left(2x-1\right)^4 \qquad j(x) = e^x$$

**الحل.** إيجاد المشتقات المتتابعة من الرتبة $n$ للدوال التالية

1) $f(x) = 3x^5-2x+7$

$$f^{(0)}(x) = f(x) \qquad f^{(1)}(x) = 15x^4-2$$

$$f^{(2)}(x) = 60x^3 \qquad f^{(3)}(x) = 180x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 360x \qquad f^{(5)}(x) = 360$$

$$f^{(6)}(x) = 0 \qquad \forall n \geq 6 : f^{(n)}(x) = 0$$

2) $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1};\quad x \neq 0$

$$g^{(0)}(x) = g(x)$$

$$g^{(1)}(x) = -x^{-2} = \left(-1\right)^1 .1!x^{-(1+1)}$$

$$g^{(2)}(x) = 2x^{-3} = \left(-1\right)^2 .2!x^{-(2+1)}$$

$$g^{(3)}(x) = -6x^{-4} = \left(-1\right)^3 .3!x^{-(3+1)}$$

$$g^{(4)}(x) = 24x^{-5} = \left(-1\right)^4 .4!x^{-(4+1)}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(x) = \left(-1\right)^n .n!x^{-(n+1)}$$

إذا $\forall n \geq 1 : g^{(n)}(x) = \dfrac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$

3) $h(x)=\left(2x-1\right)^4$

$$h^{(0)}(x)=h(x) \qquad h^{(1)}(x)=8\left(2x-1\right)^3$$
$$h^{(2)}(x)=24\left(2x-1\right)^2 \qquad h^{(3)}(x)=48\left(2x-1\right)$$
$$h^{(4)}(x)=96 \qquad h^{(5)}(x)=0$$
$$\forall n\geq 5: h^{(n)}(x)=0$$

4) $j(x)=e^x$

$$j^{(0)}(x)=j(x)$$
$$j^{(1)}(x)=e^x=j^{(2)}(x)=...=j^{(n)}(x)$$

إذا $\forall n\geq 0: j^{(n)}(x)=e^x$

**تمرين 5−5.** باستعمال قاعدة لوبيتال، أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}+x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^5-1} \qquad \lim_{x\geqq 0}x\ln x \qquad \lim_{x\to -\infty}xe^x$$

**الحل**

1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين. بتطبيق قاعدة لوبيتال مرتين، نجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين. بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين. بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{1}=1$$

4) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}+x}{x^2}=\frac{+\infty}{+\infty}$ . بتطبيق قاعدة لوبيتال مرتين، نجد

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}+x}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^{2x}+1}{2x}$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{4e^{2x}}{2}$$
$$=\lim_{x\to +\infty}2e^{2x}=+\infty$$

5) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^5-1}=\frac{0}{0}$ . بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^5-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{5x^4}=\frac{1}{5}$$

6) حالة عدم التعيين $\lim_{x\gneq0}x\ln x=0.-\infty$ . بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\begin{aligned}\lim_{x\gneq0}x\ln x&=\lim_{x\gneq0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\gneq0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\gneq0}-x=0\end{aligned}$$

7) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to-\infty}xe^x=-\infty.0$ . بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}xe^x&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}\\&=\lim_{x\to-\infty}-e^x=0\end{aligned}$$

**تمرين 5-6.** أوجد القيم الحدية للدوال التالية

$$f(x)=3x-4x^2 \qquad g(x)=\frac{x}{x^2+1} \qquad h(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+2$$

**الحل**

1) من أجل $f(x)=3x-4x^2$

لدينا $\forall x\in R: f'(x)=-8x+3$ وعليه

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -8x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{8}$$

ومنه $x=\frac{3}{8}$ قيمة حرجة للدالة $f$ . لدينا

$$\forall x\in R: f''(x)=-8<0$$

إذا $f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{16}$ قيمة حدية عظمى للدالة $f$ .

2) من أجل $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$

لدينا $\forall x\in R: g'(x)=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$ وعليه

$$\begin{aligned}g'(x)=0&\Leftrightarrow\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0\\&\Leftrightarrow -x^2+1=0\\&\Leftrightarrow x=\pm1\end{aligned}$$

ومنه $x=-1$ و $x=1$ قيمتان حرجتان للدالة $g$ . لدينا

$$\forall x \in R : g''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

بما أن $g''(-1) = \frac{1}{2} > 0$ فان $g(-1) = -\frac{1}{2}$ قيمة حدية صغرى ل $g$ .

بما أن $g''(1) = -\frac{1}{2} < 0$ فان $g(1) = \frac{1}{2}$ قيمة حدية عظمى ل $g$ .

3) من أجل $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2$

لدينا $\forall x \in R : h'(x) = x^2 - 2x + 1 = \left(x-1\right)^2$ وعليه

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

ومنه $x = 1$ قيمة حرجة للدالة $h$ . لدينا

$$\forall x \in R : h''(x) = 2x - 2$$

بما أن $h''(1) = 0$ فلا يمكن استنتاج قيم حدية ل $h$ .

**تمرين 5−7**. إذا كانت دالة الطلب معطاة على الصورة

$$P = Q^2 - 4Q + 96$$

- أوجد الإيراد الحدي عند بيع الوحدة العاشرة.

**الحل**. لنجد دالة الإيراد الكلي $TR$

$$\begin{aligned} TR\left(Q\right) &= PQ = \left(Q^2 - 4Q + 96\right)Q \\ &= Q^3 - 4Q^2 + 96Q \end{aligned}$$

وعليه دالة الإيراد الحدي $MR$

$$MR\left(Q\right) = \frac{dTR}{dQ}\left(Q\right) = 3Q^2 - 8Q + 96$$

ومنه الإيراد الحدي عند $Q = 10$

$$MR(10) = 3(10)^2 - 8(10) + 96 = 316 \quad \text{وحدة نقدية}$$

**تمرين 5−8**. مصنع لتجميع الثلاجات يحتاج $Q$ وحدة من إنتاج معين للتشغيل، فإذا كانت تكلفة عمل الطلبيات السنوية تعطى بالعلاقة

$$TC(Q) = 800 + 4Q + \frac{6400}{Q}$$

- ما هي كمية الوحدات $Q$ لكي تكون التكلفة السنوية أقل ما يمكن؟

**الحل**. لإيجاد الكمية $Q$ التي من أجلها تكون التكلفة أقل ما يمكن، علينا أن نبحث عن القيم الحدية للدالة $TC$ . لدينا

$$MC(Q) = \frac{dTC(Q)}{dQ} = 4 - \frac{6400}{Q^2}$$

نحل المعادلة

$$MC(Q)=0 \Leftrightarrow 4-\frac{6400}{Q^2}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4Q^2-6400}{Q^2}=0$$
$$\Leftrightarrow 4Q^2-6400=0$$
$$\Leftrightarrow Q^2=1600$$
$$\Leftrightarrow Q=\pm 40$$

ومنه القيم الحرجة ل $TC$ هي $Q=40$ و $Q=-40$ (مرفوضة، لأن $Q\geq 0$) ولدينا

$$\frac{dMC}{dQ}(Q)=\frac{12800}{Q^3}$$

وعليه

$$\frac{dMC}{dQ}(40)=\frac{12800}{40^3}=\frac{1}{5}>0$$

ومنه دالة التكلفة الكلية $TC$ تقبل قيمة حدية صغرى $TC(10)=1120$ من أجل $Q=40$، أي، أقل تكلفة للمصنع هي 1120 وحدة نقدية من أجل إنتاج 40 وحدة.

**تمرين 5–9.** تعطى دالة الإيراد الكلي لشركة ما بالعلاقة التالية

$$TR(Q)=-Q^3-30Q^2+7200Q-400 \quad \text{وحدة نقدية}$$

– أوجد عدد الوحدات الواجب بيعها حتى يكون الإيراد الكلي أكبر ما يمكن.

**الحل.** لإيجاد الكمية $Q$ التي من أجلها يكون الإيراد الكلي أكبر ما يمكن، علينا إيجاد القيم الحدية للدالة $TR$.

لنجد دالة الإيراد الحدي $MR$. لدينا

$$MR(Q)=\frac{dTR(Q)}{dQ}=-3Q^2-60Q+7200$$

نحل المعادلة

$$MR(Q)=0 \Leftrightarrow -3Q^2-60Q+7200=0$$
$$\Leftrightarrow -3(Q-40)(Q+60)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q-40=0 \\ Q+60=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q=40 \\ Q=-60 \end{cases}$$

ومنه القيم الحرجة ل $TR$ هي $Q=40$ و $Q=-60$ (مرفوضة، لأن $Q\geq 0$) ولدينا

$$\frac{dMR}{dQ}(Q)=-6Q-60$$

وعليه

$$\frac{dMR}{dQ}(40)=-300<0$$

ومنه دالة الإيراد الكلي $TR$ تقبل قيمة حدية عظمى $TR(40)=175600$ من أجل $Q=40$، أي، على الشركة بيع 40 وحدة للحصول على أعلى إيراد كلي وهو 175600 وحدة نقدية.

**تمرين 5−10.** في مصنع ما، تعطى دالة التكاليف الكلية بالعلاقة التالية

$$TC(Q)=Q^3+105Q^2-2400Q+800 \quad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد التكلفة الحدية عند إنتاج $Q=20$ وحدة.

**الحل.** إيجاد دالة التكلفة الحدية $MC$

$$MC(Q)=\frac{dTC}{dQ}(Q)=3Q^2+210Q-2400$$

ومنه التكلفة الحدية عند $Q=20$

$$MC(20)=3(20)^2+210(20)-2400=3000 \quad \text{وحدة نقدية}$$

ومنه التكلفة الحدية عند إنتاج 20 وحدة هي 3000 وحدة نقدية، أي الوحدة الإضافية (الوحدة رقم 21) تكلف المصنع 3000 وحدة نقدية.

## 4−2− تمارين للحل

### تمرين 5−11

1) أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية على $R$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} x^3-x-4, & x\leq 1 \\ \dfrac{x-5}{x}, & x>1 \end{cases} \qquad k(x)=\frac{|x|}{1+x^2}$$

2) عين قيمة العدد الحقيقي $a$ حتى تكون الدالة $L$ قابلة للاشتقاق على $R$، بحيث

$$L(x)=\begin{cases} ax+1, & x\leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}$$

**تمرين 5−12.** أوجد مشتقات الدوال التالية

$$\left(2x^2+1\right)\sqrt{3x-2} \qquad \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2 \qquad x-\sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{\cos x}{1-\sin(4x)} \qquad \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

**تمرين 5−13.** باستعمال قاعدة لوبيتال، أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+3x}$$

**تمرين 5−14.** أوجد القيم الحدية للدوال التالية

$$f(x)=x\left|x^2-1\right| \qquad g(x)=\frac{x}{x-2} \qquad h(x)=-5x^2$$

**تمرين 5−15.** إذا كانت دالة التكلفة الكلية

$$TC(Q)=Q^3-4Q^2+75$$

- أوجد كمية الإنتاج اللازمة لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

**تمرين 5−16.** ينتج مصنع شهريا $(x)$ وحدة من بضاعة معينة ويبيع الوحدة الواحدة بمقدار $(y)$ دينار، إذا كانت كلفة الإنتاج لهذه الوحدات هي

$$\frac{1}{5}x^2+15x+500 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

وكانت العلاقة بين $x$ و $y$ هي $5x=381-y$.

- أوجد كمية الإنتاج اللازمة حتى يكون الربح أكبر ما يمكن.

# الفصل السادس

# الدوال الأسية

# والدوال اللوغاريتمية

للدوال الأسية واللوغاريتمية تطبيقات عدة في الاقتصاد، فهي تستخدم لنمذجة بعض الظواهر التي تدرس حالات النمو والانكماش لمتغير اقتصادي، فإذا كان النمو بطيئا، نستخدم الدالة اللوغاريتمية، أما إن كان سريعا جدا فنلجأ للدالة الأسية. كلا الدالتين لهما قوانين وقواعد بسيطة ومتشابهة فيما بينها.

## 1- الدالة الأسية

**تعريف 6-1**. *تسمى الدالة التي تكتب بالصيغة*

$$y = f(x) = a^x = \exp_a(x)$$

*بالدالة الأسية، حيث الأساس الثابت $a$ عدد حقيقي، $a > 0$ و $a \neq 1$ والأس $x$ متغير.*[(1)]

*تتميز الدوال الأسية بالخصائص التالية*

- مجموعة تعريف $f$ هي $R$ وتأخذ صورها في $R_+^*$.
- *إذا كان* $a > 1$ *فان الدالة متزايدة وإذا كان* $0 < a < 1$ *فان الدالة متناقصة.*
- عند $x = 0$ فان $f(x) = 1$ مستقلة عن الأساس.[(2)]

**أمثلة 6-1**

1) إذا كان $f(x) = 4^x$ فان

$$f(-2) = 4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$f(-1) = 4^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 4^0 = 1$$

$$f(3) = 4^3 = 64$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

2) إذا كان $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ فان

$$g(-4) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1^{-4}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{1^4} = 3^4 = 81$$

$$g(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$g(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

---

(1) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. *الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية*. ط *2*. دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2010. تعريف 5-1، ص. 217.

(2) Edward T Dowling. Idem, p. 146.

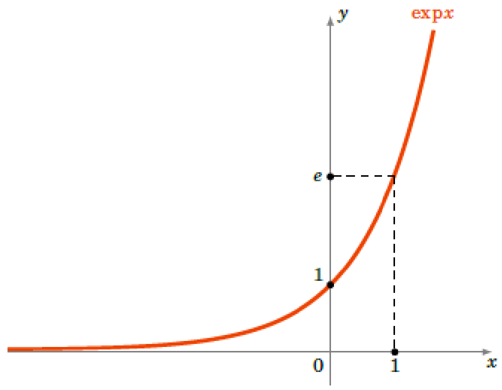
$$g(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$$

**- الدالة الأسية الطبيعية**

**تعريف 6-2.** *الدوال الأسية التي أساسها العدد غير النسبي* $e\simeq 2,71828...$ *تسمى الدوال الأسية الطبيعية* وتكتب

$$f(x)=e^x=\exp_e(x)$$ (1)

*وهي دوال مستمرة، موجبة تماما ومتزايدة تماما على* $R$*، بحيث* $e^0=1$ *و* $e^1=e$ *والشكل التالي يوضح ذلك*




***شكل 6-1- منحنى الدالة الأسية الطبيعية*** (2)

**-خواص الدالة الأسية الطبيعية**

**نظرية 6-1**

1) $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty,\quad \alpha\in Q_+^*$

5) $\lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x=0,\quad \alpha\in Q_+^*$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (3)

**نظرية 6-2.** *ليكن* $a$ *و* $b$ *عددين حقيقيين، لدينا*

1) $e^{a+b}=e^a.e^b$

2) $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$

3) $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$

4) $e^{qa}=\left(e^a\right)^q,\quad q\in Q$ (4)

---

(1) Edward T Dowling. Idem, p. 149.

(2) Stéphane Rossignol. *Mathématiques en économie- gestion.* Dunod, Paris, 2015. Propositions 5.12 et 5.13, p. 125.

(3) Ibid. Propositions 5.16 et 5.17, Théorème, pp. 128-129.

(4) Ibid. Proposition 5.14, p. 126.

**نظرية 6−3**

[1] $\forall x \in R : \left(e^{x}\right)' = e^{x}$ (1

[2] $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)},$ *قابلة للاشتقاق* $u$ (2

**أمثلة 6−2**

1) لنحسب مشتقات الدوال التالية

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$$

$$\left(e^{3x+\sin x}\right)' = \left(3+\cos x\right)e^{3x+\sin x}$$

$$\left(xe^{x}\right)' = 1\left(e^{x}\right)+x\left(e^{x}\right) = \left(1+x\right)e^{x}$$

$$\left(\frac{x-1}{e^{x}}\right)' = \frac{1\left(e^{x}\right)-\left(x-1\right)e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}} = \frac{\left(2-x\right)e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}} = \frac{2-x}{e^{x}}$$

$$\left(x^{3}+e^{x}\right)' = 3x^{2}+e^{x}$$

2) لنحسب النهايات التالية

أ) بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{3} = +\infty$$

أو بتطبيق النظرية 6−1 (2)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\frac{e^{x}}{x} = +\infty$$

ب) بتطبيق قاعدة لوبيتال مرتين

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-1}{x^{2}} = \lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{e^{x}}{2} = \frac{1}{2}$$

أو بتطبيق قاعدة لوبيتال مرة واحدة والنظرية 6−1 (6)

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-1}{x^{2}} = \lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{e^{x}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

ج) بتطبيق قاعدة لوبيتال مرتين

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^{2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{9e^{3x}}{2} = +\infty$$

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 5.16, p. 128.

(2) Ibid. Proposition 5.18, p. 129.

أو بتطبيق النظرية 6-1 (4)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$$

د) بتطبيق قاعدة لوبيتال
$$\lim_{x\to-\infty}5xe^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{e^{-2x}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{-2e^{-2x}}=0$$

أو بتطبيق النظرية 6-1 (3)
$$\lim_{x\to-\infty}5xe^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(5e^x\right)\left(xe^x\right)=0$$

## 2- الدالة اللوغاريتمية

**تعريف 6-3.** *تسمى الدالة العكسية للدالة الأسية $y=a^x$ التي تأخذ الصورة $x=a^y$ بالدالة اللوغاريتمية ونكتب*
$$y=f(x)=\log_a x,\quad a>0,\quad a\neq 1$$
*ونقرأ " لوغاريتم $x$ في الأساس $a$ يساوي $y$"*

- *إذا كانت قيمة الأساس $a=10$ فالدالة تسمى بدالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها ب $f(x)=\log_{10}x$ أو اختصارا ب $f(x)=\log x$ .*
- *أما إذا كانت قيمة الأساس $a=e$ فتسمى الدالة باللوغاريتم الطبيعي أو النيبيري ونرمز لها ب $f(x)=\log_e x$ أو اختصارا ب $f(x)=\ln x$ .*[1]

*وتتميز الدوال اللوغاريتمية بالخصائص التالية*

- *مجموعة تعريف $f$ هي $R_+^*$ وتأخذ صورها في $R$.*
- *إذا كان $a>1$ فان الدالة متزايدة وإذا كان $0<a<1$ فان الدالة متناقصة.*
- *عند $x=1$ فان $f(x)=0$ مستقلة عن الأساس.*[2]

### أمثلة 6-3

1) إذا كان $f(x)=\log_2 x$ ، فان
$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow 2^y=\frac{1}{4}\Rightarrow 2^y=\frac{1}{2^2}$$
$$\Rightarrow 2^y=2^{-2}\Rightarrow y=-2$$
$$f(1)=\log_2(1)\Rightarrow 2^y=1$$
$$\Rightarrow 2^y=2^0\Rightarrow y=0$$
$$f(8)=\log_2(8)\Rightarrow 2^y=8$$
$$\Rightarrow 2^y=2^3\Rightarrow y=3$$

2) إذا كان $g(x)=\log_{10}x=\log x$ ، فان
$$g\left(0.1\right)=\log_{10}\left(0.1\right)\Rightarrow 10^y=0.1$$
$$\Rightarrow 10^y=10^{-1}\Rightarrow y=-1$$

---
(1) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق. تعريفان 5-2 و 5-3، ص ص. 228-229.
(2) Edward T Dowling. Idem, p. 147.

$$g(10)=\log_{10}(10)\Rightarrow 10^{y}=10$$
$$\Rightarrow 10^{y}=10^{1}\Rightarrow y=1$$
$$g(1000)=\log_{10}(1000)\Rightarrow 10^{y}=1000$$
$$\Rightarrow 10^{y}=10^{3}\Rightarrow y=3$$

3) إذا كان $h(x)=\log_{e}x=\ln x$ ، فان

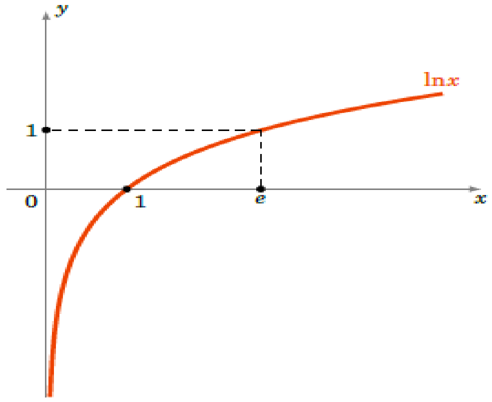
$$h\left(e^{-5}\right)=\log_{e}\left(e^{-5}\right)\Rightarrow e^{y}=e^{-5}\Rightarrow y=-5$$
$$h(1)=\log_{e}(1)\Rightarrow e^{y}=1$$
$$\Rightarrow e^{y}=e^{0}\Rightarrow y=0$$
$$h\left(e^{7}\right)=\log_{e}(e^{7})\Rightarrow e^{y}=e^{7}\Rightarrow y=7$$

**-الدالة اللوغاريتمية الطبيعية**

**تعريف 6-4.** *الدوال اللوغاريتمية التي أساسها العدد غير النسبي* $e\simeq 2.71828...$ *تسمى الدوال اللوغاريتمية الطبيعية وتكتب*

$$f(x)=\log_{e}x=\ln x$$ [1]

*وهي دوال مستمرة متزايدة تماما على* $]0,+\infty[$ *بحيث* $\ln(1)=0$ *و* $\ln(e)=1$ *والشكل التالي يوضح ذلك.*




***شكل 6-2- منحنى الدالة اللوغاريتمية الطبيعية*** [2]

**-خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية**

**نظرية 6-4**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\geq 0}\ln x=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

3) $\lim\limits_{x\geq 0}x\ln x=0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}}=0,\quad \alpha,\beta\in Q_{+}^{*}$

5) $\lim\limits_{x\geq 0}x^{\beta}\ln\left(x^{\alpha}\right)=0,\quad \alpha,\beta\in Q_{+}^{*}$ [3]

---

(1) Edward T Dowling. Idem, p. 149.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 5.8, p. 121.
(3) Ibid. Proposition 5.8, Théorème, pp. 121-123.

**نظرية 6−5.** *ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين موجبين تماما، لدينا*

*1)* $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

*2)* $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$

*3)* $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

*4)* $\ln(a^n)=n\ln a,\quad n\in Z$

*5)* $\ln(a^q)=q\ln a,\quad q\in Q$ [1]

**نظرية 6−6**

*1)* $\forall x\in\,]0,+\infty[\,:(\ln x)'=\frac{1}{x}$ [2]

*2)* $u$ *قابلة للاشتقاق* , $\left[\ln(u(x))\right]'=\frac{u'(x)}{u(x)}$ [3]

**أمثلة 6−4**

1) لنحسب مشتقات الدوال التالية

$$\left(x^3+\ln x\right)'=3x^2+\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}\left(x^2\ln x\right)'&=(2x)(\ln x)+x^2.\frac{1}{x}\\&=2x\ln x+x\\&=x(1+2\ln x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'&=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-1(\ln x)}{(x-1)^2}\\&=\frac{\frac{x-1-x\ln x}{x}}{(x-1)^2}\\&=\frac{x(1-\ln x)-1}{x(x-1)^2}\end{aligned}$$

$$\left[\ln\left(x^2-3x+2\right)\right]'=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

2) لنحسب النهايات التالية

أ) بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+x\frac{1}{x}}{2x}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1}{2x}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 5.7, p. 120.
(2) Ibid. Proposition 5.6, p. 119.
(3) Ibid. Proposition 5.11, p. 124.

ب) بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to+\infty} x-\ln x=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\frac{1}{x}}{1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

أو بتطبيق النظرية 6−4 (2) $\lim_{x\to+\infty} x-\ln x=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

ج) بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\gtrsim0} 3x\ln x=\lim_{x\gtrsim0} 3\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\gtrsim0} 3\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\gtrsim0} -3x=0$$

أو بتطبيق النظرية 6−4 (3) $\lim_{x\gtrsim0} 3x\ln x=\lim_{x\gtrsim0} 3\left(x\ln x\right)=0$

د) بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x\left(x^2+1\right)}=0$$

أو بتطبيق النظرية 6−4 (4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^3}=0$

هـ) بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\gtrsim0} 7x^4\ln\left(x^2\right)=\lim_{x\gtrsim0} 7\frac{\ln\left(x^2\right)}{\frac{1}{x^4}}$$
$$=\lim_{x\gtrsim0} 7\frac{\frac{2x}{x^2}}{-\frac{4}{x^5}}$$
$$=\lim_{x\gtrsim0} -\frac{7}{2}x^4=0$$

أو بتطبيق النظرية 6−4 (5) $\lim_{x\gtrsim0} 7x^4\ln\left(x^2\right)=\lim_{x\gtrsim0} 7\left[x^4\ln\left(x^2\right)\right]=0$

## 3− حل معادلات الدوال الأسية واللوغاريتمية

*لحل معادلات الدوال الأسية واللوغاريتمية، نستخدم خواص الدالتين إضافة لكون إحداهما معاكسة للأخرى، أي*

(1) $\ln\left(e^x\right)=x,\quad \forall x\in R$ و $e^{\ln x}=x,\quad \forall x>0$

*وكذا الخاصية*

(2) $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a},\quad x>0,\ a>0,\ a\neq1$

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 5.13, p. 125.
(2) Ibid. Définition 5.3, p. 124.

**أمثلة 6-5.** لنحل في $R$ المعادلات التالية

(1

$$\begin{aligned}3e^{x-1}=12 &\Leftrightarrow e^{x-1}=4\\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^{x-1}\right)=\ln 4\\ &\Leftrightarrow x-1=\ln 4\\ &\Leftrightarrow x=1+\ln 4\end{aligned}$$

إذا $S=\{1+\ln 4\}$

(2

$$\begin{aligned}\frac{e^{x}}{e^{2x-7}}=1 &\Leftrightarrow e^{x-(2x-7)}=1\\ &\Leftrightarrow e^{-x+7}=1\\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^{-x+7}\right)=\ln 1\\ &\Leftrightarrow -x+7=0\\ &\Leftrightarrow x=7\end{aligned}$$

إذا $S=\{7\}$

3) نحل المعادلة التالية في المجال $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}-4+5\ln x=11 &\Leftrightarrow \ln x=3\\ &\Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{3}\\ &\Leftrightarrow x=e^{3}\end{aligned}$$

بما أن $e^{3}\in\,]0,+\infty[$ فان $S=\{e^{3}\}$

4) لدينا المعادلة $\ln(2x)=\ln(x-2).......(1)$

الدالة $\ln(2x)$ معرفة على $]0,+\infty[$ (لأن $\ln(2x)$ معرفة $\Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$ ) والدالة $\ln(x-2)$ معرفة على $]2,+\infty[$ (لأن $\ln(x-2)$ معرفة $\Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ ) وعليه نحل المعادلة (1) في تقاطع مجموعتي تعريف الدالتين $\ln(2x)$ و $\ln(x-2)$ ، أي $]0,+\infty[\cap]2,+\infty[=]2,+\infty[$

وعليه نحل المعادلة (1) في المجال $]2,+\infty[$ ومنه

$$\begin{aligned}\ln(2x)=\ln(x-2) &\Leftrightarrow e^{\ln(2x)}=e^{\ln(x-2)}\\ &\Leftrightarrow 2x=x-2\\ &\Leftrightarrow x=-2\notin\,]2,+\infty[\end{aligned}$$

إذا $S=\varnothing$

# 4- تمارين

## 4-1- تمارين محلولة

**تمرين 6-1.** أوجد مشتقات الدوال التالية

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{e^{3x}} \qquad \left(\exp\{x^{2}+3\}\right)^{2} \qquad \ln\left(\sqrt{5x^{2}-4}\right) \qquad (x^{2}+1)e^{2x}$$

$$x\ln x-x \qquad \frac{1}{1+e^{-x}} \qquad \ln\left(\frac{2+\cos x}{3-4\sin x}\right)$$

**الحل**

$$\left[\left(x^2+1\right)e^{2x}\right]' = 2xe^{2x}+2\left(x^2+1\right)e^{2x} = 2e^{2x}\left(x^2+x+1\right)$$

$$\left[\ln\left(\sqrt{5x^2-4}\right)\right]' = \frac{\frac{10x}{2\sqrt{5x^2-4}}}{\sqrt{5x^2-4}} = \frac{10x}{2\left(5x^2-4\right)} = \frac{5x}{5x^2-4}$$

$$\left[\left(\exp\left\{x^2+3\right\}\right)^2\right]' = 2\left(2xe^{x^2+3}\right)e^{x^2+3} = 4xe^{2x^2+6}$$

$$\left[\frac{\sqrt{\ln x}}{e^{3x}}\right]' = \frac{\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}e^{3x}-3e^{3x}\sqrt{\ln x}}{\left(e^{3x}\right)^2} = \frac{1-6x\ln x}{2xe^{3x}\sqrt{\ln x}}$$

$$\left[\ln\left(\frac{2+\cos x}{3-4\sin x}\right)\right]' = \left[\ln\left(2+\cos x\right)-\ln\left(3-4\sin x\right)\right]'$$

$$= \frac{-\sin x}{2+\cos x}+\frac{4\cos x}{3-4\sin x}$$

$$\left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]' = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$\left[x\ln x - x\right]' = \ln x + x\frac{1}{x}-1 = \ln x$$

**تمرين 6−2.** أحسب مشتقات الدوال التالية

| | | |
|---|---|---|
| $x^2e^x$ | $\ln\left(x^4+1\right)$ | $e^{4x-1}$ |
| $\frac{1}{e^{-7x}}$ | $\sqrt{e^{2x}}$ | $\frac{x}{\ln x}$ |

**الحل.** حساب مشتقات الدوال التالية

$$\left(e^{4x-1}\right)' = 4e^{4x-1}$$

$$\left(\ln\left(x^4+1\right)\right)' = \frac{4x^3}{x^4+1}$$

$$\left(x^2e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x = \left(x^2+2x\right)e^x$$

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - x\frac{1}{x}}{\left(\ln x\right)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$\left(\sqrt{e^{2x}}\right)' = \left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(\frac{1}{e^{-7x}}\right)' = \left(e^{7x}\right)' = 7e^{7x}$$

**تمرين 6−3.** أحسب النهايات التالية

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\geq 0} x\ln x$ | $\lim\limits_{x\geq 0}\frac{\ln x}{x}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{x\ln x}$ | $\lim\limits_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$ |

$$\lim_{x\to-\infty} 2xe^x + x^2 \qquad \lim_{x\to-\infty} 3^x \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

**الحل**

$$\lim_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1} \overset{Hopital}{=} \lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{x\ln x} \overset{Hopital}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{1+\ln x}$$

$$\overset{Hopital}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 3xe^x = +\infty$$

$$\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\underset{>}{\to}0} x\ln x = \lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{Hopital}{=} \lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\underset{>}{\to}0} -x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2xe^x + x^2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}} + x^2$$

$$\overset{Hopital}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}} + x^2$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -2e^x + x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3^x = \lim_{x\to-\infty} e^{\ln\left(3^x\right)} = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln 3} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\exp\left\{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\} = e^{+\infty.0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\overset{Hopital}{=} \lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\right\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right\} = e$$

**تمرين 6−4.** أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{3x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}}{4x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x^3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\underset{>}{\to}0} x+\ln x \qquad \lim_{x\underset{>}{\to}0} x^2\ln x$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(3-x)}{3-x}$ $\lim\limits_{x\geq 0}\sqrt{x^3}\ln\left(x^7\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x^4}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(3-x)}{2x-4}$

**الحل.** حساب النهايات التالية

1) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{3x}=-\infty.0$ . لكن نعلم أن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{3x}=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}\left(xe^{x}\right)=0.0=0$$

أو بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-3x}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-3e^{-3x}}=0$$

2) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-e^{2x}}{4x}=\dfrac{-\infty}{+\infty}$ . لكن نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}}{4x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{e^{x}}{4}\left(\frac{e^{x}}{x}\right)=-\infty.+\infty=-\infty$$

3) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x^3}=\dfrac{0}{0}$ . لكن نعلم أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ ومنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}.\frac{e^{x}-1}{x}=+\infty.1=+\infty$$

4) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{5x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ . لكن نعلم أن $\alpha\in Q_{+}^{*}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}}=+\infty,$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{x^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} e^{4x}\left(\frac{e^{x}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=+\infty.+\infty=+\infty$$

5) $\lim\limits_{x\geq 0} x+\ln x=0-\infty=-\infty$

6) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\geq 0} x^2\ln x=0.-\infty$ . لكن نعلم أن $\lim\limits_{x\geq 0} x\ln x=0$ ومنه

$$\lim_{x\geq 0} x^2\ln x=\lim_{x\geq 0} x\left(x\ln x\right)=0.0=0$$

أو بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\geq 0} x^2\ln x=\lim_{x\geq 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\geq 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}$$
$$=\lim_{x\geq 0}-\frac{1}{2}x^2=0$$

7) حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(3-x)}{3-x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ . بوضع $y=3-x$ ونعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(3-x)}{3-x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0$$

8) حالة عدم التعيين $0.-\infty$ $\lim\limits_{x\geq 0}\sqrt{x^3}\ln\left(x^7\right)=0$. لكن نعلم أن $\alpha,\beta\in Q_+^*$ $\lim\limits_{x\geq 0}x^{\beta}\ln\left(x^{\alpha}\right)=0,$ ومنه

$$\lim_{x\geq 0}\sqrt{x^3}\ln\left(x^7\right)=\lim_{x\geq 0}x^{\frac{1}{3}}\ln\left(x^7\right)=0$$

9) حالة عدم التعيين $\frac{+\infty}{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x^4}$. لكن نعلم أن $\alpha,\beta\in Q_+^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}}=0,$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{x^4}=0$$

10) حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}$ . بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}e^{x}=1$$

11) حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{2x-4}$ . بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{2x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{-1}{3-x}}{2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2(3-x)}=-\frac{1}{2}$$

**تمرين 6-5.** حل في $R$ المعادلات والمتراجحات التالية

$\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$ $\qquad$ $e^{2x}+e^{x}=2$

$e^{x+1}+5=0$ $\qquad$ $e^{2x}+2e^{x}=3$ $\qquad$ $\ln x+\ln(2x-1)=0$

$e^{x-4}\geq 3$ $\qquad$ $\ln x+\ln(2x-1)<0$

**الحل**

1) $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$.......(1)

الدالة $\ln(x+3)$ معرفة على $]-3,+\infty[$ (لأن $\ln(x+3)$ معرفة $\Leftrightarrow x+3>0\Leftrightarrow x>-3$ ) والدالة $\ln(x+2)$ معرفة على $]-2,+\infty[$ (لأن $\ln(x+2)$ معرفة $\Leftrightarrow x+2>0\Leftrightarrow x>-2$ ) أما الدالة $\ln(x+11)$ فمعرفة على $]-11,+\infty[$ (لأن $\ln(x+11)$ معرفة $\Leftrightarrow x+11>0\Leftrightarrow x>-11$ ) وعليه نحل المعادلة (1) في تقاطع مجموعات تعريف الدوال الثلاث، أي $]-2,+\infty[\,\cap\,]-3,+\infty[\,\cap\,]-11,+\infty[\,=\,]-2,+\infty[$

وعليه نحل المعادلة (1) في المجال $]-2,+\infty[$ ومنه

$$(1)\Leftrightarrow \ln\left[(x+3)(x+2)\right]=\ln(x+11)$$
$$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)=x+11$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+5)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1\vee x=-5$$

$-5$ حل مرفوض لأن $-5\notin\,]-2;+\infty[$ وعليه $S=\{1\}$.

2) $e^{2x}+e^{x}=2$........(2)

لدينا $e^{2x}+e^{x}=2\Leftrightarrow\left(e^{x}\right)^2+e^{x}=2$ . نضع $y=e^{x}$ وعليه

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow y^2+y=2\\ &\Leftrightarrow y^2+y-2=0\\ &\Leftrightarrow (y-1)(y+2)=0\\ &\Leftrightarrow y=1 \vee y=-2\\ &\Leftrightarrow e^x=1 \vee e^x=-2\end{aligned}$$

لدينا $\forall x\in R: e^x>0$ وعليه $e^x=-2$ قضية خاطئة ومنه

$$e^x=1 \Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)=\ln(1) \Leftrightarrow x=0$$

إذن $S=\{0\}$.

3) $e^{x+1}+5=0 \Leftrightarrow e^{x+1}=-5$ بما أن $\forall x\in R: e^x>0$، فان $S=\varnothing$.

4) $e^{2x}+2e^x=3 \Leftrightarrow e^{2x}+2e^x-3=0......(3)$

نضع $y=e^x$ ومنه

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow y^2+2y-3=0\\ &\Leftrightarrow (y-1)(y+3)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}y-1=0\\ y+3=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ y=-3\end{cases}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{cases}e^x=1\\ e^x=-3(\forall x\in R: e^x>0 \text{ حل مرفوض لان})\end{cases} \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=\ln(1)=0$$

إذا $S=\{0\}$.

5) $\ln x+\ln(2x-1)=0..........(4)$

الدالة $\ln x$ معرفة على $]0,+\infty[$ والدالة $\ln(2x-1)$ معرفة على $]\frac{1}{2},+\infty[$ (لأن $\ln(2x-1)$ معرفة $\Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$) وعليه نحل المعادلة $(4)$ في تقاطع مجموعتي تعريف الدالتين السابقتين، أي $]0,+\infty[\cap]\frac{1}{2},+\infty[=]\frac{1}{2},+\infty[$

وعليه نحل المعادلة $(4)$ في المجال $]\frac{1}{2},+\infty[$ ومنه

$$\begin{aligned}(4) &\Leftrightarrow \ln\left[x(2x-1)\right]=0\\ &\Leftrightarrow x(2x-1)=1\\ &\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=0\\ x+\frac{1}{2}=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\in\ ]\frac{1}{2};+\infty[\\ x=-\frac{1}{2}\notin\ ]\frac{1}{2};+\infty[\end{cases}\end{aligned}$$

وعليه $S=\{1\}$.

6) $e^{x-4}\geq 3$ بما أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية متزايدة تماما، فان

$$e^{x-4} \geq 3 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x-4}\right) \geq \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow x-4 \geq \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow x \geq \ln(3)+4$$

إذا $S=\left[\ln(3)+4,+\infty\right[$.

7) $\ln x+\ln(2x-1)<0 ........(5)$

لحل المتراجحة (5)، نحل أولا المعادلة $\ln x+\ln(2x-1)=0......(6)$

حسب المثال (5) السابق، المعادلة (6) تُحل في المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ولها حلان هما $x=1$ (حل مقبول) و $x=-\frac{1}{2}$ (حل مرفوض) وحسب إشارة الدالة $2x^2-x-1$، فان $\ln x+\ln(2x-1)\geq 0$، إذا كان $x\in[1,+\infty[$

و $\ln x+\ln(2x-1)<0$، إذا كان $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

إذا $S=\left]\frac{1}{2};1\right[$.

### 4-2- تمارين للحل

**تمرين 6-6.** أحسب مشتقات الدوال التالية

$$x^3e^x \qquad \ln(\cos x) \qquad \exp\left\{\sin^3\left(x^2\right)\right\} \qquad \exp\left\{5x^3\right\}$$

$$\sin\left[\left(e^{4x}\right)^5\right] \qquad \frac{x}{\ln x} \qquad \frac{1}{3x-\ln x} \qquad \sqrt{\ln\left(x^2-2\right)}$$

**تمرين 6-7.** أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2+e^x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-3e^x \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{x+4} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

**تمرين 6-8.** حل في $R$ المعادلتين التاليتين

$$\ln\left(x^2-3x-2\right)=\ln(2x-6) \qquad e^{3x+1}+e^{2x+1}=e^{x+1+\ln 6}$$

# الفصل السابع

# الدوال الأصلية

# وحساب التكامل

في الفصل الخامس، تطرقنا إلى المشتقات، أي إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ ، فما هي دالتها المشتقة $f'(x)$ ؟ في هذا الفصل سنجيب على السؤال العكسي، أي إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ ، فما هي الدالة الأصلية $F(x)$ ل $f(x)$ ، بحيث $F'(x)=f(x)$ ؟

للتكامل دور مهم في الاقتصاد، فهو يستعمل لإيجاد الدوال الاقتصادية انطلاقا من دوالها الحدية، كأن نجد دالة التكلفة الكلية انطلاقا من دالة التكلفة الحدية، أو دالة الإيراد الكلي باعتباره المساحة المحصورة بين منحنى دالة الإيراد الحدي ومحوري الإحداثيات.

## 1- التكامل غير المحدود

**تعريف 7-1.** *لتكن $f$ دالة مستمرة على مجال $I$ من $R$. نقول أن $F(x)+c$ تكامل غير محدود للدالة $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان $F'(x)=f(x)$ ونكتب*

$$\int f(x)dx = F(x)+c,\ \ c\in R$$

*ونقرأ " تكامل $f(x)$ تفاضل x" وتسمى $F(x)$ دالة أصلية ل $f(x)$ و $c$ ثابت التكامل.* [1]

**ملاحظة 7-1**

1) إن المتغير $x$ في الترميز $\int f(x)dx$ متغير "أصم"، أي يمكن تعويض الحرف $x$ بأي حرف آخر

$$\int f(x)dx=\int f(u)du=\int f(t)dt=...$$ [2]

2) يوجد تكامل غير محدود وحيد $F(x)+c$ ل $f$ يأخذ القيمة $\lambda$ عند $x_0$ ، أي

$$F(x_0)+c=\lambda$$ [3]

### 1-1- التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة

*الجدول التالي يوضح التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة.*

| *التكامل غير المحدود* $\int f(x)dx$ | *الدالة* $f(x)$ |
|---|---|
| $c,\ \ c\in R$ | $0$ |
| $x+c$ | $1$ |
| $kx+c$ | $k,\ \ k\in R$ |
| $\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ | $x^n,\ \ n\neq -1$ |
| $\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ | $u'u^n,\ \ n\neq -1$ |
| $\ln\lvert x\rvert+c$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\ln\lvert u\rvert+c$ *(بتصرف)* [4] | $\frac{u'}{u}$ |

[1] Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 122.

[2] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 298.

[3] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Proposition 2, p. 149.

[4] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 307.

| $\int f(x)dx$ التكامل غير المحدود | $f(x)$ الدالة |
|---|---|
| $2\sqrt{x}+c$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| $2\sqrt{u}+c$ | $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ |
| $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$ | $\frac{1}{x^n},\ n\neq 1$ |
| $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ | $\frac{u'}{u^n},\ n\neq 1$ |
| $e^x+c$ | $e^x$ |
| $e^u+c$ | $u'e^u$ |
| $-\cos x+c$ | $\sin x$ |
| $\sin x+c$ | $\cos x$ |

***جدول 7−1− التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة (بتصرف)*** [(1)]

**أمثلة 7−1**

1) $\int 2dx = 2x+c$

2) $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3+c$

3) $\int (x+4)^5\,dx = \frac{1}{6}(x+4)^6+c$

4) $\int 3x^2(x^3-1)^7\,dx = \frac{1}{8}(x^3-1)^8+c$

5) $\int \frac{3}{3x-1}dx = \ln|3x-1|+c$

6) $\int \frac{8x+1}{4x^2+x}dx = \ln|4x^2+x|+c$

7) $\int \frac{7}{\sqrt{7x+5}}dx = 2\sqrt{7x+5}+c$

8) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = 2\sqrt{x^3+1}+c$

9) $\int \frac{1}{x^3}dx = \frac{-1}{2x^2}+c$

10) $\int \frac{1}{(x+4)^6}dx = \frac{-1}{5(x+4)^5}+c$

11) $\int \frac{2x}{(x^2-1)^4}dx = \frac{-1}{3(x^2-1)^3}+c$

12) $\int e^{x+2}dx = e^{x+2}+c$

13) $\int -3x^2e^{-x^3+1}dx = e^{-x^3+1}+c$

**ملاحظة 7−2.** نعلم أن مشتق الدالة المركبة $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ هو $(f\circ g)'(x)=f'(g(x)).g'(x)$

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 123.

وعليه يجب مراعاة عبارة $g'(x)$ عند إيجاد التكامل غير المحدود للدالة $(x)\ (f\circ g)'$.

**أمثلة 7-2**

1) $\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}+c$

(لأن $(f\circ g)(x)=e^{3x}$ بحيث $f(x)=e^{x}$ و $g(x)=3x$ وعليه $g'(x)=3$).

2) $\int \frac{x}{\left(x^2-1\right)^4}dx=\frac{1}{2}.\frac{-1}{3\left(x^2-1\right)^3}+c=\frac{-1}{6\left(x^2-1\right)^3}+c$

(لأن $(f\circ g)(x)=\left(x^2-1\right)^4$ بحيث $f(x)=x^4$ و $g(x)=x^2-1$ وعليه $g'(x)=2x$).

**1-2- خواص التكامل غير المحدود**

**نظرية 7-1.** *لتكن $f$ و $g$ دالتين مستمرتين على مجال $I$ من $R$ و $\alpha\in R$. لدينا*

1) $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

2) $\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx$ [(1)]

*وبتعميم الخاصيتين السابقتين، نجد*

3) $\int\left[\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+...+\alpha_n f_n(x)\right]dx=\alpha_1\int f_1(x)dx+\alpha_2\int f_2(x)dx+...+\alpha_n\int f_n(x)dx$

بحيث $\alpha_i\in R,\ i=\overline{1,n}$ و $f_i,\ i=\overline{1,n}$ *دوال مستمرة على مجال $I$ من $R$.*

4) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ و $\int f'(x)dx=f(x)+c$ [(2)]

**أمثلة 7-3**

$$\begin{aligned}\int\left(4x^2+5x-6\right)dx&=4\int x^2dx+5\int xdx-6\int 1dx\\&=4\left(\frac{1}{3}x^3+c_1\right)+5\left(\frac{1}{2}x^2+c_2\right)-6\left(x+c_3\right)\\&=\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x+4c_1+5c_2-6c_3\\&=\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x+c,\quad c=4c_1+5c_2-6c_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\left(-\frac{4}{x}+2\cos x\right)dx&=-4\int\frac{1}{x}dx+2\int\cos xdx\\&=-4\ln|x|+2\sin x+c\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\int\left(x^2-3\right)dx=x^2-3$$

$$\int\left(x^4-5x\right)'dx=x^4-5x+c$$

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 7.8, p. 173.

(2) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, pp. 294-296.

## 2- التكامل المحدود

**تعريف 7-2.** *لتكن $f$ دالة مستمرة على مجال $[a,b]$. نسمي التكامل المحدود ل $f$ على $[a,b]$، التكامل الذي يرمز له ب*

$$\int_a^b f(x)dx$$

*ونقرأ " تكامل من $a$ إلى $b$ ل $f(x)$ تفاضل $x$"*[(1)]*، المعرف كما يلي*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

*بحيث $F$ دالة أصلية ل $f$ ويسمى $a$ الحد الأدنى للتكامل المحدود و $b$ حده الأعلى.* [(2)]

**ملاحظة 7-3**

1) المتغير $x$ في الترميز $\int_a^b f(x)dx$ متغير "أصم"، أي يمكن تعويض الحرف $x$ بأي حرف آخر

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(\mu)d\mu = \dots \quad ^{(3)}$$

2) يجب التفرقة بين التكامل غير المحدود $\int f(x)dx$ والتكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$، حيث الأول يمثل الدوال الأصلية $F(x)+c$ للدالة $f(x)$، في حين الثاني يمثل عددا حقيقيا $F(b)-F(a)$.[(4)]

3) يمثل التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ هندسيا، المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f$، محور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$. بما أن المساحة دائما موجبة (أو معدومة) فانه يكفي أخذ القيمة $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$، إن كانت قيمة التكامل $\int_a^b f(x)dx$ سالبة (بتصرف).[(5)]

**أمثلة 7-4**

1) $$\int_2^4 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

هذا يعني أن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=x^2$ ومحور الفواصل وكذا المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=2$ و $x=4$ هي $\frac{56}{3}$ وحدة المساحة.

2) $$\int_0^1 (x-3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} - 3\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right) = -\frac{5}{2}$$

بما أن قيمة التكامل المحدود $\int_0^1 (x-3)dx$ سالبة، فان المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=x-3$ ومحور الفواصل وكذا المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$ هي $\left|-\frac{5}{2}\right|$ أي $\frac{5}{2}$ وحدة المساحة.

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 132.
(2) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 302.
(3) Ibid, p. 302.
(4) Ibid, p. 303.
(5) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 132-135.

**– خواص التكامل المحدود**

**نظرية 7–2.** *لتكن* $f$ *و* $g$ *دالتين مستمرتين على مجال* $[a,b]$ *و* $\alpha \in R$. *لدينا*

*1) (الخاصية الخطية للتكامل)* $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

*2) (علاقة شال)* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \quad a \le c \le b$

*3)* $\int_a^a f(x)dx = 0$

*4)* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (1)

*5) إذا كان* $a<b$ *و* $\forall x \in [a,b]: f(x) \ge 0$ *، فإن* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

*6) إذا كان* $a<b$ *و* $\forall x \in [a,b]: f(x) \le g(x)$ *، فإن* $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

*7) إذا كان* $a<b$ *، فإن* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ (2)

**أمثلة 7–5**

(1

$$\begin{aligned}\int_1^3 \left(e^x+x\right)dx &= \int_1^3 e^x dx + \int_1^3 x dx\\ &= \left[e^x\right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3\\ &= \left(e^3-e^1\right)+\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)\\ &= e^3-e+4\end{aligned}$$

(2

$$\begin{aligned}\int_4^5 \frac{6}{x}dx &= 6\int_4^5 \frac{1}{x}dx\\ &= 6\left[\ln|x|\right]_4^5\\ &= 6\left(\ln 5-\ln 4\right)\end{aligned}$$

(3 $\int_2^5 7dx = \int_2^3 7dx + \int_3^5 7dx$

بحيث

$$\begin{aligned}\int_2^5 7dx &= 7\int_2^5 1dx\\ &= 7[x]_2^5 = 7(5-2) = 21\end{aligned}$$

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 298.

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit, pp. 154-155.

و

$$\begin{aligned}\int_2^3 7dx+\int_3^5 7dx &= 7\int_2^3 1dx+7\int_3^5 1dx\\ &=7\left(\int_2^3 1dx+\int_3^5 1dx\right)\\ &=7\left([x]_2^3+[x]_3^5\right)\\ &=7\left((3-2)+(5-3)\right)\\ &=7(1+2)=21\end{aligned}$$

4) لنحسب التكامل $\int_4^6 f(x)dx$ ، بحيث

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 5\\ x+5, & x>5\end{cases}$$

الدالة $f$ مستمرة على $R$ وبالتالي $f$ مستمرة على المجال $[4,6]$، لكنها تأخذ العبارة $2x$ على المجال $]-\infty,5]$ وبالتالي على المجال $[4,5]$ وتأخذ العبارة $x+5$ على المجال $]5,+\infty[$ وبالتالي على المجال $]5,6]$ وعليه بتطبيق علاقة شال، نجد

$$\begin{aligned}\int_4^6 f(x)dx &= \int_4^5 f(x)dx+\int_5^6 f(x)dx\\ &=\int_4^5 2xdx+\int_5^6 (x+5)dx\\ &=\left[x^2\right]_4^5+\left[\frac{x^2}{2}+5x\right]_5^6\\ &=\left(5^2-4^2\right)+\left[\left(\frac{6^2}{2}+5(6)\right)-\left(\frac{5^2}{2}+5(5)\right)\right]\\ &=-\frac{61}{2}\end{aligned}$$

5) $\int_2^2 3x^2dx=\left[x^3\right]_2^2=2^3-2^3=0$

6)

$$\begin{aligned}\int_1^5 4xdx &= 2\int_1^5 2xdx\\ &=2\left[x^2\right]_1^5\\ &=2\left(5^2-1^2\right)=48\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\int_5^1 4xdx &= 2\int_5^1 2xdx\\ &=2\left[x^2\right]_5^1\\ &=2\left(1^2-5^2\right)=-48\end{aligned}$$

ومنه $\int_1^5 4xdx = -\int_5^1 4xdx$ .

(7

$$\int_{-2}^{-1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1}$$
$$= \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{7}{3} \geq 0$$

لأن الدالة $f(x) = x^2 \geq 0$ على المجال $[-2,-1]$ .

(8

$$\left|\int_{-1}^{0} xdx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|$$
$$= \left|0 - \frac{(-1)^2}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

بما أن الدالة $f(x) = x$ سالبة في المجال $[-1,0]$ فان $|x| = -x$ وعليه

$$\int_{-1}^{0} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -xdx$$
$$= -\int_{-1}^{0} xdx$$
$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$
$$= -\left(0 - \frac{(-1)^2}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

إذا $\left|\int_{-1}^{0} xdx\right| \leq \int_{-1}^{0} |x|\,dx$ .

## 3- طرق التكامل

لإيجاد الدوال الأصلية في التكامل سواء كان محدودا أو غير محدود، نلجأ أولا إلى جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة (الجدول 6-1) مع الاستعانة ببعض خواص التكاملين. أما إن كان التكامل معقدا، فنستخدم طرقا لتبسيطه وللرجوع في النهاية إلى الجدول 6-1. فيما يلي بعض أشهر طرق التكامل.

### 3-1- طريقة تغيير المتغير

**نظرية 7-3.** *لتكن $f$ دالة مستمرة على مجال $[a,b]$، $g$ دالة قابلة للاشتقاق ومشتقتها الأولى مستمرة على مجال $[\alpha,\beta]$ و $g$ تأخذ قيمها في $[a,b]$ بحيث $g(\alpha) = a$ و $g(\beta) = b$، لدينا إذا*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(g(x)\right)g'(x)dx \quad (1)$$

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. قضية 7، ص. 309.

**ملاحظة 7-4.** بالنسبة للتكامل غير المحدود، لدينا

$$^{(1)}\ \int f(u)du = \int f\left(g(x)\right)g'(x)dx, \quad u = g(x)$$

**أمثلة 7-6**

1) $\int (x+1)^2\, dx$

نضع $u = x+1$ ومنه $du = dx$. إذا

$$\begin{aligned}\int (x+1)^2\, dx &= \int u^2 du\\ &= \frac{1}{3}u^3 + c\\ &= \frac{1}{3}(x+1)^3 + c\end{aligned}$$

2) $\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-4}dx$

نضع $y = x^3-4$ ومنه $dy = 3x^2dx$. إذا كان $x=2$ فان $y = 2^3-4 = 4$ وإذا كان $x=3$ فان $y = 3^3-4 = 23$.
إذا

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-4}dx &= \int_4^{23}\frac{dy}{y}\\ &= \int_4^{23}\frac{1}{y}dy\\ &= \left[\ln|y|\right]_4^{23}\\ &= \ln(23)-\ln(4) = \ln\left(\frac{23}{4}\right)\end{aligned}$$

**3-2- طريقة التكامل بالتجزئة**

تستخدم طريقة التكامل بالتجزئة في حالة جداء دالتين، بحيث يمكن إيجاد الدالة الأصلية لإحديهما بسهولة.

*يمكن استنتاج عبارة التكامل بالتجزئة من مشتق جداء دالتين كما يلي*

$$\left(f.g\right)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

*ومنه*

$$f(x)g'(x) = \left(f.g\right)'(x) - f'(x)g(x)$$

*وعليه*

$$\begin{aligned}^{(2)}\int f(x)g'(x)dx &= \int \left(f.g\right)'(x)dx - \int f'(x)g(x)dx\\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

*وبالنسبة للتكامل المحدود، نحصل على العلاقة التالية*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

---

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 320.
(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 163.

*بحيث $f$ و $g$ دالتان قابلتان للاشتقاق ومشتقتاهما مستمرتان على مجال $[a,b]$ من $R$* .[1]

**أمثلة 7-7**

1) $\int x\cos x dx = \int x.\cos x dx$

نضع

$$f(x) = x \quad \Rightarrow f'(x) = 1dx$$
$$g'(x) = \cos x dx \Rightarrow g(x) = \sin x$$

ومنه

$$\int x\cos x dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= x\sin x - \int 1.\sin x dx \\ &= x\sin x - \int \sin x dx \\ &= x\sin x - (-\cos x + c) \\ &= x\sin x + \cos x + c\end{aligned}$$

2) $\int_2^3 \ln x dx = \int_2^3 1.\ln x dx$

نضع

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}dx$$
$$g'(x) = 1dx \Rightarrow g(x) = x$$

ومنه

$$\int_2^3 \ln x dx = [f(x)g(x)]_2^3 - \int_2^3 f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}\int_2^3 \ln x dx &= [x\ln x]_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{x}.x dx \\ &= [x\ln x]_2^3 - \int_2^3 1dx \\ &= [x\ln x]_2^3 - [x]_2^3 \\ &= \left[(3\ln(3)) - (2\ln(2))\right] - (3-2) \\ &= 3\ln(3) - 2\ln(2) - 1\end{aligned}$$

**3-3- طريقة التفريق إلى كسور بسيطة**

*لتكن لدينا الدالة الناطقة* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $Q(x) \neq 0$ *ودرجة البسط* $P(x)$ *أقل من درجة المقام* $Q(x)$ *ونكتب* $\deg P(x) < \deg Q(x)$ *(إن كان* $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$*، نلجأ للقسمة الإقليدية، فنحصل على*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{حاصل قسمة } P \text{ على } Q + \frac{\text{باقي قسمة } P \text{ على } Q}{Q(x)}$$

---

[1] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 7.11, p. 177.

*بحيث درجة باقي قسمة P على Q أقل من درجة Q).*

*إن كانت هناك صعوبة في إيجاد دالة أصلية للدالة f ، نلجأ إلى طريقة تفريق الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ إلى كسور بسيطة يسهل مكاملتها. فيما يلي أهم الحالات التي تستخدم فيها هذه الطريقة.* [(1)]

### 3-3-1- تحليل المقام إلى عدة عوامل غير متكررة

*إن أمكن تحليل المقام $Q(x)$ إلى عدة عوامل (من الدرجة الأولى، أو الثانية أو الثالثة أو أكثر، لا يمكن تحليلها إلى جداء عوامل أقل درجة) غير متكررة، فإنه ينتج لنا عدة كسور جزئية على النحو التالي*

$$(*).......f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha}{a_1x+b_1}+\frac{\beta}{a_2x+b_2}+\frac{\gamma x+\lambda}{a_3x^2+b_3x+c_1}+\frac{\vartheta x^2+\tau x+\sigma}{a_4x^3+b_4x^2+c_2x+d_1}+...$$

*بحيث $a_1,..,a_4,b_1,...,b_4,c_1,c_2,d_1,\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\vartheta,\tau,\sigma,...$ أعداد حقيقية ودرجة البسط في الكسور الجزئية أقل بدرجة واحدة من درجة المقام (بتصرف).* [(2)]

### أمثلة 7-8

1) $\int\frac{3x+5}{x^2+x-12}dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx.......(I)$

نلاحظ أن $\deg P(x)=1<\deg Q(x)=2$ وعليه، نقوم بتحليل المقام إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى، أي

$$x^2+x-12=(x-3)(x+4)$$

ومنه

$$\int\frac{3x+5}{x^2+x-12}dx=\int\frac{3x+5}{(x-3)(x+4)}dx$$

في التفرقة إلى كسور بسيطة، يجب أن تكون درجة البسط أقل بدرجة واحدة من درجة المقام. لدينا $\deg(x-3)=1$ وعليه درجة بسطه تساوي 0 أي عدد ثابت $a$ و $\deg(x+4)=1$ فإن درجة بسطه تساوي 0 أي عدد ثابت $b$ ومنه

$$(I)=\int\frac{3x+5}{(x-3)(x+4)}dx=\int\left(\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+4}\right)dx$$

بما أن $x=3$ جذر بسيط (من الدرجة الأولى) ل $x-3$ و $x=-4$ جذر بسيط ل $x+4$ ، فيمكن إيجاد $a$ و $b$ كما يلي

$$\frac{3x+5}{(x-3)(x+4)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+4}$$

بالجمع، نجد

$$\frac{3x+5}{(x-3)(x+4)}=\frac{a(x+4)+b(x-3)}{(x-3)(x+4)}$$

بالمطابقة طرفا لطرف، نجد

$$3x+5=a(x+4)+b(x-3)$$

نعوض عن قيمة الجذرين $x=3$ و $x=-4$ في آخر معادلة، نجد

---

[(1)] سلطان محمد عبد الحميد. *رياضيات الأعمال للتجاريين.* المكتبة العصرية، مصر، 2007، ص ص. 373-374.

[(2)] نفسه، ص. 374.

من أجل $x=3$ : $3(3)+5=a(3+4)+b(3-3)$

ومنه $14=7a$ أي $a=2$

من أجل $x=-4$ : $3(-4)+5=a(-4+4)+b(-4-3)$

ومنه $-7=-7b$ أي $b=1$

إذا

$$\begin{aligned}(I)&=\int\frac{3x+5}{(x-3)(x+4)}dx\\&=\int\left(\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+4}\right)dx\\&=2\int\frac{1}{x-3}dx+\int\frac{1}{x+4}dx\\&=2\ln|x-3|+\ln|x+4|+c\end{aligned}$$

2) $$\int_1^2\frac{2x^2+1}{x^3+x}dx=\int_1^2\frac{P(x)}{Q(x)}.......(J)$$

نلاحظ أن $\deg P(x)=2<\deg Q(x)=3$ وعليه، نقوم بتحليل المقام إلى جداء عوامل من درجة أقل، أي

$$x^3+x=x\left(x^2+1\right)$$

ومنه

$$\int_1^2\frac{2x^2+1}{x^3+x}dx=\int_1^2\frac{2x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$$

كثير الحدود $x^2+1$ لا يقبل جذور في $R$ ومنه لا يقبل التحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى. في التفرقة إلى كسور بسيطة، يجب أن تكون درجة البسط أقل بدرجة واحدة من درجة المقام. لدينا $\deg(x)=1$ وعليه درجة بسطه تساوي $0$ أي عدد ثابت $a$ و $\deg(x^2+1)=2$ فإن درجة بسطه تساوي $1$ أي $bx+c$ ومنه

$$(J)=\int_1^2\frac{2x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int_1^2\left(\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}\right)dx$$

لإيجاد الثوابت $a$، $b$ و $c$، نلجأ لطريقة الجمع والتعويض، أي

$$\frac{2x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

بالجمع، نجد

$$\frac{2x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{a\left(x^2+1\right)+x\left(bx+c\right)}{x\left(x^2+1\right)}$$

بالمطابقة طرفا لطرف، نجد

$$2x^2+1=a\left(x^2+1\right)+x\left(bx+c\right)=\left(a+b\right)x^2+cx+a$$

أي

$$\begin{cases}a+b=2\\c=0\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=0\end{cases}$$

وعليه

$$\begin{aligned}(J)&=\int_1^2\frac{2x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}dx\\&=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx\\&=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_1^2\frac{x}{x^2+1}dx\\&=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{2x}{x^2+1}dx\\&=\left[\ln|x|\right]_1^2+\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_1^2\\&=\left(\ln(2)-\ln(1)\right)+\frac{1}{2}\left(\ln(5)-\ln(2)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\ln(5)+\ln(2)\right)=\ln\left(\sqrt{10}\right)\end{aligned}$$

### 3-3-2- تحليل المقام إلى عدة عوامل بعضها متكررة

*لتكن لدينا الدالة* $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *بحيث* $Q(x)\neq 0$ *و* $\deg P(x)<\deg Q(x)$ *. إن أمكن تحويل المقام* $Q(x)$ *إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى بعضها متكرر، فان العوامل المتكررة تنتج لنا العبارة التالية*

$$(**)\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{g(x)}{(x+k)^n}=\frac{a}{x+k}+\frac{b}{(x+k)^2}+\ldots+\frac{m}{(x+k)^{n-1}}+\frac{l}{(x+k)^n}$$

بحيث $k,a,b,\ldots,m,l\in R$ و $\deg\left(g(x)\right)<n$.

*يمكن تطبيق العلاقة (**)، إن أمكن تحويل* $Q(x)$ *إلى جداء عوامل من درجة أعلى بعضها متكرر، مع مراعاة أن تكون درجة البسط أقل بدرجة واحدة من درجة المقام (بتصرف).* [1]

**ملاحظة 7-5.** إن أمكن تحويل المقام $Q(x)$ إلى جداء عوامل بعضها متكرر والآخر غير متكرر، فإننا نجمع بين العبارتين (*) و (**).

**أمثلة 7-9**

1) $\displaystyle\int\frac{x^3+2}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=(I)$

نلاحظ أن $\deg(P)=3>\deg(Q)=2$ وعليه نقوم بالقسمة الإقليدية لجعل درجة البسط أقل من درجة المقام، أي

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^2+2x+1 \\ - & \overline{x-2} \\ \underline{x^3+2x^2+x} & \\ -2x^2-x+2 & \\ - & \\ \underline{-2x^2-4x-2} & \\ 3x+4 & \end{array}$$

[1] سلطان محمد عبد الحميد. المرجع السابق، ص. 381.

ومنه

$$(I)=\int\left(x-2+\frac{3x+4}{x^2+2x+1}\right)dx$$
$$=\int x-2dx+\int\frac{3x+4}{x^2+2x+1}dx$$

بتحليل المقام، نجد $x^2+2x+1=(x+1)^2$ ومنه

$$(I)=\int x-2dx+\int\frac{3x+4}{(x+1)^2}dx$$

نلاحظ أن المقام $(x+1)^2$ متكرر مرتين وعليه نطبق العلاقة $(**)$، أي

$$(I)=\int x-2dx+\int\frac{3x+4}{(x+1)^2}dx$$
$$=\int x-2dx+\int\left(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}\right)dx$$

بالجمع، نجد

$$(I)=\int x-2dx+\int\frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2}dx$$
$$=\int x-2dx+\int\frac{ax+(a+b)}{(x+1)^2}dx$$
$$=\int x-2dx+\int\frac{3x+4}{(x+1)^2}dx$$

بالمطابقة طرفا لطرف بين آخر سطرين من التكامل $(I)$، نجد

$$\begin{cases}a=3\\a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$$

ومنه

$$(I)=\int x-2dx+\int\left(\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$
$$=\int x-2dx+3\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-2x+3\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+c$$

2) $\displaystyle\int_3^4\frac{x^4-4x^3-x^2-10x-9}{(x-2)(x^2+3)^2}dx=\int_3^4\frac{P(x)}{Q(x)}dx=(J)$

نلاحظ أن $\deg(P)=4<\deg(Q)=5$ . المقام $Q(x)$ عبارة عن جداء عاملين أحدهما غير مكرر هو $x-2$ والآخر مكرر مرتين غير قابل للتحليل هو $x^2+3$ وعليه لإيجاد التكامل $(J)$ نطبق الخاصية $(*)$ لأجل العامل $x-2$ والخاصية $(**)$ للعامل $x^2+3$، أي

$$(J)=\int_3^4 \frac{x^4-4x^3-x^2-10x-9}{(x-2)\left(x^2+3\right)^2}dx$$
$$=\int_3^4\left(\frac{a}{x-2}+\frac{bx+c}{x^2+3}+\frac{hx+k}{\left(x^2+3\right)^2}\right)dx$$

بالجمع، نجد

$$(J)=\int_3^4 \frac{a\left(x^2+3\right)^2+(bx+c)(x-2)\left(x^2+3\right)+(hx+k)(x-2)}{(x-2)\left(x^2+3\right)^2}dx$$

ومنه

$$(J)=\int_3^4 \frac{(a+b)x^4+(c-2b)x^3+(6a+3b-2c+h)x^2+(3c-6b-2h+k)x+(9a-6c-2k)}{(x-2)\left(x^2+3\right)^2}dx$$
$$=\int_3^4 \frac{x^4-4x^3-x^2-10x-9}{(x-2)\left(x^2+3\right)^2}dx$$

بالمطابقة طرفا لطرف، نجد

$$\begin{cases} a+b=1 \\ c-2b=-4 \\ 6a+3b-2c+h=-1 \\ 3c-6b-2h+k=-10 \\ 9a-6c-2k=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \\ h=-1 \\ k=0 \end{cases}$$

ومنه

$$(J)=\int_3^4\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{2x}{x^2+3}-\frac{x}{\left(x^2+3\right)^2}\right)dx$$
$$=-\int_3^4 \frac{1}{x-2}dx+\int_3^4 \frac{2x}{x^2+3}dx-\int_3^4 \frac{x}{\left(x^2+3\right)^2}dx$$
$$=-\left[\ln|x-2|\right]_3^4+\left[\ln\left|x^2+3\right|\right]_3^4-\frac{1}{2}\int_3^4 \frac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}dx$$
$$=-\left[\ln|x-2|\right]_3^4+\left[\ln\left|x^2+3\right|\right]_3^4+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+3}\right]_3^4$$
$$=-\left(\ln(2)-\ln(1)\right)+\left(\ln(19)-\ln(12)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{19}{24}\right)-\frac{7}{456}$$

## 4- تطبيقات التكامل في الاقتصاد

يستخدم التكامل في الاقتصاد –على سبيل المثال– لحساب دالتي التكلفة الكلية والإيراد الكلي باعتبارهما الدوال الأصلية لدالتي التكلفة الحدية والإيراد الحدي على الترتيب، أي

$$TR(Q)=\int MR(Q)dQ \quad \text{و} \quad TC(Q)=\int MC(Q)dQ$$

**أمثلة 7−10**

1) إذا كانت التكلفة الحدية لأحد منتجات مصنع ما هي

$$MC(Q)=\frac{90000}{\sqrt{Q+1}} \quad DA$$

− فما هي التكلفة الكلية لإنتاج 3 وحدات ؟

لدينا

$$\begin{aligned} TC(3) &= \int_0^3 MC(Q)dQ \\ &= \int_0^3 \frac{90000}{\sqrt{Q+1}}dQ \\ &= 90000\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{Q+1}}dQ \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} TC(3) &= 90000\left[2\sqrt{Q+1}\right]_0^3 \\ &= 180000\left[\sqrt{Q+1}\right]_0^3 \\ &= 180000(2-1) \\ &= 180000 \quad DA \end{aligned}$$

أي التكلفة الكلية لإنتاج 3 وحدات هي 180000 دج.

2) إذا كان الإيراد الحدي لأحد منتجات مصنع ما هي

$$MR(Q)=1000+Q^2 \quad DA$$

− ما هو التغير في الإيراد الكلي عندما تنخفض المبيعات من 30 إلى 10 وحدات ؟

لدينا

$$\begin{aligned} \Delta RT &= \int_{30}^{10} MR(Q)dQ \\ &= -\int_{10}^{30} MR(Q)dQ \\ &= -\int_{10}^{30} \left(1000+Q^2\right)dQ \\ &= -\left[1000Q+\frac{Q^3}{3}\right]_{10}^{30} \\ &= -28666.667 \quad DA \end{aligned}$$

أي هناك خسارة بقيمة 28666.667 دج، إذا انخفضت المبيعات من 30 إلى 10 وحدات.

## 5- تمارين

### 5-1- تمارين محلولة

**تمرين 7-1.** أوجد الدوال الأصلية التالية

$$\int 7-2x+4x^3-6x^8dx \qquad \int \frac{5}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}dx \qquad \int 3e^{3x}+\frac{4}{4x-1}dx$$

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2-2x\right)^4}+\frac{1}{\sqrt{5x-3}}dx \qquad \int x^2\left(x^3-7\right)^5dx$$

**الحل.** لنجد الدوال الأصلية التالية

$$\int 7-2x+4x^3-6x^8dx=7x-x^2+x^4-\frac{6}{9}x^9+c\,/\,c\in R$$

$$\int \frac{5}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}dx=-\frac{5}{2x^2}-2\sqrt{x}+3\ln|x|+c$$

$$\int 3e^{3x}+\frac{4}{4x-1}dx=e^{3x}+\ln|4x-1|+c$$

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2-2x\right)^4}+\frac{1}{\sqrt{5x-3}}dx=\frac{1}{2}\frac{-1}{3\left(x^2-2x\right)^3}+\frac{1}{5}2\sqrt{5x-3}+c$$

$$=\frac{-1}{6\left(x^2-2x\right)^3}+\frac{2}{5}\sqrt{5x-3}+c$$

$$\int x^2\left(x^3-7\right)^5dx=\frac{1}{3}\frac{\left(x^3-7\right)^6}{6}+c$$

$$=\frac{1}{18}\left(x^3-7\right)^6+c$$

**تمرين 7-2.** أوجد ما يلي

$$\int\left(3x+x^4-8\right)dx \qquad \int\left(\frac{2}{x}-e^x\right)dx \qquad \int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}\right)dx \qquad \int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+6}}dx$$

$$\int_0^1(2x-1)^4dx \qquad \int_{-3}^2\frac{1}{x+4}dx \qquad \int_2^4\frac{1}{(3x-7)^5}dx \qquad \int_1^3 e^{6x}dx$$

**الحل.** إيجاد ما يلي

$$\int\left(3x+x^4-8\right)dx=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{5}x^5-8x+c \quad /\,c\in R$$

$$\int\left(\frac{2}{x}-e^x\right)dx=2\ln|x|-e^x+c$$

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}\right)dx=10\sqrt{x}-\frac{1}{3x^3}+c$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+6}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+6}+c$$

$$\int_0^1(2x-1)^4dx=\left[\frac{1}{10}(2x-1)^5\right]_0^1=\frac{1}{10}\left(1^5-(-1)^5\right)=\frac{1}{5}$$

$$\int_{-3}^{2}\frac{1}{x+4}dx=\left[\ln|x+4|\right]_{-3}^{2}=\ln(6)$$

$$\int_{2}^{4}\frac{1}{(3x-7)^5}dx=\left[\frac{-1}{12(3x-7)^4}\right]_{2}^{4}=\frac{-1}{12}\left(\frac{1}{625}-1\right)=\frac{52}{625}$$

$$\int_{1}^{3}e^{6x}dx=\left[\frac{1}{6}e^{6x}\right]_{1}^{3}=\frac{1}{6}\left(e^{18}-e^{6}\right)$$

**تمرين 7-3.** باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب ما يلي

$$(I)=\int_{1}^{3}2x\ln xdx \qquad (J)=\int_{0}^{1}xe^{3x}dx$$

$$(K)=\int 2xe^{x}dx \qquad (L)=\int_{1}^{2}x(x+1)^3\,dx$$

**الحل.** لنحسب التكاملين التاليين باستعمال التكامل بالتجزئة

1) $(I)=\int_{1}^{3}2x\ln xdx=\int_{1}^{3}2x.\ln xdx$

نضع

$$f(x)=\ln x \quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}dx$$
$$g'(x)=2xdx\Rightarrow g(x)=x^2$$

ومنه

$$\begin{aligned}(I)&=\int_{1}^{3}2x\ln xdx\\&=\left[f(x)g(x)\right]_{1}^{3}-\int_{1}^{3}f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

أي

$$\begin{aligned}(I)&=\left[x^2\ln x\right]_{1}^{3}-\int_{1}^{3}\frac{1}{x}.x^2dx\\&=\left[x^2\ln x\right]_{1}^{3}-\int_{1}^{3}xdx\\&=\left[x^2\ln x\right]_{1}^{3}-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}\\&=\left[(9\ln(3))-(\ln(1))\right]-\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)\\&=9\ln(3)-4\end{aligned}$$

2) $(J)=\int_{0}^{1}xe^{3x}dx=\int_{0}^{1}x.e^{3x}dx$

نضع

$$f(x)=x \qquad\Rightarrow f'(x)=1dx$$
$$g'(x)=e^{3x}dx\Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$$

ومنه

$$\begin{aligned}(J) &= \int_0^1 xe^{3x}dx \\ &= \left[f(x)g(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

أي

$$\begin{aligned}(J) &= \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 1.\frac{1}{3}e^{3x}dx \\ &= \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}dx \\ &= \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left[xe^{3x}\right]_0^1 - \frac{1}{9}\left[e^{3x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left[e^3 - 0\right] - \frac{1}{9}\left(e^3 - e^0\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(2e^3 + 1\right)\end{aligned}$$

3) $(K) = \int 2xe^x dx = \int 2x.e^x dx$

نضع

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x \quad \Rightarrow f'(x) = 2dx \\ g'(x) &= e^x dx \Rightarrow g(x) = e^x\end{aligned}$$

ومنه

$$(K) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}(K) &= 2xe^x - \int 2.e^x dx \\ &= 2xe^x - 2\int e^x dx \\ &= 2xe^x - 2\left(e^x + c\right) \\ &= 2e^x\left(x-1\right) + c\end{aligned}$$

4) $(L) = \int_1^2 x\left(x+1\right)^3 dx = \int_1^2 x.\left(x+1\right)^3 dx$

نضع

$$\begin{aligned}f(x) &= x \qquad\qquad \Rightarrow f'(x) = 1dx \\ g'(x) &= \left(x+1\right)^3 dx \Rightarrow g(x) = \frac{1}{4}\left(x+1\right)^4\end{aligned}$$

ومنه

$$(L)=[f(x)g(x)]_1^2-\int_1^2 f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}(L)&=\frac{1}{4}\left[x(x+1)^4\right]_1^2-\frac{1}{4}\int_1^2(x+1)^4\,dx\\&=\frac{1}{4}\left[x(x+1)^4\right]_1^2-\frac{1}{20}\left[(x+1)^5\right]_1^2\\&=\frac{1}{4}(162-16)-\frac{1}{20}(243-32)\\&=\frac{519}{20}\end{aligned}$$

**تمرين 7−4.** باستعمال التكامل بتغيير المتغير، أحسب ما يلي

$$(I)=\int_5^6(x-5)^4dx \quad (y=x-5) \qquad (J)=\int 2x\left(x^2-4\right)^3 dx \quad \left(y=x^2-4\right)$$

$$(K)=\int_0^1\frac{e^{5x}}{e^{5x}+1}dx \quad \left(y=e^{5x}+1\right) \qquad (L)=\int\frac{1}{(x+3)^5}dx \quad (y=x+3)$$

**الحل.** إيجاد ما يلي، باستعمال طريقة التكامل بتغيير المتغير

1) $(I)=\int_5^6(x-5)^4dx \quad (y=x-5)$

نضع $y=x-5$ ومنه $dy=dx$ . إذا كان $x=5$ فان $y=0$ وإذا كان $x=6$ فان $y=1$ .

إذا

$$\begin{aligned}(I)&=\int_0^1 y^4dy\\&=\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1\\&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

2) $(J)=\int 2x\left(x^2-4\right)^3 dx \qquad \left(y=x^2-4\right)$

نضع $y=x^2-4$ ومنه $dy=2xdx$ . إذا

$$\begin{aligned}(J)&=\int y^3dy\\&=\frac{1}{4}y^3+c\\&=\frac{1}{4}\left(x^2-4\right)^3+c\end{aligned}$$

$$(K)=\int_0^1 \frac{e^{5x}}{e^{5x}+1}dx \qquad \left(y=e^{5x}+1\right) \quad (3$$

نضع $y=e^{5x}+1$ ومنه $dy=5e^{5x}dx$ . إذا كان $x=0$ فان $y=2$ وإذا كان $x=1$ فان $y=e^5+1$ . إذا

$$\begin{aligned}(K)&=\int_2^{e^5+1}\frac{1}{5}\frac{dy}{y}\\&=\frac{1}{5}\int_2^{e^5+1}\frac{1}{y}dy\\&=\frac{1}{5}\left[\ln|y|\right]_2^{e^5+1}\\&=\frac{1}{5}\left(\ln\left(e^5+1\right)-\ln(2)\right)\end{aligned}$$

$$(L)=\int\frac{1}{(x+3)^5}dx \qquad (y=x+3) \quad (4$$

نضع $y=x+3$ ومنه $dy=dx$ . إذا

$$\begin{aligned}(L)&=\int\frac{1}{y^5}dy\\&=\frac{-1}{4y^4}+c\\&=\frac{-1}{4(x+3)^4}+c\end{aligned}$$

**تمرين 7−5**. باستعمال التكامل بالتفريق إلى كسور بسيطة، أحسب ما يلي

$$(I)=\int_2^3\frac{-3x}{x^2+x-2}dx \qquad (J)=\int_3^4\frac{x^4-4x^3+4}{x^3-4x^2+4x}dx$$

$$(K)=\int\frac{x^4+2x^2-2}{x^3+2x}dx \qquad (L)=\int_0^1\frac{3x+2}{x^2+2x+1}dx$$

**الحل**. إيجاد ما يلي، باستعمال طريقة التفريق إلى كسور بسيطة

$$(I)=\int_2^3\frac{-3x}{x^2+x-2}dx=\int_2^3\frac{P(x)}{Q(x)}dx \quad (1$$

نلاحظ أن $\deg P(x)=1<\deg Q(x)=2$ وعليه، نقوم بتحليل المقام إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى، أي

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

ومنه

$$(I)=\int_2^3\frac{-3x}{x^2+x-2}dx=\int_2^3\frac{-3x}{(x-1)(x+2)}dx$$

في التفرقة إلى كسور بسيطة، يجب أن تكون درجة البسط أقل بدرجة واحدة من درجة المقام. لدينا $\deg(x-1)=1$ وعليه درجة بسطه تساوي $0$ أي عدد ثابت $a$ و $\deg(x+2)=1$ فإن درجة بسطه تساوي $0$ أي عدد ثابت $b$ ومنه

$$(I)=\int_2^3\frac{-3x}{(x-1)(x+2)}dx=\int_2^3\left(\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}\right)dx$$

بما أن $x=1$ جذر بسيط (من الدرجة الأولى) ل $x-1$ و $x=-2$ جذر بسيط ل $x+2$ ، فيمكن إيجاد $a$ و $b$ كما يلي

$$\frac{-3x}{(x-1)(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$$

بالجمع، نجد

$$\frac{-3x}{(x-1)(x+2)}=\frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

بالمطابقة طرفا لطرف، نجد

$$-3x=a(x+2)+b(x-1)$$

نعوض عن قيمة الجذرين $x=1$ و $x=-2$ في آخر معادلة، نجد

من أجل $x=1$ : $-3(1)=a(1+2)+b(1-1)$

ومنه $-3=3a$ أي $a=-1$

من أجل $x=-2$ : $-3(-2)=a(-2+2)+b(-2-1)$

ومنه $6=-3b$ أي $b=-2$

إذا

$$\begin{aligned}
(I)&=\int_2^3\frac{-3x}{(x-1)(x+2)}dx\\
&=\int_2^3\left(\frac{-1}{x-1}-\frac{2}{x+2}\right)dx\\
&=-\int_2^3\frac{1}{x-1}dx-2\int_2^3\frac{1}{x+2}dx\\
&=-\left[\ln|x-1|\right]_2^3-2\left[\ln|x+2|\right]_2^3\\
&=-\left(\ln(2)-\ln(1)\right)-2\left(\ln(5)-\ln(4)\right)\\
&=2\left(\ln(4)-\ln(5)\right)-\ln(2)\\
&=\ln\left(\frac{16}{50}\right)
\end{aligned}$$

2) $$(J)=\int_3^4\frac{x^4-4x^3+4}{x^3-4x^2+4x}dx=\int_3^4\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

نلاحظ أن $\deg(P)=4>\deg(Q)=3$ وعليه نقوم بالقسمة الإقليدية لجعل درجة البسط أقل من درجة المقام، أي

$$\begin{array}{r|l}
 & \dfrac{x^3-4x^2+4x}{x} \\
x^4-4x^3+4 & \\
- & \\
\underline{x^4-4x^3+4x^2} & \\
-4x^2+4 &
\end{array}$$

ومنه

$$(J)=\int_3^4\left(x+\frac{-4x^2+4}{x^3-4x^2+4x}\right)dx$$
$$=\int_3^4 xdx+\int_3^4\frac{-4x^2+4}{x^3-4x^2+4x}dx$$

بتحليل المقام، نجد $x^3-4x^2+4x=x\left(x^2-4x+4\right)=x\left(x-2\right)^2$ ومنه

$$(J)=\int_3^4 xdx+\int_3^4\frac{-4x^2+4}{x\left(x-2\right)^2}dx$$

مقام آخر تكامل على اليمين عبارة عن جداء عاملين أحدهما غير مكرر هو $x$ والآخر مكرر مرتين غير قابل للتحليل هو $x-2$ وعليه لإيجاد التكامل $(J)$ نطبق الخاصية (*) لأجل العامل $x$ والخاصية (**) للعامل $x-2$، أي

$$(J)=\int_3^4 xdx+\int_3^4\frac{-4x^2+4}{x\left(x-2\right)^2}dx$$
$$=\int_3^4 xdx+\int_3^4\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{\left(x-2\right)^2}\right)dx$$

بالجمع، نجد

$$(J)=\int_3^4 xdx+\int_3^4\frac{a\left(x-2\right)^2+bx\left(x-2\right)+cx}{x\left(x-2\right)^2}dx$$

ومنه

$$(J)=\int_3^4 xdx+\int_3^4\frac{\left(a+b\right)x^2+\left(-4a-2b+c\right)x+4a}{x\left(x-2\right)^2}dx$$
$$=\int_3^4 xdx+\int_3^4\frac{-4x^2+4}{x\left(x-2\right)^2}dx$$

بالمطابقة طرفا لطرف، نجد

$$\begin{cases}a+b=-4\\-4a-2b+c=0\\4a=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-5\\c=-6\end{cases}$$

ومنه

$$(J)=\int_3^4 xdx+\int_3^4\left(\frac{1}{x}-\frac{5}{x-2}-\frac{6}{\left(x-2\right)^2}\right)dx$$
$$=\int_3^4 xdx+\int_3^4\frac{1}{x}dx-5\int_3^4\frac{1}{x-2}dx-6\int_3^4\frac{1}{\left(x-2\right)^2}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_3^4+\left[\ln|x|\right]_3^4-5\left[\ln|x-2|\right]_3^4-6\left[\frac{-1}{x-2}\right]_3^4$$

$$(J)=\left(8-\frac{9}{2}\right)+\left(\ln(4)-\ln(3)\right)-5\left(\ln(2)-\ln(1)\right)-6\left(\frac{-1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\ln\left(24\right)$$

3) $(K)=\int\frac{x^4+2x^2-2}{x^3+2x}dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

نلاحظ أن $\deg(P)=4>\deg(Q)=3$ وعليه نقوم بالقسمة الإقليدية لجعل درجة البسط أقل من درجة المقام، أي

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^2-2 & x^3+2x \\ \cline{2-2} - & x \\ x^4+2x^2 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

ومنه

$$(K)=\int\left(x-\frac{2}{x^3+2x}\right)dx$$
$$=\int xdx+\int\frac{-2}{x^3+2x}dx$$

بتحليل المقام، نجد $x^3+2x=x\left(x^2+2\right)$ ومنه

$$(K)=\int xdx+\int\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}dx$$

كثير الحدود $x^2+2$ لا يقبل جذور في $R$ ومنه لا يقبل التحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى. في التفرقة إلى كسور بسيطة، يجب أن تكون درجة البسط أقل بدرجة واحدة من درجة المقام. لدينا $\deg(x)=1$ وعليه درجة بسطه تساوي $0$ أي عدد ثابت $a$ و $\deg(x^2+2)=2$ فإن درجة بسطه تساوي $1$ أي $bx+c$ ومنه

$$(K)=\int xdx+\int\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}dx=\int xdx+\int\left(\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}\right)dx$$

لإيجاد الثوابت $a$، $b$ و $c$، نلجأ لطريقة الجمع والتعويض، أي

$$\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}$$

بالجمع، نجد

$$\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{a\left(x^2+2\right)+x\left(bx+c\right)}{x\left(x^2+2\right)}$$

بالمطابقة طرفا لطرف، نجد

$$-2=a\left(x^2+2\right)+x\left(bx+c\right)=\left(a+b\right)x^2+cx+2a$$

أي

$$\begin{cases}a+b=0\\ c=0\\ 2a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=1\\ c=0\end{cases}$$

وعليه

$$\begin{aligned}(K) &= \int x dx + \int \frac{-2}{x\left(x^2+2\right)} dx \\ &= \int x dx + \int \left(\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2}\right) dx \\ &= \int x dx + \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{x}{x^2+2}\right) dx \\ &= \int x dx + \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+2} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| + c\end{aligned}$$

4) $(L) = \int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+2x+1} dx = \int_0^1 \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

نلاحظ أن $\deg(P) = 1 < \deg(Q) = 2$ . بتحليل المقام، نجد $x^2+2x+1 = (x+1)^2$ ومنه

$$(L) = \int_0^1 \frac{3x+2}{(x+1)^2} dx$$

نلاحظ أن المقام $(x+1)^2$ متكرر مرتين وعليه

$$\begin{aligned}(L) &= \int_0^1 \frac{3x+2}{(x+1)^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}\right) dx\end{aligned}$$

بالجمع، نجد

$$\begin{aligned}(L) &= \int_0^1 \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{ax+(a+b)}{(x+1)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{3x+2}{(x+1)^2} dx\end{aligned}$$

بالمطابقة طرفا لطرف بين آخر سطرين من التكامل $(L)$، نجد

$$\begin{cases} a = 3 \\ a+b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{aligned}(L) &= \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= 3\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx\end{aligned}$$

$$(L)=3\left[\ln|x+1|\right]_0^1+\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1$$
$$=3\ln(2)+\frac{1}{2}-1$$
$$=3\ln(2)-\frac{1}{2}$$

**تمرين 7−6.** إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية لمنتج معين هي

$MC(Q)=4Q^2+3Q+1 \quad DA$ حيث $Q$ حجم الإنتاج

− أوجد دالة التكاليف الكلية، إذا علمت أنها تساوي 15 دج عند حجم الإنتاج $Q=0$.

**الحل.** لنحسب دالة التكاليف الكلية $TC(Q)$

لدينا

$$TC(Q)=\int MC(Q)dQ$$
$$=\int 4Q^2+3Q+1dQ$$
$$=\frac{4}{3}Q^3+\frac{3}{2}Q^2+Q+c$$

وبما أن $TC(0)=15$ فان $c=15$ ومنه

$$TC(Q)=\frac{4}{3}Q^3+\frac{3}{2}Q^2+Q+15$$

**تمرين 7−7.** إذا كان الإيراد الحدي بالدينار لأحد منتجات مصنع ما هي

$$MR(Q)=2000+0.2Q \qquad DA$$

− ما هو التغير في الإيراد الكلي عندما تزداد المبيعات من 10 إلى 20 وحدة ؟

**الحل.** لدينا

$$\Delta RT=\int_{10}^{20} MR(Q)dQ$$
$$=\int_{10}^{20} 2000+0.2QdQ$$
$$=\left[2000Q+0.2\frac{Q^2}{2}\right]_{10}^{20}$$
$$=\left[2000Q+0.1Q^2\right]_{10}^{20}$$
$$=40040-20010$$
$$=20030$$

أي إذا زادت المبيعات من 10 إلى 20 وحدة، فهناك ربح بقيمة 20030 دج.

**تمرين 7−8.** التكلفة الطبية السنوية للعامل الواحد بالدينار الجزائري في أحد المصانع، تعطى بالعلاقة التالية

$$C(x)=3000\left(2+0.4x^3\right) \qquad DA$$

مع $x$ تمثل سنوات خدمة العامل بالمصنع.

− قدِّر التكلفة الطبية للعامل الواحد بعد مرور ست سنوات من الآن.

**الحل.** التكلفة الطبية للعامل الواحد بعد مرور ست سنوات من الآن هي

$$\begin{aligned} C &= \int_0^6 C(x)\,dx \\ &= \int_0^6 \left(3000\left(2+0.4x^3\right)\right)dx \\ &= 3000\int_0^6 \left(2+0.4x^3\right)dx \\ &= 3000\left[2x+0.1x^4\right]_0^6 \\ &= 424800 \quad DA \end{aligned}$$

أي، العامل الواحد سيكلف المصنع طبيا بعد ست سنوات من الآن ما يقارب 424800 دينارا جزائريا.

**تمرين 7−9.** إذا كانت دالة الإيراد الحدي لشركة ما معطاة بالعلاقة التالية

$$MR(Q) = Q-4+\frac{3}{Q-1} \qquad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد دالة الإيراد الكلي.

**الحل.** دالة الإيراد الكلي هي

$$\begin{aligned} TR(Q) &= \int MR(Q)\,dQ \\ &= \int\left(Q-4+\frac{3}{Q-1}\right)dQ \\ &= \frac{1}{2}Q^2-4Q+3\ln\left|Q-1\right|+c \end{aligned}$$

## 5−2− تمارين للحل

**تمرين 7−10.** أوجد الدوال الأصلية التالية

$$\int 3+2x^4-x^6+\frac{1}{x}\,dx \qquad\qquad \int \frac{4}{x^5}+e^{2x-1}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$$

$$\int \frac{x}{\left(5x^2-1\right)^3}+\frac{x^2-1}{x^2}\,dx \qquad\qquad \int x^3\left(3x^4+1\right)^5+\frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx$$

**تمرين 7−11.** باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب ما يلي

$$(I)=\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+5}\,dx \qquad\qquad (J)=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

**تمرين 7−12.** باستعمال التكامل بتغيير المتغير، أحسب ما يلي

$$(I)=\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \left(y=\sqrt{x}\right) \qquad\qquad (J)=\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx \quad \left(y=x^3+1\right)$$

$$(K)=\int_{-1}^{0} x^2\left(x^3-1\right)^2 dx \quad \left(y=x^3-1\right)$$

**تمرين 7−13.** باستعمال التكامل بالتفريق إلى كسور بسيطة، أحسب ما يلي

$$(I)=\int_3^4 \frac{4x-1}{x^2+3x-10}\,dx \qquad\qquad (J)=\int_0^1 \frac{x^3-11x-13}{x^2+4x+4}\,dx$$

**تمرين 7−14.** إذا كانت التكلفة الحدية لإنتاج نوع من السلع عند مستوى الإنتاج $Q$ هي

$$MC(Q)=10+0.3Q \quad DA$$

- أوجد التكلفة الكلية لإنتاج 120 وحدة.

**تمرين 7−15.** إذا كان الإيراد الحدي لمنتج معين معطى بالعلاقة

$$MR(Q)=50-0.4Q \quad DA$$

- جِد الإيراد الكلي إذا نقصت المبيعات من 400 إلى 100 وحدة.

# الفصل الثامن

# المعادلات

# التفاضلية

المعادلات التفاضلية هي المعادلات التي تربط بين مجهولين أو أكثر ومشتقاتها. سنتطرق في هذا الفصل إلى المعادلات التفاضلية من الرتبتين الأولى والثانية.

**تعريف 8-1.** نسمي *معادلة تفاضلية عادية من الرتبة* $n$ (*an ordinary differential equation of order* $n$)، *كل معادلة من الشكل*

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0 \dots\dots\dots\dots (*)$$

*حيث* $F$ *دالة حقيقية معلومة ذات* $(n+2)$ *متغيرا و* $y$ *دالة حقيقية مجهولة ذات متغير حقيقي* $x$ *ويُرمز لمشتقة* $y$ *من الرتبة* $p$ *بـ* $y^{(p)}$ *مع* $p = \overline{1,n}$ . [1]

*نقول عن دالة حقيقية* $f$ *معرفة على مجال* $I$ *من* $R$*، إنها* حل *أو* تكامل *للمعادلة التفاضلية (*) على المجال* $I$*، إذا كانت* $f$ *قابلة للاشتقاق* $n$ *مرة على المجال* $I$*، بحيث*

[2] $$\forall x \in I : F\left(x, f(x), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$

**ملاحظة 8-1**

1) تسمى العبارة (*) بالصيغة المشتقة للمعادلة التفاضلية ويمكن أن تُكتب هذه الأخيرة بالصيغة التفاضلية التالية

[3] $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

2) لنفرض أن لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى على الشكل

$$y' = \varphi(x) \dots\dots\dots (**)$$

بحيث $\varphi$ دالة حقيقية مستمرة على مجال $I$ من $R$ . الدالة

$$f : I \to R$$
$$x \mapsto f(x) = \int_a^x \varphi(t)dt; \quad a \in I$$

تسمى حلا خاصا (particular solution) للمعادلة التفاضلية (**)، بحيث $f$ دالة أصلية ل $\varphi$ .

الحل العام (general solution) للمعادلة التفاضلية (**) هو

[4] $$f : I \to R$$
$$x \mapsto f(x) = \int_a^x \varphi(t)dt + c; \quad a \in I, c \in R$$

3) رتبة (order) معادلة تفاضلية تُنسب إلى رتبة أعلى مشتق في المعادلة، فنقول أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى، إذا كانت على الشكل

$$F(x, y, y') = 0$$

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 1، ص. 327.
[2] نفسه. تعريف 2، ص. 327.
[3] عمر صخري. *مبادئ الاقتصاد الرياضي*. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1984، ص. 163.
[4] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. مثال، ص ص. 327-328.

وأنها من الرتبة الثانية، إذا كانت على الشكل

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

وبشكل عام، أنها من الرتبة $n$، إذا كانت على الشكل

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

4) درجة (degree) معادلة تفاضلية تُنسب إلى أعلى قوة (أس) يكون مرفوعا بها المشتق ذو الرتبة العليا،[1] فمثلا

$y' = 2x - 3$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

$(y')^6 + x^8 = 0$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة السادسة.

$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x^5 = 0$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 - \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^7 = -x^9$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة والدرجة الثانية.

ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والرتبتين الأولى والثانية.

## 1- المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى (First-Order Differential Equations)

**تعريف 8-2.** *نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، كل معادلة على الشكل*

$$y' = h(x, y)$$

*حيث $h$ دالة حقيقية معرفة على مجال $I$ من $R^2$ في $R$. إن كان $y(x)$ حلا للمعادلة السابقة، فإنه وحيد من أجل الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$.*[2]

لا توجد قاعدة عامة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ورغم أن بعضها ليس لها حل، إلا أن البعض الآخر يأخذ أنماطا معينة يسهُل حلها، نستعرض أشهرها فيما يلي.

### 1-1- المعادلات التفاضلية منفصلة المتغيرات (Differential Equations with Variables Separable)

**تعريف 8-3.** *نسمي معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات، كل معادلة على الشكل*

$$f(y)y' = g(x)$$

*حيث و دالتان معرفتان على الترتيب على مجالين $I_1$ و $I_2$ من $R$. باستخدام الصيغة التفاضلية $y' = \frac{dy}{dx}$، تُكتب المعادلة السابقة كالتالي*

$$f(y)dy = g(x)dx$$

*ولحل المعادلة، نكتب*

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

*أي*

$$F(y) = G(x) + c$$

---

[1] عمر صخري. المرجع السابق، ص ص. 163-164.

[2] Viatcheslav Vinogradov. *A Cook-book of mathematics*. CERGE-EI Lecture Notes, Prague, 1999, p. 63.

*حيث $F$ و $G$ دالتان أصليتان ل $f$ و $g$ على الترتيب و $c$ ثابت اختياري.* [1]

*تكون الدالة القابلة للاشتقاق $u: I \subset I_1 \to I_2$ حلا للمعادلة التفاضلية السابقة، إذا كان*

$$F(u(x)) = G(x) + c, \quad \forall x \in I$$

*إذا كانت الدالة $F$ تقبل دالة عكسية، فيمكن تعيين عبارة $u$ كما يلي*

$$u(x) = F^{-1}\left(G(x) + c\right), \quad \forall x \in I$$ [2]

**أمثلة 8-1.** لنحل المعادلتين التفاضليتين التاليتين

1) $yy' - 1 = 0 .............(1)$

لدينا

$$(1) \Leftrightarrow yy' = 1$$
$$\Leftrightarrow y\frac{dy}{dx} = 1$$
$$\Leftrightarrow ydy = dx$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (1)، نجد

$$(1) \Leftrightarrow \int ydy = \int dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = x + c \,/\, c \in R$$
$$\Leftrightarrow y^2 = 2x + 2c$$
$$\Leftrightarrow y^2 = 2x + c' \,/\, c' \in R$$

التطبيق $y^2$ ليس تقابلا وبالتالي لا يقبل تطبيقا عكسيا على $R$. إذا حلول المعادلة (1) هي

$$y^2(x) = 2x + c' \,/\, c' \in R$$

2) $y' - x = 0 .............(2)$ مع $y(0) = 3$

لدينا

$$(2) \Leftrightarrow y' = x$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x$$
$$\Leftrightarrow dy = xdx$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (2)، نجد

$$(2) \Leftrightarrow \int dy = \int xdx$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + c \,/\, c \in R$$

بما أن $y(0) = 3$ ، فإن $y(0) = \frac{1}{2}(0)^2 + c = 3 \Leftrightarrow c = 3$

إذا، للمعادلة (2) حل وحيد هو

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$$

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص ص. 328-329.

[2] نفسه، ص. 328.

## 2−1− المعادلات التفاضلية المتجانسة (Homogeneous Differential Equations)

**تعريف 8−4.** *نقول عن دالة $f(x,y)$ أنها متجانسة من الدرجة n، إذا كان من أجل كل عدد حقيقي $\lambda$*

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$ [1]

**تعريف 8−5.** *إذا كان لدينا معادلة تفاضلية من الشكل*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0............(E)$$

*بحيث $M$ و $N$ دالتان متجانستان من الدرجة نفسها n، فإن تغيير المتغير $y=tx$ يجعل المعادلة $(E)$ معادلة ذات متغيرين منفصلين $t$ و $x$ وللحصول على حلول المعادلة $(E)$، نعوض بعد ذلك $t$ ب $\frac{y}{x}$.* [2]

**أمثلة 8−2.** لنحل المعادلة التفاضلية التالية

$$(x+y)dx-xdy=0..........(3)$$

لنبين أن المعادلة (3) متجانسة. نضع $M(x,y)=x+y$ و $N(x,y)=-x$. الدالتان $M$ و $N$ دالتان متجانستان من الدرجة الأولى، بحيث

$$\begin{aligned}M(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda x)+(\lambda y)\\&=\lambda(x+y)\\&=\lambda M(x,y)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}N(\lambda x,\lambda y)&=-(\lambda x)\\&=\lambda(-x)\\&=\lambda N(x,y)\end{aligned}$$

نضع $y=tx$ ومنه $dy=tdx+xdt$. بالتعويض في المعادلة (3)، نجد

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow(x+tx)dx-x(tdx+xdt)=0\\&\Leftrightarrow xdx+txdx-xtdx-x^2dt=0\\&\Leftrightarrow xdx-x^2dt=0\\&\Leftrightarrow x(dx-xdt)=0\end{aligned}$$

بتقسيم طرفي آخر مساواة من المعادلة (3) على $x$، نجد

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow dx-xdt=0\\&\Leftrightarrow dx=xdt\\&\Leftrightarrow \frac{dx}{x}=dt\end{aligned}$$

وعليه، تحصلنا على معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين $t$ و $x$، بمكاملة طرفي آخر معادلة تفاضلية، نجد

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow\int\frac{dx}{x}=\int dt\\&\Leftrightarrow \ln|x|=t+c\,/\,c\in R\\&\Leftrightarrow |x|=e^{t+c}=e^t.e^c\end{aligned}$$

نميز حالتين هما

---

(1) Viatcheslav Vinogradov. Idem. Definition 53, p. 64.
(2) Ibid, p. 64.

إذا كان $x \geq 0$ ، فإن $|x| = x = e^c.e^t$

إذا كان $x < 0$ ، فإن $|x| = -x \Leftrightarrow x = -e^c.e^t$

وعليه، يمكن إجمال الحلين السابقين في الشكل العام التالي

$$x = ke^t \,/\, k \in R$$

لكن $t = \frac{y}{x}$ وعليه، من أجل $x \neq 0$ ، لدينا

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow x = ke^{\frac{y}{x}} \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{y}{x}} = \frac{x}{k} \\ &\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \ln\left|\frac{x}{k}\right| = \ln|x| - \ln|k| \\ &\Leftrightarrow y = x\left(\ln|x| - k'\right) / k' \in R\end{aligned}$$

## 1-3- المعادلات التفاضلية الخطية (Linear Differential Equtions)

**تعريف 8-6.** نسمي *معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، كل معادلة من الشكل*

$$y' + a(x)y = b(x)........(*)$$

بحيث $a$ و $b$ دالتان مستمرتان من $J \subset R$ نحو $R$.

*نرفق المعادلة $(*)$ بالمعادلة الخطية المتجانسة*

$$y' + a(x)y = 0..........(**)$$

*الحل العام للمعادلة $(*)$ هو عبارة عن جمع للحل العام للمعادلة $(**)$ (complementary function) وحل خاص (particular integral) للمعادلة $(*)$.*[1]

- *لإيجاد الحل العام للمعادلة $(**)$ ، نكتبها بالشكل التالي من أجل* $y \neq 0$

$$\begin{aligned}(**) &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)y \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx\end{aligned}$$

*بمكاملة طرفي آخر معادلة، نجد*

$$\begin{aligned}(**) &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = -\int a(x)dx + c \,/\, c \in R \\ &\Leftrightarrow |y| = e^{-\int a(x)dx + c} \\ &\Leftrightarrow |y| = e^c.e^{-\int a(x)dx}\end{aligned}$$

*وعليه، الحل العام للمعادلة $(**)$ هو*

[2] $$y(x) = ke^{-\int a(x)dx} \,/\, k \in R..........(1)$$

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 331.

[2] عمر صخري. المرجع السابق، ص ص. 164-165.

- *لإيجاد حل خاص للمعادلة* $(*)$*، نستخدم طريقة تغيير الثابت*[*]*، أي البحث عن حل خاص للمعادلة*

$$y(x)=k(x)e^{-\int a(x)dx}$$

*وعليه*

$$y'(x)=k'(x)e^{-\int a(x)dx}-k(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}..........(2)$$

*وبتعويض المعادلتين (1) و (2) في المعادلة* $(*)$*، نجد*

$$(*)\Leftrightarrow\left(k'(x)e^{-\int a(x)dx}-k(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}\right)+a(x)\left(k(x)e^{-\int a(x)dx}\right)=b(x)$$

*أي*

$$(*)\Leftrightarrow k'(x)e^{-\int a(x)dx}=b(x)$$
$$\Leftrightarrow k'(x)=b(x)e^{\int a(x)dx}$$

*ومنه*

$$(*)\Leftrightarrow k(x)=\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

*إذا، المعادلة* $(*)$ *تقبل حلا خاصا هو*

[1] $$y(x)=e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx............(3)$$

*وعليه، الحل العام للمعادلة* $(*)$ *هو حاصل جمع المعادلتين (1) و(3)، أي*

$$y(x)=ke^{-\int a(x)dx}+e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

*إذا*

[2] $$y(x)=e^{-\int a(x)dx}\left(k+\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx\right)$$

**أمثلة 8-3.** لنحل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'+y=3...............(1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(1)$

$$y'+y=0...............(2)$$

- لنبحث عن الحل العام للمعادلة $(2)$ التي هي معادلة ذات متغيرين منفصلين، بحيث من أجل $y\neq 0$، لدينا

$$(2)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-y$$
$$\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=-dx$$

---

[*] سُميت الطريقة بهذا الاسم، لأننا غيرنا الثابت $k$ إلى دالة ذات متغير $x$.

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 332.

[2] Viatcheslav Vinogradov. Idem, p. 65.

بمكاملة طرفي آخر معادلة، نجد

$$(2) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx$$
$$\Leftrightarrow \ln|y| = -x + c \,/\, c \in R$$
$$\Leftrightarrow |y| = e^{-x+c}$$
$$\Leftrightarrow |y| = e^{c}.e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow y = ke^{-x} \,/\, k \in R$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(2)$ هو

$$y(x) = ke^{-x} \,/\, k \in R .............(3)$$

- لنبحث عن حل خاص للمعادلة $(1)$، نستخدم طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x) = k(x)e^{-x} ............(4)$$

وعليه

$$y'(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} .............(5)$$

بتعويض المعادلتين $(3)$ و$(5)$ في المعادلة $(1)$، نجد

$$(1) \Leftrightarrow k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = 3$$
$$\Leftrightarrow k'(x)e^{-x} = 3$$
$$\Leftrightarrow k'(x) = 3e^{x}$$
$$\Leftrightarrow k(x) = 3\int e^{x}dx$$
$$\Leftrightarrow k(x) = 3e^{x} + c' \,/\, c' \in R$$

بتعويض عبارة الدالة $k$ في المعادلة $(4)$، نجد

$$(4) \Leftrightarrow y(x) = (3e^{x} + c')e^{-x}$$
$$= c'e^{-x} + 3$$

إذا، للمعادلة $(1)$ حل خاص هو

$$y(x) = c'e^{-x} + 3 ................(6)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(3)$ و$(6)$، أي

$$y(x) = ke^{-x} + c'e^{-x} + 3$$
$$= (k + c')e^{-x} + 3$$
$$= k'e^{-x} + 3 \,/\, k' \in R$$

### 1-4- المعادلات التفاضلية لبرنولي (Barnauli Equation)

**تعريف 8-7.** نسمي *معادلة تفاضلية لبرنولي*، *كل معادلة من الشكل*

$$y' + a(x)y = b(x)y^{n} ..........(*)$$

*بحيث $a$ و $b$ دالتان مستمرتان على مجال $I$ من $R$ و $n$ عدد حقيقي يختلف عن $0$ و $1$.*[1]

*لحل المعادلة $(*)$، نحاول إعادة كتابتها على شكل معادلة تفاضلية خطية وذلك بضرب المعادلة $(*)$ في $y^{-n}$،*

[1] من أجل $n=0$ أو $n=1$، تكون المعادلة $(*)$ معادلة خطية، لذا نستثني هاتين الحالتين.

*فيصبح لدينا*

$$y^{-n}y'+a(x)y^{1-n}=b(x)$$

*ثم نضع* $z=y^{1-n}$ *، فنحصل على المعادلة التفاضلية الخطية التالية*

$$\frac{1}{1-n}z'+a(x)z=b(x)$$

*التي يمكن حلها بالطريقة الموضحة في التعريف 8-6.* [1]

**أمثلة 8-4.** لنحل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'+(4-y)y=0..........(1)$$

لدينا

$$(1)\Leftrightarrow y'+4y-y^2=0$$
$$\Leftrightarrow y'+4y=y^2$$

ومنه، المعادلة $(1)$ لبرنولي حيث $n=2$. نضرب طرفي المعادلة $(1)$ في $y^{-2}$، نجد

$$(1)\Leftrightarrow y^{-2}y'+4y^{-1}=1$$

نضع $z=y^{-1}=\dfrac{1}{y}$ ومنه $z'=-y'y^{-2}$ وعليه

$$(1)\Leftrightarrow -z'+4z=1$$
$$\Leftrightarrow z'-4z=-1................(2)$$

وبهذا أصبحت المعادلة $(1)$ معادلة تفاضلية خطية $(2)$.

- نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(2)$

$$z'-4z=0................(3)$$

المعادلة $(3)$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين، بحيث من أجل $z\neq 0$، لدينا

$$(3)\Leftrightarrow z'=4z$$
$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx}=4z$$
$$\Leftrightarrow \frac{dz}{z}=4dx$$

بمكاملة طرفي آخر معادلة، نجد

$$(3)\Leftrightarrow \int\frac{dz}{z}=4\int dx$$
$$\Leftrightarrow \ln|z|=4x+c\,/\,c\in R$$
$$\Leftrightarrow |z|=e^{4x+c}$$
$$\Leftrightarrow |z|=e^{c}.e^{4x}$$
$$\Leftrightarrow z=ke^{4x}\,/\,k\in R$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(3)$ هو

$$z(x)=ke^{4x}\,/\,k\in R.............(4)$$

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 333.

- لنبحث عن حل خاص للمعادلة $(2)$، نستخدم طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$z(x)=k(x)e^{4x}\text{............}(5)$$

وعليه

$$z'(x)=k'(x)e^{4x}+4k(x)e^{4x}\text{.............}(6)$$

بتعويض المعادلتين $(4)$ و$(6)$ في المعادلة $(2)$، نجد

$$\begin{aligned}(2)&\Leftrightarrow k'(x)e^{4x}+4k(x)e^{4x}-4k(x)e^{4x}=-1\\&\Leftrightarrow k'(x)e^{4x}=-1\\&\Leftrightarrow k'(x)=-e^{-4x}\\&\Leftrightarrow k(x)=\int -e^{-4x}dx\\&\Leftrightarrow k(x)=\frac{1}{4}e^{-4x}+c'/c'\in R\end{aligned}$$

بتعويض عبارة الدالة $k$ في المعادلة $(5)$، نجد

$$\begin{aligned}(5)\Leftrightarrow z(x)&=\left(\frac{1}{4}e^{-4x}+c'\right)e^{4x}\\&=c'e^{4x}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

إذا، للمعادلة $(2)$ حل خاص هو

$$z(x)=c'e^{4x}+\frac{1}{4}\text{.................}(7)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(2)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(4)$ و$(7)$، أي

$$\begin{aligned}z(x)&=ke^{4x}+c'e^{4x}+\frac{1}{4}\\&=(k+c')e^{4x}+\frac{1}{4}\\&=k'e^{4x}+\frac{1}{4}/k'\in R\end{aligned}$$

بما أن $z=\frac{1}{y}$ ، فإن $y=\frac{1}{z}$ وعليه، الحل العام للمعادلة $(1)$ هو

$$y(x)=\frac{1}{k'e^{4x}+\frac{1}{4}}/k'\in R$$

## 2- المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية (Second-Order Differential Equations)

**تعريف 8-8.** *ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين و $f:I\rightarrow R$ دالة معرفة ومستمرة. تُسمى المعادلة التفاضلية*

$$y''+ay'+by=f(x)\text{.........}(E_1)$$

*معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة والمعادلة المتجانسة المرافقة لها هي*

$$^{(1)}\quad y''+ay'+by=0\text{.........}(E_2)$$

*الحل العام للمعادلة $(E_1)$ هو مجموع الحل العام للمعادلة $(E_2)$ وحل خاص للمعادلة $(E_1)$.*

*الحل العام للمعادلة $(E_2)$ يُكتب على الشكل*

---

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 334.

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)............(E_3)$$

بحيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان اختياريان و $y_1$ و $y_2$ حلان خاصان للمعادلة $(E_2)$.

لإيجاد الحلين الخاصين $y_1$ و $y_2$، نرفق المعادلة $(E_1)$ بمعادلتها المميزة (characteristic equation) التالية

(1) $$\lambda^2+a\lambda+b=0...............(E_4)$$

نلاحظ أن المعادلة $(E_4)$ عبارة عن معادلة لكثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز $\Delta$، بحيث $\Delta=a^2-4b$ وهنا نميز ثلاث حالات

1) إذا كان $\Delta>0$، فإن المعادلة $(E_4)$ تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما

$$\lambda_1=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{و} \quad \lambda_2=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$$

وعليه، الحلان الخاصان ل $(E_2)$ هما

$$y_1(x)=e^{\lambda_1x} \quad \text{و} \quad y_2(x)=e^{\lambda_2x}$$

ومنه، الحل العام للمعادلة $(E_2)$ هو

$$y(x)=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$$

2) إذا كان $\Delta=0$، فإن المعادلة $(E_4)$ تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو

$$\lambda=\frac{-a}{2}$$

وعليه، الحلان الخاصان ل $(E_2)$ هما

$$y_1(x)=e^{\lambda x} \quad \text{و} \quad y_2(x)=xe^{\lambda x}$$

ومنه، الحل العام للمعادلة $(E_2)$ هو

(2) $$y(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$$

3) إذا كان $\Delta<0$، فإن المعادلة $(E_4)$ تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$$\lambda_1=\alpha+i\beta \quad \text{و} \quad \lambda_2=\alpha-i\beta$$

حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان مع $i^2=-1$ وعليه، الحلان الخاصان ل $(E_2)$ هما

$$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{و} \quad y_2(x)=e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

ومنه، الحل العام للمعادلة $(E_2)$ هو

(3) $$y(x)=c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

لدينا طريقتين لإيجاد حل خاص للمعادلة $(E_1)$ هما

أ) طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x)=A(x)y_1(x)+B(x)y_2(x)$$

بحيث $y_1$ و $y_2$ حلان خاصان ل $(E_2)$ و A و B دالتان قابلتان للاشتقاق تحققان جملة المعادلتين التاليتين

---

(1) Viatcheslav Vinogradov. Idem, p. 66.

(2) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 335.

(3) نفسه، ص. 335.

$$(1)\quad \begin{cases} A'(x)y_1(x)+B'(x)y_2(x)=0 \\ A'(x)y_1'(x)+B'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

*ب) إذا كان*

$$y''+ay'+by=f_1(x)+f_2(x)+....+f_r(x)$$

*وكان* $y_{p_1}(x)$ *حلا خاصا للمعادلة* $y''+ay'+by=f_1(x)$ *و* $y_{p_2}(x)$ *حلا خاصا للمعادلة* $y''+ay'+by=f_2(x)$ *و...و* $y_{p_r}(x)$ *حلا خاصا للمعادلة* $y''+ay'+by=f_r(x)$، *فإن المعادلة* $(E_1)$ *لها حل خاص هو*

$$(2)\quad y(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+...+y_{p_r}(x)$$

**أمثلة 8-5.** لنحل المعادلتين التفاضليتين التاليتين

1) $y''+y'-2y=1..........(1)$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل (1)

$$y''+y'-2y=0..........(2)$$

- لنجد الحل العام للمعادلة (2).

المعادلة المميزة للمعادلة (1) هي

$$\lambda^2+\lambda-2=0............(3)$$

المعادلة (3) هي معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز $\Delta$، بحيث $\Delta=9>0$

وعليه، المعادلة (3) تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما

$$\lambda_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2 \quad \text{و} \quad \lambda_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=1$$

وعليه، الحل العام للمعادلة (2) هو

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}...............(4)$$

- لنجد حلا خاصا للمعادلة (1).

بما أن الطرف الثاني للمعادلة (1) هو عدد ثابت (أي 1)، فنبحث عن حل خاص $y_p$ على شكل عدد ثابت، أي

$$y_p(x)=a \,/\, a\in R$$

وعليه $y_p'(x)=y_p''(x)=0$ . بتعويض $y_p$ ، $y_p'$ و $y_p''$ في المعادلة (1)، نجد

$$\begin{aligned} y_p''+y_p'-2y_p=1 &\Leftrightarrow 0+0-2(a)=1 \\ &\Leftrightarrow -2a=1 \\ &\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ومنه، للمعادلة (1) حل خاص هو

$$y_p(x)=-\frac{1}{2}..............(5)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة (1) هو حاصل جمع المعادلتين (4) و(5)، أي

---

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 337.

(2) Viatcheslav Vinogradov. Idem, p. 67.

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}-\frac{1}{2}$$

2) $y''+6y'+9y=e^{-3x}$ مع $y(0)=1$ و $y'(0)=0$ .

لتكن المعادلة

$$y''+6y'+9y=e^{-3x}\ldots\ldots\ldots..(E_1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(E_1)$

$$y''+6y'+9y=0\ldots\ldots\ldots..(E_2)$$

- لنجد الحل العام للمعادلة $(E_2)$ .

المعادلة المميزة للمعادلة $(E_1)$ هي

$$\lambda^2+6\lambda+9=0\ldots\ldots\ldots\ldots(E_3)$$

المعادلة $(E_3)$ هي معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز $\Delta$، بحيث $\Delta=0$

وعليه، المعادلة $(E_3)$ تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو

$$\lambda=\frac{-6}{2}=-3$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(E_2)$ هو

$$y(x)=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E_4)$$

- لنجد حلا خاصا للمعادلة $(E_1)$ باستعمال طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x)=A(x)e^{-3x}+B(x)xe^{-3x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E_5)$$

بحيث $A$ و $B$ دالتان قابلتان للاشتقاق تحققان جملة المعادلتين التاليتين

$$(I)\begin{cases}A'(x)e^{-3x}+B'(x)xe^{-3x}=0\\ A'(x)\left(-3e^{-3x}\right)+B'(x)\left(e^{-3x}-3xe^{-3x}\right)=e^{-3x}\end{cases}$$

أي

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}A'(x)e^{-3x}+B'(x)xe^{-3x}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)\\ -3A'(x)e^{-3x}+B'(x)e^{-3x}-3B'(x)xe^{-3x}=e^{-3x}\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

ومنه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}3(1)+(2)\Leftrightarrow B'(x)e^{-3x}=e^{-3x}\ldots\ldots\ldots.(3)\\ A'(x)e^{-3x}+B'(x)xe^{-3x}=0\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)\end{cases}$$

وعليه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}B'(x)=1\\ (1)\Leftrightarrow A'(x)e^{-3x}+xe^{-3x}=0\end{cases}$$

ومنه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}B(x)=\int dx=x\\ e^{-3x}\left(A'(x)+x\right)=0\end{cases}$$

وعليه

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) = x \\ A'(x) + x = 0 \Leftrightarrow A'(x) = -x \end{cases}$$

إذا

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) = x \\ A(x) = -\int x dx = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

وعليه، بتعويض عبارتي الدالتين $A$ و $B$ في المعادلة $(E_5)$، نجد

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-3x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E_6)$$

وهو حل خاص للمعادلة $(E_1)$.

الحل العام للمعادلة $(E_1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(E_4)$ و $(E_6)$ ، أي

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-3x} \\ &= e^{-3x}\left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) \end{aligned}$$

بما أن $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ ، علينا تعويض $x = 0$ في عبارتي $y$ و $y'$ لإيجاد المجهولين $c_1$ و $c_2$.

لدينا $y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$ و

$$\begin{aligned} y'(x) &= -3e^{-3x}\left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) + e^{-3x}(c_2 + x) \\ &= e^{-3x}\left(-3c_1 + c_2 + (-3c_2 + 1)x - \frac{3}{2}x^2\right) \end{aligned}$$

ومنه $y'(0) = 0 \Leftrightarrow -3c_1 + c_2 = 0$ وبما أن $c_1 = 1$ ، فإن $-3 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 3$.

إذا للمعادلة $(E_1)$ حل عام وحيد هو

$$y(x) = e^{-3x}\left(1 + 3x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

## 3- تمارين

### 3-1- تمارين محلولة

**تمرين 8-1.** حل المعادلات التفاضلية التالية

1) $dy = -y^2\left(e^x + 1\right)dx$

2) $y' = \frac{y}{\sqrt{x}}$ مع $y(1) = 1$

3) $2yy' - 3x = 0$ مع $y(0) = 2$

4) $dy = \frac{\sqrt{y}}{x}dx$ مع $y(1) = 4$

5) $y' = \frac{-\sqrt{x}}{y^2}$

6) $y' - (y + 2)x = 0$ مع $y(0) = 5$

7) $x^2 dx + xy dy = 0$ مع $y(1) = 0$

**الحل.** المعادلات السبع المعطاة هي معادلات منفصلة المتغيرات

1) لتكن المعادلة

$$dy=-y^{2}\left(e^{x}+1\right)dx..........(1)$$

وعليه

$$(1)\Leftrightarrow -\frac{1}{y^{2}}dy=\left(e^{x}+1\right)dx$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة $(1)$، نجد

$$(1)\Leftrightarrow \int -\frac{1}{y^{2}}dy=\int\left(e^{x}+1\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}=e^{x}+x+c\,/\,c\in R$$

$$\Leftrightarrow y(x)=\frac{1}{e^{x}+x+c}\,/\,c\in R$$

2) نكتب من أجل $x\in R_{+}^{*}$، المعادلة المعطاة كما يلي

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{\sqrt{x}}.........(2)$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة $(2)$، نجد

$$(2)\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \ln|y|=2\sqrt{x}+c\,/\,c\in R$$

$$\Leftrightarrow |y|=e^{2\sqrt{x}+c}$$

$$\Leftrightarrow |y|=e^{c}.e^{2\sqrt{x}}$$

نميز حالتين هما $\forall x\in R_{+}^{*}: y(x)=\pm e^{c}.e^{2\sqrt{x}}\,/\,c\in R$ ويمكن إجمال هذه الحلول في الشكل العام التالي

$$y(x)=ke^{2\sqrt{x}}\,/\,x\in R_{+}^{*},k\in R$$

بما أن $y(1)=1$ ، فإن

$$y(1)=ke^{2\sqrt{1}}=1\Leftrightarrow ke^{2}=1$$

$$\Leftrightarrow k=e^{-2}$$

إذا، للمعادلة $(2)$ حل وحيد هو

$$y(x)=e^{-2}.e^{2\sqrt{x}}=e^{2\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

3) لتكن المعادلة

$$2yy'-3x=0..................(3)$$

وعليه

$$(3)\Leftrightarrow 2yy'=3x$$

$$\Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx}=3x$$

$$\Leftrightarrow 2ydy=3xdx$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة $(3)$، نجد

$$(3) \Leftrightarrow \int 2y dy = \int 3x dx$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{2}x^2 + c \,/\, c \in R$$

التطبيق $y^2$ ليس تقابلا وبالتالي لا يقبل تطبيقا عكسيا على $R$. إذا حلول المعادلة (3) هي

$$y^2(x) = \frac{3}{2}x^2 + c \,/\, c \in R$$

بما أن $y(0) = 2$ ، فإن $y^2(0) = y(0)y(0) = 4$ وعليه

$$y^2(0) = \frac{3}{2}(0)^2 + c = 4 \Leftrightarrow c = 4$$

إذا، للمعادلة (3) حل وحيد هو

$$y^2(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4$$

4) نكتب من أجل $x \neq 0$ ، المعادلة المعطاة كما يلي

$$dy = \frac{\sqrt{y}}{x}dx \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \frac{1}{x}dx.............(4)$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (4)، نجد

$$(4) \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{y} = \ln|x| + c \,/\, c \in R$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(\ln|x| + c\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}\ln|x| + c' \,/\, c' = \frac{1}{2}c$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + c'\right)^2 \,/\, c' \in R$$

بما أن $y(1) = 4$ ، فإن

$$y(1) = \left(\frac{1}{2}\ln|1| + c'\right)^2 = 4 \Leftrightarrow c'^2 = 4 \Leftrightarrow c' = \pm 2$$

إذا، للمعادلة (4) حلان هما

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}\ln|x| \pm 2\right)^2$$

5) نكتب من أجل $x \in R_+$ ، المعادلة المعطاة كما يلي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{x}}{y^2} \Leftrightarrow y^2 dy = -\sqrt{x}dx.............(5)$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (5)، نجد

$$\begin{aligned}(5) &\Leftrightarrow \int y^2dy=-\int\sqrt{x}dx\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}y^3=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c\,/\,c\in R\\ &\Leftrightarrow y^3=-2x^{\frac{3}{2}}+c'\,/\,c'=3c\\ &\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{-2x^{\frac{3}{2}}+c'}\,/\,c'\in R\end{aligned}$$

6) لتكن المعادلة

$$y'-(y+2)x=0..................(6)$$

وعليه

$$\begin{aligned}(6) &\Leftrightarrow y'=(y+2)x\\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=(y+2)x\\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y+2}=xdx\end{aligned}$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (6)، نجد

$$\begin{aligned}(6) &\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y+2}=\int xdx\\ &\Leftrightarrow \ln|y+2|=\frac{1}{2}x^2+c\,/\,c\in R\\ &\Leftrightarrow |y+2|=e^{\frac{1}{2}x^2+c}\\ &\Leftrightarrow |y+2|=e^c.e^{\frac{1}{2}x^2}\end{aligned}$$

نميز حالتين هما

إذا كان $y\geq 2$ ، فإن $|y+2|=y+2=e^c.e^{\frac{1}{2}x^2}\Leftrightarrow y=e^c.e^{\frac{1}{2}x^2}-2$

إذا كان $x<2$ ، فإن $|y+2|=-y-2=e^c.e^{\frac{1}{2}x^2}\Leftrightarrow y=-e^c.e^{\frac{1}{2}x^2}-2$

ويمكن إجمال الحلين السابقين في الشكل العام التالي

$$y(x)=ke^{\frac{1}{2}x^2}-2\,/\,\forall x,k\in R$$

بما أن $y(0)=5$ ، فإن

$$y(0)=k-2=5\Leftrightarrow k=7$$

إذا، للمعادلة (6) حل وحيد هو

$$y(x)=7e^{\frac{1}{2}x^2}-2\,/\,\forall x\in R$$

7) لتكن المعادلة

$$x^2dx+xydy=0..........(7)$$

وعليه

$$(7)\Leftrightarrow x(xdx+ydy)=0$$

بتقسيم طرفي المساواة في المعادلة (7) على $x$ ، نجد

$$\begin{aligned}(7) &\Leftrightarrow xdx+ydy=0\\ &\Leftrightarrow ydy=-xdx\end{aligned}$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (7)، نجد

$$\begin{aligned}(7) &\Leftrightarrow \int ydy = -\int xdx \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c / c \in R \\ &\Leftrightarrow y^2 = -x^2 + 2c \\ &\Leftrightarrow y^2(x) = -x^2 + k / k \in R\end{aligned}$$

بما أن $y(1)=0$ ، فإن

$$y^2(1) = -(1)^2 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

إذا، للمعادلة (7) حل وحيد هو

$$y^2(x) = -x^2 + 1$$

**تمرين 8-2.** حل المعادلتين التفاضليتين التاليتين

1) $(x-y)dx + xdy = 0$ 2) $(x+y)dx + xdy = 0$

**الحل**

1) نضع

$$(x-y)dx + xdy = 0 \text{...........}(1)$$

المعادلة المعطاة متجانسة. نضع $M(x,y) = x-y$ و $N(x,y) = x$ . الدالتان $M$ و $N$ متجانستان من الدرجة الأولى، بحيث

$$\begin{aligned}M(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x) - (\lambda y) \\ &= \lambda x - \lambda y \\ &= \lambda(x-y) \\ &= \lambda M(x,y)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}N(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x \\ &= \lambda(x) \\ &= \lambda N(x,y)\end{aligned}$$

نضع $y = tx$ ومنه $dy = tdx + xdt$ . بالتعويض في المعادلة (1)، نجد

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow (x-tx)dx + x(tdx + xdt) = 0 \\ &\Leftrightarrow xdx - txdx + xtdx + x^2dt = 0 \\ &\Leftrightarrow xdx + x^2dt = 0 \\ &\Leftrightarrow x(dx + xdt) = 0\end{aligned}$$

بتقسيم طرفي آخر مساواة من المعادلة (1) على $x$ ، نجد

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow dx + xdt = 0 \\ &\Leftrightarrow dx = -xdt \\ &\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -dt\end{aligned}$$

وعليه، تحصلنا على معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين $t$ و $x$ ، بمكاملة طرفي آخر معادلة تفاضلية، نجد

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int dt \\ &\Leftrightarrow \ln|x| = -t + c \,/\, c \in R \\ &\Leftrightarrow |x| = e^c.e^{-t} \\ &\Leftrightarrow x = ke^{-t} \,/\, k \in R\end{aligned}$$

لكن $t = \frac{y}{x}$ وعليه، من أجل $x \neq 0$، لدينا

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x = ke^{-\frac{y}{x}} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{k} = e^{-\frac{y}{x}} \\ &\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x}{k}\right| = \frac{-y}{x} \\ &\Leftrightarrow y = -x\ln\left|\frac{x}{k}\right| \\ &\Leftrightarrow y(x) = -x\left(\ln|x| - \ln|k|\right)\end{aligned}$$

2) نضع

$$(x+y)\,dx + xdy = 0 ..........(2)$$

المعادلة المعطاة متجانسة. نضع $M(x,y) = x+y$ و $N(x,y) = x$. الدالتان $M$ و $N$ متجانستان من الدرجة الأولى، بحيث

$$\begin{aligned}M(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x) + (\lambda y) \\ &= \lambda x + \lambda y \\ &= \lambda(x+y) \\ &= \lambda M(x,y)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}N(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x \\ &= \lambda(x) \\ &= \lambda N(x,y)\end{aligned}$$

نضع $y = tx$ ومنه $dy = tdx + xdt$. بالتعويض في المعادلة $(2)$، نجد

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (x+tx)\,dx + x(tdx + xdt) = 0 \\ &\Leftrightarrow xdx + txdx + xtdx + x^2dt = 0 \\ &\Leftrightarrow (2xt + x)\,dx + x^2dt = 0 \\ &\Leftrightarrow x\big((2t+1)\,dx + xdt\big) = 0\end{aligned}$$

بتقسيم طرفي آخر مساواة من المعادلة $(2)$ على $x$، نجد

$$(2) \Leftrightarrow (2t+1)\,dx + xdt = 0$$
$$\Leftrightarrow (2t+1)\,dx = -xdt$$
$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2t+1}dt$$

وعليه، تحصلنا على معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين $t$ و $x$، بمكاملة طرفي آخر معادلة تفاضلية، نجد

$$(2) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{1}{2t+1}dt$$
$$\Leftrightarrow \ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|2t+1| + c \,/\, c \in R$$
$$\Leftrightarrow \ln|x| = \ln\left(|2t+1|\right)^{-\frac{1}{2}} + c$$
$$\Leftrightarrow \ln|x| = \ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{|2t+1|}}\right) + c$$
$$\Leftrightarrow |x| = e^{c}.e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{|2t+1|}}\right)}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{k}{\sqrt{|2t+1|}} \,/\, k \in R$$

لكن $t = \dfrac{y}{x}$ وعليه، من أجل $x \neq 0$، لدينا

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{k}{\sqrt{\left|\frac{2y}{x}+1\right|}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{k} = \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{2y}{x}+1\right|}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{k}{x} = \sqrt{\left|\frac{2y}{x}+1\right|}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{k}{x}\right)^2 = \left|\frac{2y}{x}+1\right|$$
$$\Leftrightarrow \frac{2y}{x} + 1 = \pm\left(\frac{k}{x}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{2y}{x} = \pm\left(\frac{k}{x}\right)^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{k' - x^2}{2x} \,/\, k' \in R$$

**تمرين 8−3.** حل المعادلات التفاضلية التالية

1) $y' - xy = e^{\frac{1}{2}x^2}$ مع $y(0) = -3$ 2) $dy = \left(\dfrac{y}{x} + x^2\right)dx$

3) $y' + 4x^3 y = x^3$ مع $y(1) = \dfrac{5}{4}$

**الحل.** المعادلات الثلاث المعطاة هي معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى.

1) لتكن المعادلة

$$y' - xy = e^{\frac{1}{2}x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(1)$

$$y' - xy = 0..............(2)$$

- لنبحث عن الحل العام للمعادلة $(2)$ التي هي معادلة ذات متغيرين منفصلين، بحيث من أجل $y \neq 0$ ، لدينا

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow y' = xy \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = xy \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = xdx\end{aligned}$$

بمكاملة طرفي آخر معادلة، نجد

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c \,/\, c \in R \\ &\Leftrightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c} \\ &\Leftrightarrow |y| = e^c . e^{\frac{1}{2}x^2} \\ &\Leftrightarrow y = ke^{\frac{1}{2}x^2} \,/\, k \in R\end{aligned}$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(2)$ هو

$$y(x) = ke^{\frac{1}{2}x^2} \,/\, k \in R.............(3)$$

- لنبحث عن حل خاص للمعادلة $(1)$، نستخدم طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x) = k(x)e^{\frac{1}{2}x^2}............(4)$$

وعليه

$$y'(x) = k'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + xk(x)e^{\frac{1}{2}x^2}.............(5)$$

بتعويض المعادلتين $(3)$ و$(5)$ في المعادلة $(1)$، نجد

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow k'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + xk(x)e^{\frac{1}{2}x^2} - xk(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = e^{\frac{1}{2}x^2} \\ &\Leftrightarrow k'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = e^{\frac{1}{2}x^2} \\ &\Leftrightarrow k'(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow k(x) = \int dx \\ &\Leftrightarrow k(x) = x + c' \,/\, c' \in R\end{aligned}$$

بتعويض عبارة الدالة $k$ في المعادلة $(4)$، نجد

$$(4) \Leftrightarrow y(x) = (x + c')e^{\frac{1}{2}x^2}$$

إذا، للمعادلة $(1)$ حل خاص هو

$$y(x) = (x + c')e^{\frac{1}{2}x^2}................(6)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(3)$ و$(6)$، أي

$$\begin{aligned} y(x) &= ke^{\frac{1}{2}x^2} + (x+c')e^{\frac{1}{2}x^2} \\ &= (x+k+c')e^{\frac{1}{2}x^2} \\ &= (x+k')e^{\frac{1}{2}x^2} \ / k' \in R \end{aligned}$$

بما أن $y(0)=-3$ ، فإن $y(0)=k'=-3$ . إذا للمعادلة $(1)$ حل وحيد هو

$$y(x)=(x-3)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

2) لتكن المعادلة

$$dy=\left(\frac{y}{x}+x^2\right)dx.....................(E_0)$$

لدينا

$$\begin{aligned} (E_0) &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+x^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^2 \end{aligned}$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(E_0)$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=0..............(E_1)$$

- لنبحث عن الحل العام للمعادلة $(E_1)$ التي هي معادلة ذات متغيرين منفصلين، بحيث من أجل $x,y\neq 0$ لدينا

$$\begin{aligned} (E_1) &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

بمكاملة طرفي آخر معادلة، نجد

$$\begin{aligned} (E_1) &\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{x}dx \\ &\Leftrightarrow \ln|y|=\ln|x|+c \ / c\in R \\ &\Leftrightarrow |y|=e^{\ln|x|+c} \\ &\Leftrightarrow |y|=e^{c}.e^{\ln|x|} \\ &\Leftrightarrow y=kx \ / k\in R \end{aligned}$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(E_1)$ هو

$$y(x)=kx \ / k\in R.............(E_2)$$

- لنبحث عن حل خاص للمعادلة $(E_0)$، نستخدم طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x)=k(x)x............(E_3)$$

وعليه

$$y'(x)=k'(x)x+k(x).............(E_4)$$

بتعويض المعادلتين $(E_2)$ و $(E_4)$ في المعادلة $(E_0)$، نجد

$$\begin{aligned}(E_0) &\Leftrightarrow k'(x)x+k(x)-\frac{1}{x}(xk(x))=x^2\\ &\Leftrightarrow k'(x)x=x^2\\ &\Leftrightarrow k'(x)=x\\ &\Leftrightarrow k(x)=\int xdx\\ &\Leftrightarrow k(x)=\frac{1}{2}x^2+c' / c'\in R\end{aligned}$$

بتعويض عبارة الدالة $k$ في المعادلة $(E_3)$، نجد

$$\begin{aligned}(E_3) \Leftrightarrow y(x) &=\left(\frac{1}{2}x^2+c'\right)x\\ &=c'x+\frac{1}{2}x^3\end{aligned}$$

إذا، للمعادلة $(E_0)$ حل خاص هو

$$y(x)=c'x+\frac{1}{2}x^3................(E_5)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(E_0)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(E_2)$ و $(E_5)$ ، أي

$$\begin{aligned}y(x) &=kx+c'x+\frac{1}{2}x^3\\ &=(k+c')x+\frac{1}{2}x^3\\ &=k'x+\frac{1}{2}x^3 / k'\in R\end{aligned}$$

3) لتكن المعادلة

$$y'+4x^3y=x^3....................(i_0)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(i_0)$

$$y'+4x^3y=0..............(i_1)$$

- لنبحث عن الحل العام للمعادلة $(i_1)$ التي هي معادلة ذات متغيرين منفصلين، بحيث من أجل $y\neq 0$ لدينا

$$\begin{aligned}(i_1) &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-4x^3y\\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-4x^3dx\end{aligned}$$

بمكاملة طرفي آخر معادلة، نجد

$$\begin{aligned}(i_1) &\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int 4x^3dx\\ &\Leftrightarrow \ln|y|=-x^4+c / c\in R\\ &\Leftrightarrow |y|=e^{-x^4+c}\\ &\Leftrightarrow |y|=e^c.e^{-x^4}\\ &\Leftrightarrow y=ke^{-x^4} / k\in R\end{aligned}$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_1)$ هو

$$y(x)=ke^{-x^4}\ /\ k\in R.............(i_2)$$

- لنبحث عن حل خاص للمعادلة $(i_0)$، نستخدم طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x)=k(x)e^{-x^4}............(i_3)$$

وعليه

$$y'(x)=k'(x)e^{-x^4}-4x^3k(x)e^{-x^4}.............(i_4)$$

بتعويض المعادلتين $(i_2)$ و $(i_4)$ في المعادلة $(i_0)$، نجد

$$\begin{aligned}(i_0)&\Leftrightarrow k'(x)e^{-x^4}-4x^3k(x)e^{-x^4}+4x^3k(x)e^{-x^4}=x^3\\&\Leftrightarrow k'(x)e^{-x^4}=x^3\\&\Leftrightarrow k'(x)=x^3e^{x^4}\\&\Leftrightarrow k(x)=\int x^3e^{x^4}dx\\&\Leftrightarrow k(x)=\frac{1}{4}e^{x^4}+c'/c'\in R\end{aligned}$$

بتعويض عبارة الدالة $k$ في المعادلة $(i_3)$، نجد

$$\begin{aligned}(i_3)\Leftrightarrow y(x)&=\left(\frac{1}{4}e^{x^4}+c'\right)e^{-x^4}\\&=c'e^{-x^4}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

إذا، للمعادلة $(i_0)$ حل خاص هو

$$y(x)=c'e^{-x^4}+\frac{1}{4}................(i_5)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_0)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(i_2)$ و $(i_5)$ ، أي

$$\begin{aligned}y(x)&=ke^{-x^4}+c'e^{-x^4}+\frac{1}{4}\\&=(k+c')e^{-x^4}+\frac{1}{4}\\&=k'e^{-x^4}+\frac{1}{4}/k'\in R\end{aligned}$$

بما أن $y(1)=\frac{5}{4}$ ، فإن $y(1)=k'e^{-1}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow k'=e$ . إذا للمعادلة $(i_0)$ حل وحيد هو

$$y(x)=e^{1-x^4}+\frac{1}{4}$$

**تمرين 8-4.** حل المعادلتين التفاضليتين التاليتين

1) $y'+y(1-y^2)=0$ 2) $dy=\left[-\frac{1}{3}y\left(e^{\sqrt{x}}y^3+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx$ مع $y(0)=\frac{1}{2}$

**الحل.** المعادلتان المعطاتان هما معادلتان لبرنولي.

1) لتكن المعادلة

$$y'+y(1-y^2)=0..........(1)$$

لدينا

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow y'+y-y^{3}=0\\ &\Leftrightarrow y'+y=y^{3}\end{aligned}$$

ومنه، المعادلة $(1)$ لبرنولي حيث $n=3$. نضرب طرفي المعادلة $(1)$ في $y^{-3}$، نجد

$$(1)\Leftrightarrow y^{-3}y'+y^{-2}=1$$

نضع $z=y^{-2}$ ومنه $z'=-2y'y^{-3}$ وعليه

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}z'+z=1\\ &\Leftrightarrow z'-2z=-2................(2)\end{aligned}$$

وبهذا أصبحت المعادلة $(1)$ معادلة تفاضلية خطية $(2)$.

- نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(2)$

$$z'-2z=0................(3)$$

المعادلة $(3)$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين، بحيث من أجل $z\neq 0$، لدينا

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow z'=2z\\ &\Leftrightarrow \frac{dz}{dx}=2z\\ &\Leftrightarrow \frac{dz}{z}=2dx\end{aligned}$$

بمكاملة طرفي آخر معادلة، نجد

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow \int\frac{dz}{z}=2\int dx\\ &\Leftrightarrow \ln|z|=2x+c\,/\,c\in R\\ &\Leftrightarrow |z|=e^{2x+c}\\ &\Leftrightarrow |z|=e^{c}.e^{2x}\\ &\Leftrightarrow z=ke^{2x}\,/\,k\in R\end{aligned}$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(3)$ هو

$$z(x)=ke^{2x}\,/\,k\in R..............(4)$$

- لنبحث عن حل خاص للمعادلة $(2)$، نستخدم طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$z(x)=k(x)e^{2x}.............(5)$$

وعليه

$$z'(x)=k'(x)e^{2x}+2k(x)e^{2x}.............(6)$$

بتعويض المعادلتين $(4)$ و$(6)$ في المعادلة $(2)$، نجد

$$(2)\Leftrightarrow k'(x)e^{2x}+2k(x)e^{2x}-2k(x)e^{2x}=-2$$
$$\Leftrightarrow k'(x)e^{2x}=-2$$
$$\Leftrightarrow k'(x)=-2e^{-2x}$$
$$\Leftrightarrow k(x)=\int -2e^{-2x}dx$$
$$\Leftrightarrow k(x)=e^{-2x}+c'/c'\in R$$

بتعويض عبارة الدالة $k$ في المعادلة $(5)$، نجد

$$(5)\Leftrightarrow z(x)=\left(e^{-2x}+c'\right)e^{2x}$$
$$=c'e^{2x}+1$$

إذا، للمعادلة $(2)$ حل خاص هو

$$z(x)=c'e^{2x}+1.................(7)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(2)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(4)$ و $(7)$، أي

$$z(x)=ke^{2x}+c'e^{2x}+1$$
$$=(k+c')e^{2x}+1$$
$$=k'e^{2x}+1/k'\in R$$

بما أن $z=y^{-2}$ ، فإن $y^2=\frac{1}{z}$ وعليه، الحل العام للمعادلة $(1)$ هو

$$y^2(x)=\frac{1}{k'e^{2x}+1}/k'\in R$$

2) لتكن المعادلة

$$dy=\left[-\frac{1}{3}y\left(e^{\sqrt{x}}y^3+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx...........(i_0)$$

لدينا

$$(i_0)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}e^{\sqrt{x}}y^4-\frac{1}{6\sqrt{x}}y$$
$$\Leftrightarrow y'+\frac{y}{6\sqrt{x}}=-\frac{1}{3}e^{\sqrt{x}}y^4$$

ومنه، المعادلة $(i_0)$ لبرنولي حيث $n=4$. نضرب طرفي المعادلة $(i_0)$ في $y^{-4}$، نجد

$$(i_0)\Leftrightarrow y^{-4}y'+\frac{y^{-3}}{6\sqrt{x}}=-\frac{1}{3}e^{\sqrt{x}}$$

نضع $z=y^{-3}$ ومنه $z'=-3y'y^{-4}$ وعليه

$$(i_0)\Leftrightarrow-\frac{1}{3}z'+\frac{z}{6\sqrt{x}}=-\frac{1}{3}e^{\sqrt{x}}$$
$$\Leftrightarrow z'-\frac{z}{2\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}.................(i_1)$$

وبهذا أصبحت المعادلة $(i_0)$ معادلة تفاضلية خطية $(i_1)$.

- نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(i_1)$

$$z'-\frac{z}{2\sqrt{x}}=0.................(i_2)$$

المعادلة $(i_2)$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين، بحيث من أجل $z \neq 0$، لدينا

$$\begin{aligned}(i_2) &\Leftrightarrow z' = \frac{z}{2\sqrt{x}}\\ &\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z}{2\sqrt{x}}\\ &\Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

بمكاملة طرفي آخر معادلة، نجد

$$\begin{aligned}(i_2) &\Leftrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}\\ &\Leftrightarrow \ln|z| = \sqrt{x} + c \,/\, c \in R\\ &\Leftrightarrow |z| = e^{\sqrt{x}+c}\\ &\Leftrightarrow |z| = e^{c}.e^{\sqrt{x}}\\ &\Leftrightarrow z = ke^{\sqrt{x}} \,/\, k \in R\end{aligned}$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_2)$ هو

$$z(x) = ke^{\sqrt{x}} \,/\, k \in R .............(i_3)$$

- لنبحث عن حل خاص للمعادلة $(i_1)$، نستخدم طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$z(x) = k(x)e^{\sqrt{x}} ............(i_4)$$

وعليه

$$z'(x) = k'(x)e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}k(x)e^{\sqrt{x}} .............(i_5)$$

بتعويض المعادلتين $(i_3)$ و $(i_5)$ في المعادلة $(i_1)$، نجد

$$\begin{aligned}(i_1) &\Leftrightarrow k'(x)e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}k(x)e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}k(x)e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\\ &\Leftrightarrow k'(x)e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\\ &\Leftrightarrow k'(x) = 1\\ &\Leftrightarrow k(x) = \int dx\\ &\Leftrightarrow k(x) = x + c' \,/\, c' \in R\end{aligned}$$

بتعويض عبارة الدالة $k$ في المعادلة $(i_4)$، نجد

$$(i_4) \Leftrightarrow z(x) = (x + c')e^{\sqrt{x}}$$

إذا، للمعادلة $(i_1)$ حل خاص هو

$$z(x) = (x + c')e^{\sqrt{x}} ................(i_6)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(i_3)$ و $(i_6)$ ، أي

$$
\begin{aligned}
z(x) &= ke^{\sqrt{x}} + (x+c')e^{\sqrt{x}} \\
&= (x+k+c')e^{\sqrt{x}} \\
&= (x+k')e^{\sqrt{x}} \ / k' \in R
\end{aligned}
$$

بما أن $z = y^{-3}$ ، فإن $y = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_0)$ هو

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+k')e^{\sqrt{x}}}} \ / k' \in R$$

بما أن $y(0) = \frac{1}{2}$ ، فإن $y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{k'}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k' = 8$ . إذا للمعادلة $(i_0)$ حل وحيد هو

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)e^{\sqrt{x}}}}$$

**تمرين 8-5.** حل المعادلات التفاضلية التالية

1) $y'' - 4y' = 8$ مع $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$

2) $y'' - 10y' + 25y = 25x - 5$

3) $y'' - 2y' + y = x^2$ مع $y(0) = 2$ و $y'(0) = 3$

4) $y'' + 3y' - 4y = e^x + x$

5) $y'' + 9y = \cos(5x)$

6) $y'' - 2y' + 5y = 5x + 8$ مع $y(0) = 3$ و $y'(0) = 4$

**الحل.** المعادلات المعطاة هي معادلات خطية من الرتبة الثانية.

1) لتكن المعادلة

$$y'' - 4y' = 8................(E_1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(E_1)$

$$y'' - 4y' = 0..........(E_2)$$

- لنجد الحل العام للمعادلة $(E_2)$.

المعادلة المميزة للمعادلة $(E_1)$ هي

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0............(E_3)$$

لنحل المعادلة $(E_3)$. لدينا

$$
\begin{aligned}
(E_3) &\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

وعليه، المعادلة $(E_3)$ تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما

$\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = 4$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(E_2)$ هو

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{4x} = c_1 + c_2 e^{4x}................(E_4)$$

لنجد حلا خاصا للمعادلة $(E_1)$ باستعمال طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x) = A(x) + B(x)e^{4x}...............(E_5)$$

بحيث $A$ و $B$ دالتان قابلتان للاشتقاق تحققان جملة المعادلتين التاليتين

$$(I)\begin{cases}A'(x)+B'(x)e^{4x}=0\\4B'(x)e^{4x}=8\end{cases}$$

أي

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}A'(x)+B'(x)e^{4x}=0\\B'(x)=2e^{-4x}\end{cases}$$

ومنه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}A'(x)+\left(2e^{-4x}\right)e^{4x}=0\\B(x)=2\int e^{-4x}dx\end{cases}$$

وعليه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}A'(x)=-2\\B(x)=-\frac{1}{2}e^{-4x}\end{cases}$$

إذا

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)=-2\int dx=-2x\\B(x)=-\frac{1}{2}e^{-4x}\end{cases}$$

وعليه، بتعويض عبارتي الدالتين $A$ و $B$ في المعادلة $(E_5)$، نجد

$$y(x)=-2x-\frac{1}{2}..............(E_6)$$

وهو حل خاص للمعادلة $(E_1)$.

الحل العام للمعادلة $(E_1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(E_4)$ و $(E_6)$ ، أي

$$y(x)=c_1+c_2e^{4x}-2x-\frac{1}{2}$$

بما أن $y(0)=1$ و $y'(0)=2$ ، علينا تعويض $x=0$ في عبارتي $y$ و $y'$ لإيجاد المجهولين $c_1$ و $c_2$.

لدينا

$$y(0)=1\Leftrightarrow c_1+c_2-\frac{1}{2}=1..........(E_7)$$

و $y'(x)=4c_2e^{4x}-2$ ومنه

$$y'(0)=2\Leftrightarrow 4c_2-2=2\Leftrightarrow c_2=1$$

وبتعويض قيمة $c_2$ في المعادلة $(E_7)$، نجد $c_1=\frac{1}{2}$.

إذا للمعادلة $(E_1)$ حل عام وحيد هو

$$y(x)=e^{4x}-2x$$

2) لتكن المعادلة

$$y''-10y'+25y=25x-5................(i_1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(i_1)$

$$y''-10y'+25y=0..........(i_2)$$

- لنجد الحل العام للمعادلة $(i_2)$

المعادلة المميزة للمعادلة $(i_1)$ هي

$$\lambda^2-10\lambda+25=0............(i_3)$$

المعادلة $(i_3)$ هي معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز $\Delta$، بحيث $\Delta=0$ وعليه، المعادلة $(i_3)$ تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو

$$\lambda=\frac{10}{2}=5$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_2)$ هو

$$y(x)=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}...............(i_4)$$

- لنجد حلا خاصا للمعادلة $(i_1)$.

بما أن الطرف الثاني للمعادلة $(i_1)$ هو كثير حدود من الدرجة الأولى (أي $25x-5$)، فنبحث عن حل خاص $y_p$ على شكل كثير حدود من الدرجة الأولى، أي

$$y_p(x)=ax+b\,/\,a,b\in R$$

وعليه $y_p'(x)=a$ و $y_p''(x)=0$. بتعويض $y_p$ ، $y_p'$ و $y_p''$ في المعادلة $(i_1)$، نجد

$$y_p''-10y_p'+25y_p=25x-5\Leftrightarrow 0-10(a)+25(ax+b)=25x-5$$
$$\Leftrightarrow (25a)x+(25b-10a)=25x-5$$

بالمطابقة بين طرفي آخر مساواة، نجد

$$\begin{cases}25a=25\\25b-10a=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

ومنه، للمعادلة $(i_1)$ حل خاص هو

$$y_p(x)=x+\frac{1}{5}..............(i_5)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(i_4)$ و $(i_5)$ ، أي

$$y(x)=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}+x+\frac{1}{5}$$

3) لتكن المعادلة

$$y''-2y'+y=x^2................(E_1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(E_1)$

$$y''-2y'+y=0..........(E_2)$$

- لنجد الحل العام للمعادلة $(E_2)$.

المعادلة المميزة للمعادلة $(E_1)$ هي

$$\lambda^2-2\lambda+1=0............(E_3)$$

المعادلة $(E_3)$ هي معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز $\Delta$، بحيث $\Delta = 0$ وعليه، المعادلة $(E_3)$ تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو

$$\lambda = \frac{2}{2} = 1$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(E_2)$ هو

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x ................(E_4)$$

- لنجد حلا خاصا للمعادلة $(E_1)$.

بما أن الطرف الثاني للمعادلة $(E_1)$ هو كثير حدود من الدرجة الثانية (أي $x^2$)، فنبحث عن حل خاص $y_p$ على شكل كثير حدود من الدرجة الثانية، أي

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c \,/\, a,b,c \in R$$

وعليه $y_p'(x) = 2ax + b$ و $y_p''(x) = 2a$. بتعويض $y_p$ ، $y_p'$ و $y_p''$ في المعادلة $(E_1)$، نجد

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = x^2 \Leftrightarrow (2a) - 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2$$
$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 4a)x + (c + 2a - 2b) = x^2$$

بالمطابقة بين طرفي آخر مساواة، نجد

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c + 2a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

ومنه، للمعادلة $(E_1)$ حل خاص هو

$$y_p(x) = x^2 + 4x + 6..............(E_5)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(E_1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(E_4)$ و $(E_5)$ ، أي

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 + 4x + 6$$

بما أن $y(0) = 2$ و $y'(0) = 3$ ، علينا تعويض $x = 0$ في عبارتي $y$ و $y'$ لإيجاد المجهولين $c_1$ و $c_2$. لدينا

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 + 6 = 2 \Leftrightarrow c_1 = -4$$

و $y'(x) = c_1 e^x + c_2 \left(e^x + x e^x\right) + 2x + 4$ ومنه

$$y'(0) = 3 \Leftrightarrow c_1 + c_2 + 4 = 3 \Leftrightarrow c_2 = 3$$

إذا للمعادلة $(E_1)$ حل عام وحيد هو

$$y(x) = -4e^x + 3xe^x + x^2 + 4x + 6$$

4) لتكن المعادلة

$$y'' + 3y' - 4y = e^x + x................(i_1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(i_1)$

$$y'' + 3y' - 4y = 0..........(i_2)$$

- لنجد الحل العام للمعادلة $(i_2)$.

المعادلة المميزة للمعادلة $(i_1)$ هي

$$\lambda^2+3\lambda-4=0............(i_3)$$

المعادلة $(i_3)$ هي معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز $\Delta$، بحيث $\Delta=25>0$
وعليه، المعادلة $(i_3)$ تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما

$$\lambda_2=1 \quad \text{و} \quad \lambda_1=-4$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_2)$ هو

$$y(x)=c_1e^{-4x}+c_2e^{x}................(i_4)$$

– لنجد حلا خاصا للمعادلة $(i_1)$ باستعمال طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x)=A(x)e^{-4x}+B(x)e^{x}................(i_5)$$

بحيث $A$ و $B$ دالتان قابلتان للاشتقاق تحققان جملة المعادلتين التاليتين

$$(I)\begin{cases}A'(x)e^{-4x}+B'(x)e^{x}=0....................(1)\\ -4A'(x)e^{-4x}+B'(x)e^{x}=e^{x}+x........(2)\end{cases}$$

أي

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(1)-(2)\Leftrightarrow 5A'(x)e^{-4x}=-e^{x}-x\\ (1)\Leftrightarrow B'(x)=-A'(x)e^{-5x}\end{cases}$$

ومنه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}A'(x)=-\frac{1}{5}\left(e^{5x}+xe^{4x}\right)\\ B'(x)=\frac{1}{5}\left(1+xe^{-x}\right)\end{cases}$$

وعليه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)=-\frac{1}{5}\left[\int e^{5x}dx+\int xe^{4x}dx\right]..........(3)\\ B(x)=\frac{1}{5}\left[\int dx+\int xe^{-x}dx\right]....................(4)\end{cases}$$

لنجد التكامل $\int xe^{4x}dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

نضع

$$f(x)=x \qquad \Rightarrow f'(x)=dx$$
$$g'(x)=e^{4x}dx\Rightarrow g(x)=\tfrac{1}{4}e^{4x}$$

ومنه

$$\int xe^{4x}dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}\int xe^{4x}dx&=\tfrac{1}{4}xe^{4x}-\tfrac{1}{4}\int e^{4x}dx\\ &=\tfrac{1}{4}xe^{4x}-\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4}e^{4x}\right)\\ &=\tfrac{1}{4}xe^{4x}-\tfrac{1}{16}e^{4x}\end{aligned}$$

وعليه

$$(3) \Leftrightarrow A(x) = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x} + \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}\right) = e^{4x}\left(-\frac{1}{25}e^{x} - \frac{1}{20}x + \frac{1}{80}\right)$$

لنجد التكامل $\int xe^{-x}dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

نضع

$$f(x) = x \qquad \Rightarrow f'(x) = dx$$
$$g'(x) = e^{-x}dx \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$$

ومنه

$$\int xe^{-x}dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} \\ &= -e^{-x}(x+1)\end{aligned}$$

وعليه

$$(4) \Leftrightarrow B(x) = \frac{1}{5}\left[x - (x+1)e^{-x}\right]$$

وعليه، بتعويض عبارتي الدالتين $A$ و $B$ في المعادلة $(i_5)$، نجد

$$y(x) = \frac{1}{5}xe^{x} - \frac{1}{25}e^{x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i_6)$$

وهو حل خاص للمعادلة $(i_1)$.

الحل العام للمعادلة $(i_1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(i_4)$ و $(i_6)$ ، أي

$$\begin{aligned}y(x) &= c_1e^{-4x} + c_2e^{x} + \frac{1}{5}xe^{x} - \frac{1}{25}e^{x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16} \\ &= e^{x}\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + c_2\right) + c_1e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}\end{aligned}$$

5) لتكن المعادلة

$$y'' + 9y = \cos(5x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E_1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(E_1)$

$$y'' + 9y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (E_2)$$

- لنجد الحل العام للمعادلة $(E_2)$.

المعادلة المميزة للمعادلة $(E_1)$ هي

$$\lambda^2 + 9 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (E_3)$$

لنحل المعادلة $(E_3)$. لدينا

$$\begin{aligned}(E_3) &\Leftrightarrow \lambda^2 = -9 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 = 9i^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{9i^2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \pm 3i\end{aligned}$$

وعليه، المعادلة $(E_3)$ تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$$\lambda_1 = 3i \quad \text{و} \quad \lambda_2 = -3i$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(E_2)$ هو

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^0 \cos(3x) + c_2 e^0 \sin(3x) \\ &= c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) ...............(E_4) \end{aligned}$$

لنجد حلا خاصا للمعادلة $(E_1)$ من الشكل

$$y_p(x) = a\cos(5x) / a \in R$$

وعليه $y'_p(x) = -5a\sin(5x)$ و $y''_p(x) = -25a\cos(5x)$ . بتعويض $y_p$ ، $y'_p$ و $y''_p$ في المعادلة $(E_1)$ ، نجد

$$\begin{aligned} y''_p + 9y_p = \cos(5x) &\Leftrightarrow -25a\cos(5x) + 9a\cos(5x) = \cos(5x) \\ &\Leftrightarrow (16a+1)\cos(5x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 16a + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

ومنه، للمعادلة $(E_1)$ حل خاص هو

$$y_p(x) = -\frac{1}{16}\cos(5x) ..............(E_5)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(E_1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(E_4)$ و $(E_5)$ ، أي

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) - \frac{1}{16}\cos(5x)$$

6) لتكن المعادلة

$$y'' - 2y' + 5y = 5x + 8 ................(i_1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل $(i_1)$

$$y'' - 2y' + 5y = 0 ..........(i_2)$$

– لنجد الحل العام للمعادلة $(i_2)$ .

المعادلة المميزة للمعادلة $(i_1)$ هي

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 ............(i_3)$$

المعادلة $(i_3)$ هي معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز $\Delta$، بحيث $\Delta = -16 = 16i^2 < 0$ وعليه، المعادلة $(i_3)$ تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$$\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{16i^2}}{2} = 1 - 2i \quad \text{و} \quad \lambda_2 = \frac{2 + \sqrt{16i^2}}{2} = 1 + 2i$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_2)$ هو

$$y(x) = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x) ...............(i_4)$$

لنجد حلا خاصا للمعادلة $(i_1)$ .

بما أن الطرف الثاني للمعادلة $(i_1)$ هو كثير حدود من الدرجة الأولى (أي $5x+8$)، فنبحث عن حل خاص $y_p$ على شكل كثير حدود من الدرجة الأولى، أي

$$y_p(x) = ax + b \,/\, a,b \in R$$

وعليه $y'_p(x) = a$ و $y''_p(x) = 0$ . بتعويض $y_p$ ، $y'_p$ و $y''_p$ في المعادلة $(i_1)$ ، نجد

$$y''_p - 2y'_p + 5y_p = x^2 \Leftrightarrow 0 - 2(a) + 5(ax+b) = 5x + 8$$
$$\Leftrightarrow 5ax + (5b - 2a) = 5x + 8$$

بالمطابقة بين طرفي آخر مساواة، نجد

$$\begin{cases} 5a = 5 \\ 5b - 2a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

ومنه، للمعادلة $(i_1)$ حل خاص هو

$$y_p(x) = x + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i_5)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة $(i_1)$ هو حاصل جمع المعادلتين $(i_4)$ و $(i_5)$ ، أي

$$y(x) = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x) + x + 2$$

بما أن $y(0) = 3$ و $y'(0) = 4$ ، علينا تعويض $x = 0$ في عبارتي $y$ و $y'$ لإيجاد المجهولين $c_1$ و $c_2$ .
لدينا

$$y(0) = 3 \Leftrightarrow c_1 + 2 = 3 \Leftrightarrow c_1 = 1$$

و $y'(x) = c_1\left(e^x \cos(2x) - 2e^x \sin(2x)\right) + c_2\left(e^x \sin(2x) + 2e^x \cos(2x)\right) + 1$ ومنه

$$y'(0) = 4 \Leftrightarrow c_1 + 2c_2 + 1 = 4 \Leftrightarrow c_2 = 1$$

إذا، للمعادلة $(i_1)$ حل عام وحيد هو

$$y(x) = e^x \cos(2x) + e^x \sin(2x) + x + 2$$
$$= e^x\left(\cos(2x) + \sin(2x)\right) + x + 2$$

### 3-2- تمارين للحل

**تمرين 8-6.** حل المعادلات التفاضلية التالية

1) $y' - xy^3 = 0$ 　　 2) $y' = \sqrt{x}$ مع $y(1) = 2$

3) $dy = e^{-y}dx$ 　　 4) $\sqrt{x-1}\,dy = \dfrac{dx}{y}$ مع $y(2) = 0$

**تمرين 8-7.** حل المعادلتين التفاضليتين التاليتين

1) $y'' - 4y' - 21y = 24e^x$ مع $y(0) = 2$ و $y'(0) = 0$ 　　 2) $y'' + 4y' + 4y = x^2 - 1$

# الفصل التاسع

# الدوال ذات

# متغيرين

في الفصول السابقة، درسنا دوالا من الشكل $f(x)=y$ ذات متغير مستقل وحيد $x$، لكن العديد من الأنشطة الاقتصادية تتطلب أكثر من متغير مستقل، فمثلا الطلب على سلعة معينة لا يعتمد فقط على سعرها وإنما على دخل المستهلك، سعر السلع البديلة ومتغيرات أخرى. لذلك سندرس الدوال ذات متغيرين ونركز على المشتقات الجزئية وتطبيقاتها الاقتصادية.

## 1- الدوال ذات متغيرين

**تعريف 9-1.** *نسمي* $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *دالة ذات* $n$ *متغير مستقل* $x_1,x_2,...,x_n$*، إذا وجدت قيمة واحدة فقط لـ* $z$ *في مجال صور* $f$ *من أجل الأعداد الحقيقية* $x_1,x_2,...,x_n$ *في مجال تعريف* $f$ *.*(1)

*من أجل* $n=2$*، نسمي* $z=f(x,y)$ *دالة ذات متغيرين مستقلين* $x$ *و* $y$ *من مجال تعريف* $f$ *، إن وجدت قيمة واحدة فقط لـ* $z$ *في مجال صور* $f$ *.*(2)

**أمثلة 9-1**

1) من أجل $f(x,y)=x^2+y^2$ ، فإن

$$f(0;2)=0^2+2^2=4$$
$$f(3;-1)=(3)^2+(-1)^2=10$$

2) من أجل $g(x,y)=2\sqrt{x}\sqrt{y}$ ، فإن

$$g(4;25)=2\sqrt{4}\sqrt{25}=20$$
$$g(0;100)=2\sqrt{0}\sqrt{100}=0$$

3) من أجل $h(x,y)=3e^{x-y}$ ، فإن

$$h(-2;0)=3e^{-2-0}=3e^{-2}$$
$$h(5;5)=3e^{5-5}=3e^{0}=3$$

**تعريف 9-2.** *لتكن* $f(x,y)$ *دالة ذات متغيرين مستقلين. نسمي مجال تعريف* $f$ *مجموعة الثنائيات* $(x,y)$ *التي من أجلها تكون* $f$ *معرفة ونرمز لها بالرمز* $D_f$*، بحيث* $D_f\subset R^2$ *.*(3)

**ملاحظة 9-1.** أحيانا، يمكن تمثيل مجال تعريف الدالة $f$ بيانيا في المستوي $(OXY)$.

**أمثلة 9-2.** لنجد مجال تعريف كل دالة مما يلي ونمثله بيانيا في المستوي $(OXY)$.

1) $f(x,y)=x^2+y^2$ وعليه، $f$ معرفة على $R^2$، أي $D_f=R^2$ .

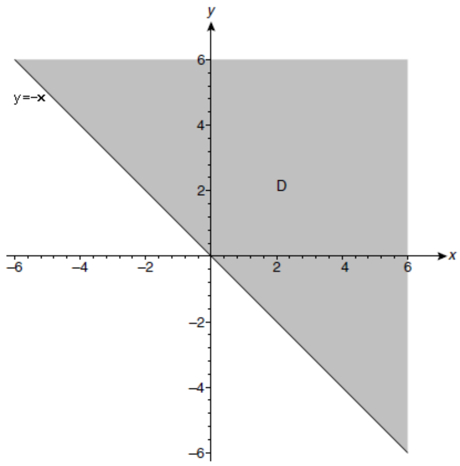
2) $g(x,y)=\sqrt{x+y}$ وعليه

$$D_g=\{(x,y)\in R^2 / x+y\geq 0\}$$
$$=\{(x,y)\in R^2 / y\geq -x\}$$

والذي يمكن تمثيله بالشكل التالي

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit. Définition 7.1, p. 186.
(2) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 377.
(3) Yadolah Dodge. Op. Cit. Définition 7.3, p. 186.



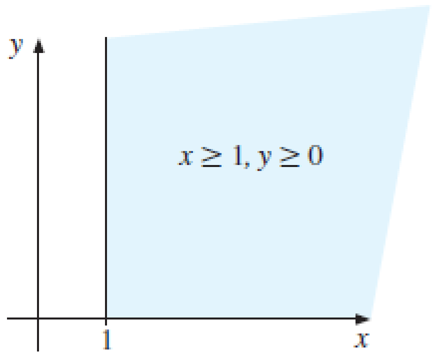

**شكل 9−1− تمثيل بياني لمجال تعريف الدالة** $(x,y)\mapsto\sqrt{x+y}$

3) $h(x,y)=\sqrt{y}-\sqrt{2x-2}$

تكون $h$ معرفة، إذا وفقط إذا كان، $y\geq 0$ و $2x-2\geq 0$، أي $x\geq 1$ ونكتب

$$D_h=\{(x,y)\in R^2 / x\geq 1\wedge y\geq 0\}=[1;+\infty[\times[0;+\infty[$$

والشكل التالي يوضح ذلك




**شكل 9−2− تمثيل بياني لمجال تعريف الدالة** $(x,y)\mapsto\sqrt{y}-\sqrt{2x-2}$

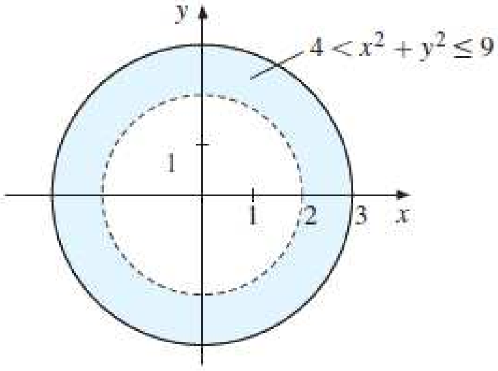
4) $k(x,y)=\sqrt{9-(x^2+y^2)}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

تكون الدالة $\sqrt{9-(x^2+y^2)}$ معرفة، إذا وفقط إذا كان، $9-(x^2+y^2)\geq 0$، أي $9\geq x^2+y^2$ وبما أن $x^2+y^2=9$ هي معادلة دائرة $(C)$ مركزها $O=(0;0)$ ونصف قطرها $r=3$، فإن مجال تعريف الدالة $\sqrt{9-(x^2+y^2)}$ هو القرص المظلل ب $(C)$.

تكون الدالة $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ معرفة، إذا وفقط إذا كان، $x^2+y^2-4>0$، أي $x^2+y^2>4$ وبما أن $x^2+y^2=4$ هي معادلة دائرة $(C')$ مركزها $O=(0;0)$ ونصف قطرها $r'=2$، فإن مجال تعريف الدالة $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ هو القرص المظلل ب $(C')$ عدا محيطها وعليه

$$D_k=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2>4\wedge x^2+y^2\leq 9\}$$
$$=\{(x,y)\in R^2 / 4<x^2+y^2\leq 9\}$$

ومنه مجال تعريف الدالة $k$ هو القرص المحصور بين الدائرتين $(C)$ و $(C')$ عدا محيط $(C')$ وهذا ما يوضحه الشكل التالي

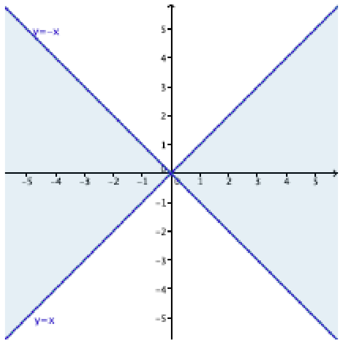



**شكل 9−3− تمثيل بياني لمجال تعريف الدالة** $(x,y) \mapsto \sqrt{9-(x^2+y^2)} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

5) $l(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$ وعليه

$$\begin{aligned} D_l &= \{(x,y) \in R^2 / x^2 - y^2 > 0\} \\ &= \{(x,y) \in R^2 / x^2 > y^2\} \\ &= \{(x,y) \in R^2 / |x| > |y|\} \end{aligned}$$

الذي يمكن تمثيله كما يلي

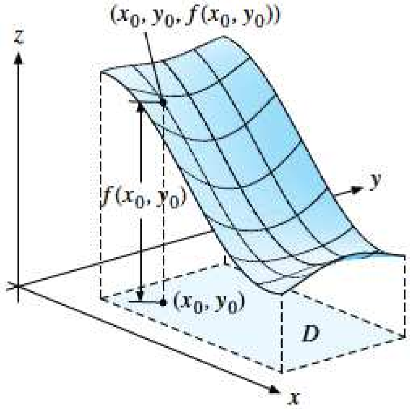


**شكل 9−4− تمثيل بياني لمجال تعريف الدالة** $(x,y) \mapsto \ln(x^2 - y^2)$

**تعريف 9−3.** *لتكن* $f(x,y)$ *دالة ذات متغيرين مستقلين معرفة على مجال* $D_f$ *من* $R^2$*. نسمي منحنى الدالة* $f$ *، مجموعة النقط ذات الإحداثيات* $(x, y, f(x,y))$ *حيث* $(x,y) \in D_f$ *ونرمز له بالرمز* $G_f$ *ونكتب*

$$G_f = \{(x, y, f(x,y)) / (x,y) \in D_f\} \text{ [1]}$$

$G_f$ *جزء من* $R^3$ *وتمثيله البياني في* $R^3$ *عبارة عن مساحة في* $R^3$ *وهذا ما يوضحه الشكل التالي*

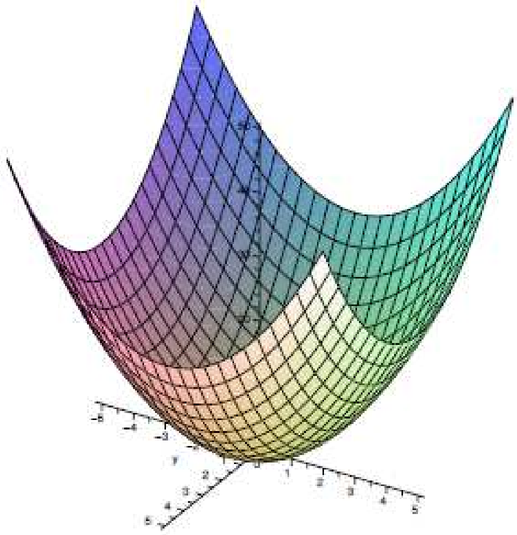



***شكل 9−5− منحنى دالة*** $y = f(x,y)$ [2]

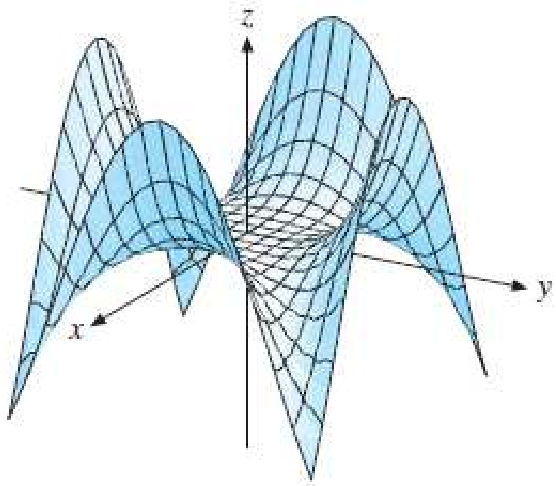
---

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 17, p. 296.
[2] Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 187-188.

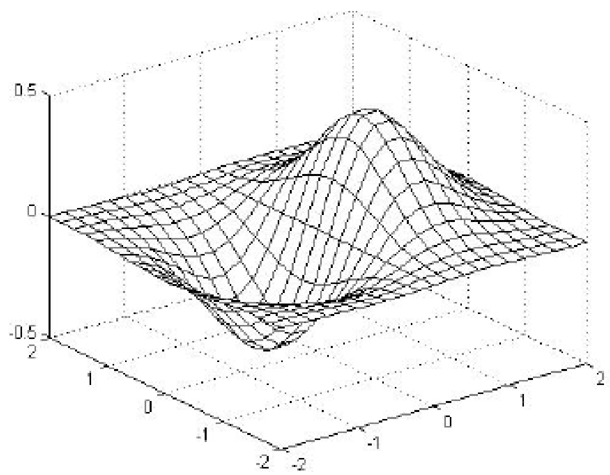
**أمثلة 9-3.** التمثيلات البيانية التالية توضح منحنيات بعض الدوال ذات متغيرين.



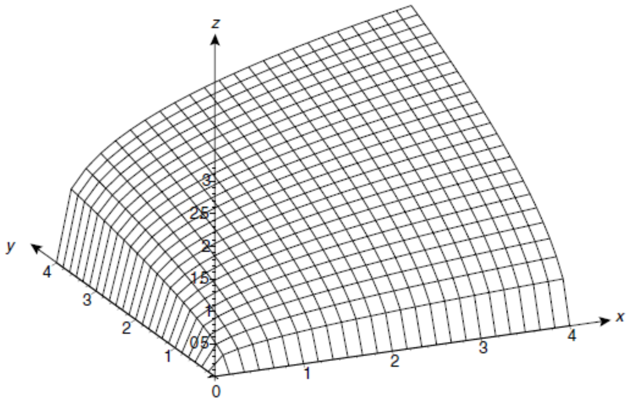
**شكل 9-6- منحنى الدالة** $(x,y)\mapsto x^2+y^2$



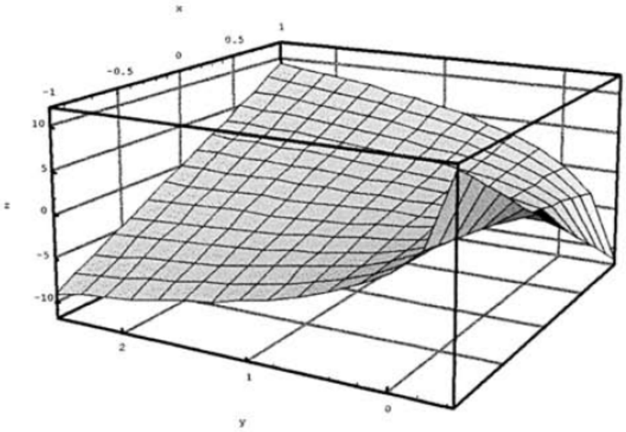

**شكل 9-7- منحنى الدالة** $(x,y)\mapsto x^4-3x^2y^2+y^4$




**شكل 9-8- منحنى الدالة** $(x,y)\mapsto xe^{-x^2-y^2}$




شكل 9-9- منحنى الدالة $(x,y)\mapsto x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$




شكل 9-10- منحنى الدالة $(x,y)\mapsto 5x\ln(1+2y)$

## 2- نهاية دالة ذات متغيرين

### -نهاية دالة ذات متغيرين عند نقطة معينة

لتكن $a=(a_1,a_2)\in R^2$ و $f(x,y)$ دالة ذات متغيرين معرفة على جوار $I$ ل $a$ باستثناء محتمل ل $a$.

**تعريف 9-4.** *نقول أن $f$ تنتهي إلى عدد حقيقي $l$ عندما ينتهي $X=(x,y)$ إلى $a=(a_1,a_2)$، إذا كان*

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta_\varepsilon>0:\forall X\in I\left|\{a\},\|X-a\|<\eta_\varepsilon\Rightarrow|f(X)-l|<\varepsilon\right.$$ [*]

*ونكتب*

$$\lim_{\substack{X\to a\\X\neq a}}f(X)=l \quad \text{أو} \quad \lim_{X\to a}f(X)=l$$ [(1)]

**ملاحظة 9-2**

1) خواص النهايات لدالة ذات متغير واحد تبقى صالحة لدالة ذات متغيرين.

2) إذا كانت $f$ دالة معرفة عند نقطة $a$، فإن $\lim_{X\to a}f(X)=f(a)$.

3) بالنسبة لدالة $f$ ذات متغير واحد، وجود نهاية لهذه الدالة عند نقطة $a$، معناه وجود نهاية مشتركة ل $f$ عن يمين وعن يسار $a$، أما بالنسبة لدالة ذات متغيرين، فيمكن الاقتراب من نقطة من المستوي على طول عدد لا نهائي من المسارات.[(2)]

---

[(*)] يشير الرمز "$\|\ \|$" للمسافة بين نقطتين في $R^n$.

[(1)] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 19, p. 298.
[(2)] Ibid, p. 298.

### أمثلة 9-4

1) لتكن الدالة

$$f : R^2 - \{(x,x)/x \in R\} \to R^2$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{2x+y}{x-y}$$

لنبين أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة.

بما أن $D_f = R^2 - \{(x,x)/x \in R\}$، فإن $f$ غير معرفة عند النقطة $(0,0)$. على طول المحور $(OX): y=0$، لدينا

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in(OX)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2$$

على طول المحور $(OY): x=0$، لدينا

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in(OY)}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y)$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{-y} = -1 \neq 2$$

بما أن النهايتين غير متساويتين، فإن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة.

2) لتكن الدالة

$$g : R^2 \to R^2$$
$$(x,y) \mapsto g(x,y) = e^{x^2+y}$$

لنحسب $\lim_{(x,y)\to(-2;1)} g(x,y)$ .

بما أن الدالة $g$ معرفة عند $(x;y)=(-2;1)$، يكفي تعويض $x=-2$ و $y=1$ في عبارة الدالة $g$، أي

$$\lim_{(x,y)\to(-2;1)} g(x,y) = g(-2;1) = e^5$$

## 3- استمرارية دالة ذات متغيرين

### -استمرارية دالة ذات متغيرين عند نقطة معينة

**تعريف 9-5.** *لتكن $a=(a_1,a_2)\in R^2$ و $f$ دالة ذات متغيرين معرفة على جوار $I$ لـ $a$ . نقول أن $f$ مستمرة عند $a$، إذا كان*

$$\lim_{X\to a} f(X) = f(a) \quad ^{(1)}$$

**تعريف 9-6.** *نقول عن دالة $f$ أنها مستمرة على مجال $J$ من $R^2$، إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من $J$ .* (2)

**ملاحظة 9-3.** خواص الاستمرارية لدالة ذات متغير واحد تبقى صحيحة في حالة دالة ذات متغيرين. (3)

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 20, p. 298.
(2) Ibid. Définition 21, p. 298.
(3) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 398.

**أمثلة 9-5**

1) الدالة $f(x,y)=2x^3+y^2-xy+2$ مستمرة على $R^2$، باعتبارها كثير حدود من الدرجة الثالثة لمتغيرين.

2) الدالة $g(x,y)=e^x+xy$ مستمرة على $R^2$ لأنها مجموع لدالتي الأسية الطبيعية وكثير حدود.

3) الدالة $h(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2y-1\right)+7$ مستمرة على مجال تعريفها

$$D_h=\left\{(x,y)\in R^2 / x^2y-1>0\right\}$$

لأنها تجمع بين اللوغاريتم النيبيري لكثير حدود ودالة ثابتة.

## 4- المشتقات الجزئية لدالة ذات متغيرين

إذا أعطيت دالة ذات متغيرين $z=f(x,y)$، من أجل قياس أثر التغير في أحد المتغيرين المستقلين $x$ أو $y$ على المتغير التابع $z$، فإننا بحاجة إلى المشتقة الجزئية. نهتم في هذا الفصل بالمشتقات الجزئية من الدرجة الأولى والثانية.

### 4-1- المشتقات الجزئية الأولى لدالة ذات متغيرين

**تعريف 9-7.** *إذا كانت $z=f(x,y)$ دالة ذات متغيرين، فإن*

- *المشتقة الجزئية الأولى ل $f$ بالنسبة ل $x$ هي المشتقة الأولى ل $f$ بالنسبة ل $x$ باعتبار $y$ ثابتا ويرمز لها بأحد الرموز*

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\quad f'_x(x,y)$$

*وتعرف كما يلي*

$$f'_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

*إن كانت النهاية موجودة ومنتهية.* (1)

- *وبالمثل، فالمشتقة الجزئية الأولى ل $f$ بالنسبة ل $y$ هي المشتقة الأولى ل $f$ بالنسبة ل $y$ باعتبار $x$ ثابتا ويرمز لها بأحد الرموز*

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y),\quad f'_y(x,y)$$

*وتعرف كما يلي*

$$f'_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

*إن كانت النهاية موجودة ومنتهية.*(2)

**ملاحظة 9-4**

1) لإيجاد المشتقة الجزئية لدالة بالنسبة لأحد المتغيرات المستقلة فإننا نعتبر المتغيرات المستقلة المتبقية حدودا ثابتة ونطبق قواعد التفاضل المتعارف عليها. (3)

2) بشكل عام، عدد المشتقات الجزئية الأولى لدالة ذات عدة متغيرات مستقلة يساوي عدد هذه المتغيرات. (4)

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 189.
(2) Edward T Dowling. Idem, p. 82.
(3) Ibid, p. 82.
(4) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 190.

**أمثلة 9-6**

1) من أجل $f(x,y)=-4x+5y$ ، فان

- المشتقة الجزئية الأولى ل $f$ بالنسبة ل $x$ هي

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{d}{dx}(-4x)+\frac{d}{dx}(5y)\\&=-4+0=-4\end{aligned}$$

لأن $5y$ يُعتبر ثابتا وبالتالي مشتقته بالنسبة ل $x$ تساوي الصفر.

- المشتقة الجزئية الأولى ل $f$ بالنسبة ل $y$ هي

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\frac{d}{dy}(-4x)+\frac{d}{dy}(5y)\\&=0+5=5\end{aligned}$$

لأن $-4x$ يُعتبر ثابتا وبالتالي مشتقته بالنسبة ل $y$ تساوي الصفر.

2) من أجل $g(x,y)=x^2+3xy+4y-1$ ، فان

- المشتقة الجزئية الأولى ل $g$ بالنسبة ل $x$ هي

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)&=\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+(3y)\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(4y-1)\\&=2x+3y(1)+0\\&=2x+3y\end{aligned}$$

لأن $3xy=(3y)x$ وبالتالي $3y$ يُعتبر ثابت ضربٍ لا يُحذف في عملية الاشتقاق بينما $4y-1$ ثابت جمعٍ مشتقته تساوي الصفر.

- المشتقة الجزئية الأولى ل $g$ بالنسبة ل $y$ هي

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)&=\frac{d}{dy}\left(x^2\right)+(3x)\frac{d}{dy}(y)+\frac{d}{dy}(4y)+\frac{d}{dy}(-1)\\&=0+3x(1)+4+0\\&=3x+4\end{aligned}$$

لأن $3xy=(3x)y$ و $3x$ يُعتبر ثابت ضربٍ لا يُحذف في عملية الاشتقاق بينما $x^2$ و $-1$ ثوابت جمعٍ مشتقاتها مساوية للصفر.

- **قواعد التفاضل الجزئي**

قواعد التفاضل بالنسبة لدالة ذات متغير مستقل واحد التي عرضناها في الفصل الخامس تبقى صالحة للدوال ذات متغيرين مستقلين.

**نظرية 9-1.** *إذا كانت $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق ذات متغيرين مستقلين $x$ و $y$ ، فان*

*1)* $\frac{\partial}{\partial x}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}$ *و* $\left(\frac{\partial}{\partial y}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)$

*2)* $\frac{\partial}{\partial x}(f.g)=\frac{\partial f}{\partial x}.g+f.\frac{\partial g}{\partial x}$ *و* $\left(\frac{\partial}{\partial y}(f.g)=\frac{\partial f}{\partial y}.g+f.\frac{\partial g}{\partial y}\right)$

3) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}.g-f.\dfrac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$ بحيث $g(x,y)\neq 0$ و $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}.g-f.\dfrac{\partial g}{\partial y}}{g^2}$ [(1)]

4) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f^n\right)=nf^{n-1}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f^n\right)=nf^{n-1}\dfrac{\partial f}{\partial y}$

5) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^f\right)=e^f\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^f\right)=e^f\dfrac{\partial f}{\partial y}$

6) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\ln(f))=\dfrac{1}{f}.\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial}{\partial y}(\ln(f))=\dfrac{1}{f}.\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (بتصرف) [(2)]

**أمثلة 9-7**

1) من أجل $f(x,y)=(2x+4)(5x-7y)$ وباستعمال قاعدة مشتق جداء دالتين، نجد

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=(5x-7y).\frac{\partial}{\partial x}(2x+4)+(2x+4).\frac{\partial}{\partial x}(5x-7y)\\&=(5x-7y)(2)+(2x+4)(5)\\&=20x-14y+20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=(5x-7y).\frac{\partial}{\partial y}(2x+4)+(2x+4).\frac{\partial}{\partial y}(5x-7y)\\&=(5x-7y)(0)+(2x+4)(-7)\\&=-14x-28\end{aligned}$$

2) من أجل $g(x,y)=\dfrac{4x-3y}{x+2y}$ وباستعمال قاعدة مشتق حاصل قسمة دالتين، نجد

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)&=\frac{(x+2y).\frac{\partial}{\partial x}(4x-3y)-(4x-3y).\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)}{(x+2y)^2}\\&=\frac{(x+2y)(4)-(4x-3y)(1)}{(x+2y)^2}\\&=\frac{11y}{(x+2y)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)&=\frac{(x+2y).\frac{\partial}{\partial y}(4x-3y)-(4x-3y).\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)}{(x+2y)^2}\\&=\frac{(x+2y)(-3)-(4x-3y)(2)}{(x+2y)^2}\\&=\frac{-11x}{(x+2y)^2}\end{aligned}$$

3) من أجل $h(x,y)=\left(x^2+3y\right)^5$ وباستعمال قاعدة مشتق قوة دالة، نجد

---

[(1)] Edward T Dowling. Idem, p. 84.
[(2)] Ibid, p. 84.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=5\left(x^2+3y\right)^4.\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+3y\right)$$
$$=5\left(x^2+3y\right)^4(2x)$$
$$=10x\left(x^2+3y\right)^4$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=5\left(x^2+3y\right)^4.\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+3y\right)$$
$$=5\left(x^2+3y\right)^4(3)$$
$$=15\left(x^2+3y\right)^4$$

4) من أجل $I(x,y)=e^{2x^3+5y}$ وباستعمال قاعدة مشتق الدالة الأسية الطبيعية، نجد

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x,y)=e^{2x^3+5y}.\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3+5y\right)$$
$$=e^{2x^3+5y}\left(6x^2\right)$$
$$=6x^2e^{2x^3+5y}$$
$$\frac{\partial I}{\partial y}(x,y)=e^{2x^3+5y}.\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3+5y\right)$$
$$=e^{2x^3+5y}(5)$$
$$=5e^{2x^3+5y}$$

5) من أجل $K(x,y)=\ln\left(7x^2-4y^3\right)$ وباستعمال قاعدة مشتق الدالة اللوغاريتمية الطبيعية، نجد

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{7x^2-4y^3}.\frac{\partial}{\partial x}\left(7x^2-4y^3\right)$$
$$=\frac{1}{7x^2-4y^3}(14x)$$
$$=\frac{14x}{7x^2-4y^3}$$
$$\frac{\partial K}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{7x^2-4y^3}.\frac{\partial}{\partial y}\left(7x^2-4y^3\right)$$
$$=\frac{1}{7x^2-4y^3}\left(-12y^2\right)$$
$$=\frac{-12y^2}{7x^2-4y^3}$$

### 4-2- المشتقات الجزئية الثانية لدالة ذات متغيرين

بما أن المشتقات الجزئية الأولى لدالة ذات متغيرين هي أيضا دوال ذات متغيرين، فإنه يمكن اشتقاقها جزئيا مرة أخرى لتنتج ما يسمى بالمشتقات الجزئية الثانية.

**تعريف 9-8.** *لتكن $z=f(x,y)$ دالة ذات متغيرين.*

- *المشتقة الجزئية الثانية ل $f$ بالنسبة ل $x_i$ و $x_j$ هي المشتقة الجزئية ل $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ بالنسبة ل $x_i$ ويرمز لها بأحد الرموز*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j},\quad f''_{x_j x_i}$$

ونكتب

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

*أي نشتق $f$ للمرة الأولى بالنسبة لـ $x_j$ وللمرة الثانية بالنسبة لـ $x_i$.*[1]

– *إذا كان $i \neq j$، فان $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ تسمى المشتقات الجزئية الثانية المختلطة لـ $f$.*

– *إذا كان $i = j$، فان*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

*تسمى المشتقات الجزئية الثانية الأساسية لـ $f$.*

– *بالمثل، إن كانت المشتقات الجزئية الثانية قابلة للاشتقاق، فيمكن تعريف المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة وهكذا.*

*بشكل عام، نعرف المشتقات الجزئية من الرتبة $k$ لـ $f$ كما يلي*

$$\forall k \geq 2:\ \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\ldots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right) \quad (2)$$

**ملاحظة 9-5**

1) عدد المشتقات الجزئية الثانية لدالة ذات عدة متغيرات مستقلة يساوي مربع عدد هذه المتغيرات.

2) عادة ما تجمع المشتقات الجزئية الثانية لدالة ذات عدة متغيرات مستقلة في نقطة $a$، في مصفوفة[*] هيس التالية (Hesse's Matrix)

$$H_f(a)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)\end{pmatrix}_{n\times n}$$

وفي حالة دالة ذات متغيرين $f(x,y)$ تصبح مصفوفة هيس كالتالي

$$H_f(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\end{pmatrix}$$ (بتصرف)[3]

3) إذا كانت المشتقات الجزئية الثانية المختلطة مستمرة فهي متساوية، أي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x,y) \quad (4)$$

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 11.22, p. 311.
(2) Ibid. Définition 11.22, p. 312.

(*) المصفوفة عبارة عن جدول به أسطر وأعمدة، سندرس المصفوفات في الفصل الثاني عشر.

(3) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 11.27, p. 322.
(4) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 192.

**أمثلة 9–8.** في الأمثلة التالية، أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية ثم شكل مصفوفة هيس عند نقط معينة.

**1)** إذا كان $f(x,y)=x^3+y^2-xy+1$ و $a(3;5)$، فان

- المشتقات الجزئية الأولى ل $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-x$$

- المشتقات الجزئية الثانية ل $f$
- إذا قمنا باشتقاق $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-y$ بالنسبة ل $x$، نحصل على المشتقة الثانية ل $f$ بالنسبة ل $x$ وهي مشتقة أساسية، أي

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2-y\right)\\&=6x\end{aligned}$$

- أما مشتق $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-y$ بالنسبة ل $y$ فيمثل مشتقة ثانية مختلطة ل $f$، أي

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2-y\right)\\&=-1\end{aligned}$$

- نشتق $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-x$ بالنسبة ل $x$، لنحصل على المشتقة الثانية المختلطة ل $f$، أي

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y-x\right)\\&=-1\end{aligned}$$

- ومشتقة $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-x$ بالنسبة ل $y$ هي المشتقة الثانية الأساسية ل $f$، أي

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left(2y-x\right)\\&=2\end{aligned}$$

- بما أن المشتقتين الجزئيتين الثانيتين المختلطتين ل $f$ مستمرتان **(**أي $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)=-1$ دالة مستمرة و $\frac{\partial f}{\partial y\partial x}(x,y)=-1$ دالة مستمرة**)**، فهما متساويتان، أي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-1$$

- مصفوفة هيس من أجل $a(x,y)=a(3;5)$

لدينا

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

ومنه

$$H_f(3,5)=\begin{pmatrix}6(3) & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

2) إذا كان $g(x,y)=x^2y^3$ و $a(-2;1)$ ، فإن

- المشتقات الجزئية الأولى ل $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2xy^3 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=3x^2y^2$$

- المشتقات الجزئية الثانية ل $g$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^3\right)\\&=2y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3\right)\\&=6xy^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2\right)\\&=6xy^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2\right)\\&=6x^2y\end{aligned}$$

نلاحظ أن

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=6xy^2$$

لأن الدالتين $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)=6xy^2$ و $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y)=6xy^2$ مستمرتان.

- مصفوفة هيس من أجل $a(x,y)=a(-2;1)$

لدينا

$$H_g(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$$

ومنه

$$H_g(-2;1)=\begin{pmatrix} 2(1)^3 & 6(-2)(1)^2 \\ 6(-2)(1)^2 & 6(-2)^2(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ -12 & 24 \end{pmatrix}$$

## 5- القيم الحدية لدالة ذات متغيرين

عند البحث عن القيم الحدية لدالة ذات متغيرين، نميز حالتين، القيم الحدية لدالة بدون قيود وأخرى بقيود.

### 5-1- القيم الحدية لدالة ذات متغيرين بدون قيود

*لإيجاد القيم الحدية لدالة ذات متغيرين $f(x,y)$ بدون قيود، نتبع الخطوات التالية*

*1) إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لـ $f$ ومساواتها بالصفر، أي*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

*بحل المعادلتين الأخيرتين، نحصل على النقط الحرجة $(a,b)$ لـ $f$، أي*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

*وهذا ما يسمى بالشرط الضروري أو شرط الدرجة الأولى.* (1)

*2) إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لـ $f$ وتشكيل مصفوفة هيس.*

*3) تعويض قيم النقط الحرجة $(a,b)$ في مصفوفة هيس، أي*

$$H_f(a,b)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix} \quad (2)$$

*4) نحسب محدد (*) مصفوفة هيس، أي*

$$\det\left(H_f(a,b)\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)$$

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 195-196.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit, p. 334.

(*) سندرس محدد مصفوفة في الفصل الثاني عشر.

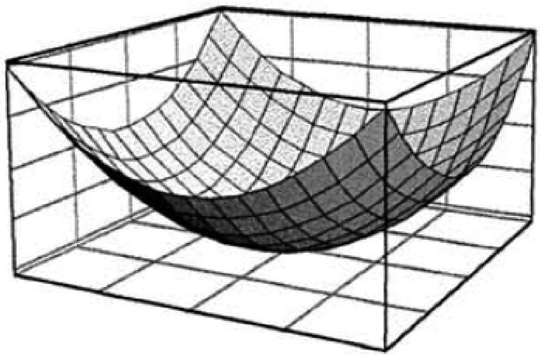
بما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$، فإن

$$\det\left(H_f(a,b)\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 \quad (1)$$

نميز ثلاث حالات ل $\det\left(H_f(a,b)\right)$.

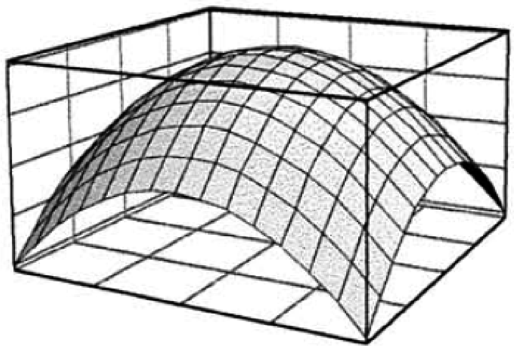
أ) إذا كان الشرط الكافي أو شرط الدرجة الثانية محققا (أي $\det\left(H_f(a,b)\right) > 0$) وكان

أ-1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > 0$، فإن الدالة $f$ تقبل قيمة حدية صغرى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة $(a,b)$ وهذا ما يوضحه الشكل التالي



**شكل 9-11- منحنى بياني لدالة ذات متغيرين تقبل قيمة حدية صغرى**

أ-2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) < 0$، فإن الدالة $f$ تقبل قيمة حدية عظمى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة $(a,b)$ وهذا ما يوضحه الشكل التالي



**شكل 9-12- منحنى بياني لدالة ذات متغيرين تقبل قيمة حدية عظمى**(2)

ب) إذا كان $\det\left(H_f(a,b)\right) < 0$، فإن الدالة $f$ لا تقبل قيم حدية وإنما

ب-1) نقطة انعطاف، إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ لهما نفس الإشارة.

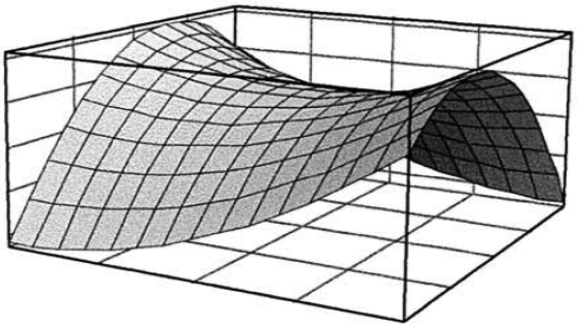
ب-2) نقطة سرج(*) (تكون للدالة قيمة صغرى إذا نظرنا من المحور $x$ وقيمة عظمى إذا نظرنا من المحور $y$)، إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ مختلفتين في الإشارة والشكل التالي يوضح ذلك

---

(1) Edward T Dowling. Idem, p. 86.

(2) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 466.

(*) سُميت نقطة سرج لأن شكلها يشبه السرج الذي يوضع على الحصان.



***شكل 9-13- منحنى بياني لدالة ذات متغيرين تقبل نقطة سرج [1]***

*ج) إذا كان $\det\left(H_f\left(a,b\right)\right)=0$، فإن الدالة $f$ يمكن أن يكون أو لا يكون لها قيم حدية.* [2]

**أمثلة 9-9.** أوجد القيم الحدية للدالة $f\left(x,y\right)=x^2+3y^2$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى ل $f$ ومساواتها بالصفر

لدينا

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=0\\ 6y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

ومنه $\left(0,0\right)$ نقطة حرجة للدالة $f$ .

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية ل $f$ وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x,y\right)=6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x,y\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x,y\right)=0$$

ومنه

$$H_f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x,y\right)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x,y\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x,y\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

وعليه

$$H_f\left(0,0\right)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\det\left(H_f\left(0,0\right)\right)=2\left(6\right)-\left(0\right)^2=12>0$$

---

[1] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 386-387.

[2] نفسه، ص. 388.

وبما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=6>0$ ، فإن $f(0,0)=0$ قيمة حدية صغرى ل $f$ عند النقطة الحرجة $(0,0)$.

– **القيم الحدية للدوال الاقتصادية ذات متغيرين بدون قيود**

في الفصل الخامس، تطرقنا إلى الحساب الحدي في الاقتصاد بالنسبة لدوال ذات متغير واحد وفي هذا الفصل، سندرس التفاضل الجزئي لمعرفة القيم الحدية لدوال اقتصادية كدوال الإيراد والتكلفة لكونها تعتمد على متغيرين أو أكثر.

**أمثلة 9–10.** إذا كانت دالة الإيراد الكلي لمصنع معين ينتج نوعين من السلع $x$ و $y$ على الصورة التالية

$$TR(x,y)=-x^2+8x-2y^2 \qquad \text{وحـدة نقديـة}$$

– أوجد حجم الإنتاج من السلعتين $x$ و $y$ الذي يحقق أعلى إيراد ممكن.

– لنجد المشتقات الجزئية الأولى ل $TR$ ونساويها بالصفر

لدينا

$$\begin{cases}\frac{\partial TR}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial TR}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+8=0\\ -4y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}$$

ومنه $(4;0)$ نقطة حرجة ل $TR$.

– إيجاد المشتقات الجزئية الثانية ل $TR$ وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial x^2}(x,y)=-2 \qquad \frac{\partial^2 TR}{\partial y^2}(x,y)=-4 \qquad \frac{\partial^2 TR}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 TR}{\partial y\partial x}(x,y)=0$$

ومنه

$$H_{TR}(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 TR}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 TR}{\partial y\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial^2 TR}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 TR}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$

وعليه

$$H_{TR}(4,0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\det\left(H_{TR}(4,0)\right)=-2(-4)-(0)^2=8>0$$

وبما أن $\frac{\partial^2 TR}{\partial x^2}(4,0)=-2<0$ و $\frac{\partial^2 TR}{\partial y^2}(4,0)=-4<0$، فإن $TR(4,0)=16$ وحدة نقدية قيمة حدية عظمى ل $TR$ عند النقطة الحرجة $(4,0)$، أي على المصنع إنتاج أربع وحدات من السلعة $x$ للحصول على أكبر إيراد كلي وهو 16 وحدة نقدية.

### 5-2- القيم الحدية لدالة ذات متغيرين بقيد

عادة ما تسعى المؤسسات إلى تعظيم أو تقليص الدوال تحت قيود يفرضها السوق أو عوامل الإنتاج أو غيرها.

*لإيجاد القيم الحدية لدالة $f(x,y)$ (تُسمى دالة الهدف)، تحت القيد $g(x,y)=k$ ($k$ ثابت)، نتبع الخطوات التالية*

*1) تحويل دالة القيد إلى دالة صِفرية كما يلي* $k-g(x,y)=0$

*2) تشكيل دالة لاجرانج*

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\left[k-g(x,y)\right]$$

*حيث $\lambda$ يسمى معامل (مضاعف) لاجرانج(*) و $L(x,y,\lambda)$ دالة لاجرانج.*

*3) إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر، أي*

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0$$ [1]

*(وهذا ما يسمى بالشرط الضروري أو شرط الدرجة الأولى) لإيجاد قيم المتغيرات التي تشكل النقط الحرجة $(a,b)$ للدالة $L$، أي*

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(a,b)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(a,b)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x}(a,b)=0$$

*4) إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس (وهذا ما يسمى بالشرط الكافي أو شرط الدرجة الثانية)، ثم تعويض قيم النقط الحرجة في هذه الأخيرة، أي*

$$H_L(a,b)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

*5) حساب محدد مصفوفة هيس، أي*

[2]
$$\begin{aligned}\det\left(H_L(a,b)\right)=&\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a,b)\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(a,b)\right)\right]\\ &-\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(a,b)\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(a,b)\right)\right]\\ &+\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(a,b)\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(a,b)\right)\right]\end{aligned}$$

---

(*) مضاعف لاجرانج يقيس الأثر على دالة الهدف لتغير بسيط في ثابت القيد $k$.

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 499.

(2) Ibid, pp. 515-516.

*نميز ثلاث حالات.*

*أ) إذا كان* $\det\left(H_L\left(a,b\right)\right)>0$*، فإن الدالة* $f$ *تقبل قيمة حدية عظمى* $f\left(a,b\right)$ *عند النقطة الحرجة* $\left(a,b\right)$*.*

*ب) إذا كان* $\det\left(H_L\left(a,b\right)\right)<0$*، فإن الدالة* $f$ *تقبل قيمة حدية صغرى* $f\left(a,b\right)$ *عند النقطة الحرجة* $\left(a,b\right)$*.*

*ج) إذا كان* $\det\left(H_L\left(a,b\right)\right)=0$*، فإن الدالة* $f$ *يمكن أن يكون أو لا يكون لها قيم حدية.* [1]

**أمثلة 9–11.** مصنع ينتج نوعين من السلع $x$ و $y$ ، دالة تكلفتهما الكلية هي

$$TC\left(x,y\right)=\frac{3}{2}x^2+2xy+y^2-2y \quad \text{وحدة نقدية}$$

– أوجد حجم الإنتاج من كلا النوعين لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، علما أن

$$3x+2y=12$$

– لدينا

– دالة الهدف

$$TC\left(x,y\right)=\frac{3}{2}x^2+2xy+y^2-2y$$

– دالة القيد

$$g\left(x,y\right)=3x+2y=12$$

– تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$12-3x-2y=0$$

– دالة لاجرانج

$$L\left(x,y,\lambda\right)=\frac{3}{2}x^2+2xy+y^2-2y+\lambda\left(12-3x-2y\right)$$

– إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}\left(x,y,\lambda\right)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}\left(x,y,\lambda\right)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}\left(x,y,\lambda\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y-3\lambda=0.............(1)\\ 2x+2y-2-2\lambda=0........(2)\\ 12-3x-2y=0..............(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن $\lambda$، أي

$$\begin{cases}(1)\Leftrightarrow \lambda=x+\dfrac{2}{3}y..........(1')\\ (2)\Leftrightarrow \lambda=x+y-1.......(2')\end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد

$$\begin{aligned}(1')=(2') &\Leftrightarrow x+\frac{2}{3}y=x+y-1\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}y-1=0\\ &\Leftrightarrow y=3\end{aligned}$$

---

[1] Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, pp. 515-516.

بالتعويض عن قيمة $y$ في المعادلة $(3)$ ، نجد

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow 12-3x-2(3)=0\\ &\Leftrightarrow x=2\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمتي $x$ و $y$ في المعادلة $(2')$، نجد

$$(2') \Leftrightarrow \lambda = 2+3-1=4$$

ومنه $(2;3)$ نقطة حرجة للدالة $L$ من أجل $\lambda=4$ .

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda)=3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y,\lambda)=2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(x,y,\lambda)=-3$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y,\lambda)=2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda)=2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(x,y,\lambda)=-2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y)\end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3\\ 2 & 2 & -2\\ -3 & -2 & 0\end{pmatrix}=H_L(2;3)$$

وعليه، باستعمال السطر الأول للمصفوفة $H_L(2;3)$، نجد

$$\begin{aligned}\det\left(H_L(2;3)\right)&=3\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & -2\\ -3 & 0\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & -2\end{vmatrix}\\ &=3\left[(2.0)-(-2.-2)\right]-2\left[(2.0)-(-2.-3)\right]-3\left[(2.-2)-(2.-3)\right]\\ &=3(0-4)-2(0-6)-3(-4+6)\\ &=-6<0\end{aligned}$$

ومنه $TC(2;3)=21$ وحدة نقدية قيمة حدية صغرى للدالة $TC$ عند النقطة الحرجة $(2;3)$ من أجل $\lambda=4$، أي على المصنع إنتاج وحدتين من النوع $x$ وثلاث وحدات من النوع $y$ للحصول على أدنى تكلفة وهي 21 وحدة نقدية. نلاحظ أن $\lambda=4$، هذا يعني أن النقصان في ثابت القيد من 12 إلى 11 يؤدي إلى النقصان في دالة التكاليف $TC$ بمقدار 4 وحدات نقدية تقريبا.

## 6- تمارين

### 6-1- تمارين محلولة

**تمرين 9-1.** أوجد مجالات تعريف الدوال التالية ومثلها بيانيا.

$$g(x,y)=2x^3-5x^2y+y-1 \qquad f(x,y)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}$$

$$j(x,y)=\frac{-4}{x^2+y^2} \qquad i(x,y)=\ln(xy) \qquad h(x,y)=e^{x^2}+xy$$

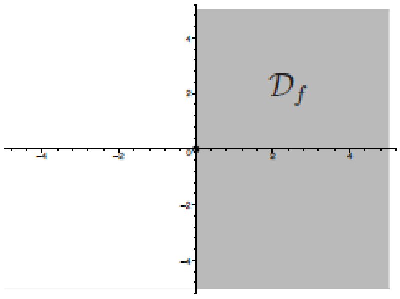
**الحل**

1) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}$

تكون $f$ معرفة، إذا وفقط إذا كان، $\sqrt{x}$ معرفة، أي $x\geq 0$ و $x^2+y^2\neq 0$ ، أي $(x;y)\neq(0;0)$ ونكتب

$$D_f=\{(x,y)\in R^2 / x\geq 0\wedge(x;y)\neq(0;0)\}$$

والشكل التالي يوضح ذلك



**شكل 9-14- تمثيل بياني لمجال تعريف الدالة** $(x,y)\mapsto\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}$

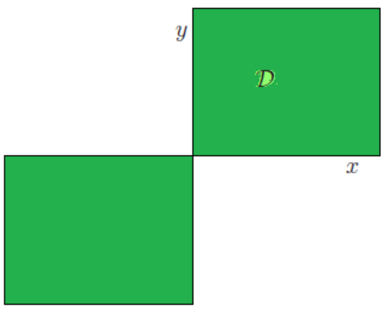
2) $g(x,y)=2x^3-5x^2y+y-1$ وعليه، $g$ معرفة على $R^2$، أي $D_g=R^2$.

3) $h(x,y)=e^{x^2}+xy$ وعليه، $h$ معرفة على $R^2$، أي $D_h=R^2$.

4) $i(x,y)=\ln(xy)$ ومنه

$$\begin{aligned}D_i&=\{(x,y)\in R^2 / xy>0\}\\&=\{(x,y)\in R^2 / (x>0\wedge y>0)\vee(x<0\wedge y<0)\}\\&=]0;+\infty[\times]0;+\infty[\cup]-\infty;0[\times]-\infty;0[\\&=R_+^{*2}\cup R_-^2\end{aligned}$$

والشكل التالي يوضح ذلك



**شكل 9-15- تمثيل بياني لمجال تعريف الدالة** $(x,y)\mapsto\ln(xy)$

5) $j(x,y)=\dfrac{-4}{x^2+y^2}$ ومنه

$$\begin{aligned} D_j &= \left\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2\neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in R^2 / (x;y)\neq(0;0)\right\} \\ &= R^2-\left\{(0;0)\right\}=R^{*2} \end{aligned}$$

**تمرين 9−2.** إذا كان لدينا مستهلك دالة منفعته على الصورة التالية

$$U(x,y)=-x^2+3xy+7x-2y^2+15y$$

حيث $x$ و $y$ تمثلان على الترتيب عدد الوحدات المستهلكة من النوع الأول والثاني لسلعة معينة وكان سعر الوحدة الواحدة من النوع الأول والثاني على التوالي 7 و3 دينار وقد خصص المستهلك للإنفاق عليهما 16 دينار.

- كم وحدة على المستهلك أن يشتري من كلا النوعين حتى يحصل على أقصى منفعة ؟

**الحل.** لنجد القيم الحدية للدالة $U$ تحت القيد $7x+3y=16$ .

- لدينا
- دالة الهدف

$$U(x,y)=-x^2+3xy+7x-2y^2+15y$$

- دالة القيد

$$g(x,y)=7x+3y=16$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صِفرية

$$16-7x-3y=0$$

- دالة لاجرانج

$$L(x,y,\lambda)=-x^2+3xy+7x-2y^2+15y+\lambda(16-7x-3y)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+7-7\lambda=0........(1) \\ 3x-4y+15-3\lambda=0.........(2) \\ 16-7x-3y=0................(3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن $\lambda$، أي

$$\begin{cases} (1)\Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{2}{7}x+\dfrac{3}{7}y+1......(1') \\ (2)\Leftrightarrow \lambda=x-\dfrac{4}{3}y+5...........(2') \end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد

$$(1')=(2')\Leftrightarrow -\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y+1=x-\frac{4}{3}y+5$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{27}{37}x+\frac{84}{37}..........(4)$$

بالتعويض عن قيمة $y$ في المعادلة $(3)$ ، نجد

$$(3)\Leftrightarrow 16-7x-3\left(\frac{27}{37}x+\frac{84}{37}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

بالتعويض عن قيمة $x$ في المعادلة $(4)$ ، نجد

$$(4)\Leftrightarrow y=\frac{27}{37}(1)+\frac{84}{37}$$

$$\Leftrightarrow y=3$$

بالتعويض عن قيمتي $x$ و $y$ في المعادلة $(2')$، نجد

$$(2')\Leftrightarrow \lambda=1-\frac{4}{3}(3)+5=2$$

ومنه $(1;3)$ نقطة حرجة للدالة $L$ من أجل $\lambda=2$ .

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda)=-2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y,\lambda)=3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(x,y,\lambda)=-7$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y,\lambda)=3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda)=-4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(x,y,\lambda)=-3$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-7 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 3 & -4 & -3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}=H_L(1;3)$$

وعليه، باستعمال السطر الأول للمصفوفة $H_L(1;3)$ ، نجد

$$\det\left(H_L(1;3)\right) = -2\begin{vmatrix}-4 & -3\\ -3 & 0\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}3 & -3\\ -7 & 0\end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix}3 & -4\\ -7 & -3\end{vmatrix}$$
$$= -2\left[(-4.0)-(-3.-3)\right] - 3\left[(3.0)-(-3.-7)\right] - 7\left[(3.-3)-(-4.-7)\right]$$
$$= -2(0-9) - 3(0-21) - 7(-9-28)$$
$$= 340 > 0$$

ومنه $U(1;3)=42$ قيمة حدية عظمى للدالة $U$ عند النقطة الحرجة $(1;3)$ من أجل $\lambda = 2$، أي على المستهلك شراء وحدة واحدة من النوع $x$ وثلاث وحدات من النوع $y$ للحصول على أقصى منفعة وهي 42. نلاحظ أن $\lambda = 2$، هذا يعني أن الزيادة في ثابت القيد من 16 إلى 17 يؤدي إلى الزيادة في دالة المنفعة $U$ بمقدار 2 تقريبا.

**تمرين 9-3.** لمنشأة تنتج سلعتين $x$ و $y$، دالة الربح التالية

$$TP(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 40x + 30y - 100 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد مستويات الإنتاج من السلعتين $x$ و $y$ التي تعظم الأرباح.

**الحل.** إيجاد مستويات الإنتاج من السلعتين $x$ و $y$ التي تعظم الأرباح

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى ل $TP$ ومساواتها بالصفر. لدينا

$$\begin{cases}\dfrac{\partial TP}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial TP}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+40=0\\ -y+30=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=20\\ y=30\end{cases}$$

ومنه $(20;30)$ نقطة حرجة للدالة $TP$.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية ل $TP$ وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 TP}{\partial x^2}(x,y) = -2 \qquad \frac{\partial^2 TP}{\partial y^2}(x,y) = -1 \qquad \frac{\partial^2 TP}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 TP}{\partial y\partial x}(x,y) = 0$$

ومنه

$$H_{TP}(x,y) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 TP}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 TP}{\partial y\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial^2 TP}{\partial x\partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 TP}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

وعليه

$$H_{TP}(20;30) = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\det\left(H_{TP}\left(20;30\right)\right)=-2\left(-1\right)-\left(0\right)^2=2>0$$

وبما أن $\frac{\partial^2 TP}{\partial x^2}\left(20;30\right)=-2<0$ و $\frac{\partial^2 TP}{\partial y^2}\left(20;30\right)=-1<0$ ، فإن $TP\left(20;30\right)=750$ قيمة حدية عظمى ل $TP$ عند النقطة الحرجة $\left(20;30\right)$، أي على المنشأة إنتاج 20 وحدة من السلعة $x$ و 30 وحدة من السلعة $y$ للحصول على أكبر ربح وهو 750 وحدة نقدية.

**تمرين 9-4.** مصنع ينتج نوعين من السلع $x$ و $y$ وكانت دالة التكلفة الكلية كما يلي

$$TC\left(x,y\right)=x^2+2x+y^2 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد حجم الإنتاج من السلعتين لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، علما أنه يمكن إنتاج خمس وحدات من كلا النوعين.

**الحل.** إيجاد حجم الإنتاج من السلعتين لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن. لدينا

- دالة الهدف

$$TC\left(x,y\right)=x^2+2x+y^2$$

- دالة القيد

$$g\left(x,y\right)=x+y=5$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$5-x-y=0$$

- دالة لاجرانج

$$L\left(x,y,\lambda\right)=x^2+2x+y^2+\lambda\left(5-x-y\right)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}\left(x,y,\lambda\right)=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}\left(x,y,\lambda\right)=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}\left(x,y,\lambda\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2-\lambda=0.............(1)\\ 2y-\lambda=0..................(2)\\ 5-x-y=0................(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن $\lambda$، أي

$$\begin{cases}(1)\Leftrightarrow\lambda=2x+2..........(1')\\ (2)\Leftrightarrow\lambda=2y.............(2')\end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد

$$\begin{aligned}(1')=(2')&\Leftrightarrow 2x+2=2y\\ &\Leftrightarrow y=x+1\end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة $y$ في المعادلة (3) ، نجد

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow 5-x-\left(x+1\right)=0\\ &\Leftrightarrow 4-2x=0\\ &\Leftrightarrow x=2\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة $x$ في عبارة $y$ ، نجد

$$y = x+1 \Leftrightarrow y = 2+1 = 3$$

بالتعويض عن قيمة $y$ في المعادلة $(2')$، نجد

$$\begin{aligned}(2') &\Leftrightarrow \lambda = 2y \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2(3) = 6\end{aligned}$$

ومنه $(2;3)$ نقطة حرجة للدالة $L$ من أجل $\lambda = 6$ .

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y,\lambda) = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x}(x,y,\lambda) = -1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y}(x,y,\lambda) = -1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) = -1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) = -1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y,\lambda) = 0$$

ولدينا

$$H_L(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = H_L(2;3)$$

وعليه، باستعمال السطر الأول للمصفوفة $H_L(2;3)$، نجد

$$\begin{aligned}\det(H_L(2;3)) &= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2\left[(2.0)-(-1.-1)\right] - 0 - 1\left[(0.-1)-(2.-1)\right] \\ &= 2(0-1) - 1(0+2) \\ &= -4 < 0\end{aligned}$$

ومنه $TC(2;3) = 17$ وحدة نقدية قيمة حدية صغرى للدالة $TC$ عند النقطة الحرجة $(2;3)$ من أجل $\lambda = 6$، أي على المصنع إنتاج وحدتين من النوع $x$ وثلاث وحدات من النوع $y$ للحصول على أدنى تكلفة وهي 17 وحدة نقدية. نلاحظ أن $\lambda = 6$، هذا يعني أن النقصان في ثابت القيد من 5 إلى 4 يؤدي إلى النقصان في دالة التكاليف $TC$ بمقدار 6 وحدات نقدية تقريبا.

**تمرين 9−5.** إذا كانت دالة المنفعة الكلية لمستهلك تأخذ الصورة التالية

$$U\left(Q_1,Q_2\right)=Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}$$

حيث $Q_1$ و $Q_2$ الكمية المشتراة من السلعتين الأولى والثانية على الترتيب. إذا علمت أن سعر السلعتين هو 3 وحدات نقدية للسلعة الأولى ووحدتان نقديتان للسلعة الثانية وأن المستهلك خصص 80 وحدة نقدية للإنفاق عليهما، فكم على المستهلك أن يشتري من كلا السلعتين لتعظيم منفعته الكلية إلى أقصى حد ممكن ؟

**الحل.** لدينا

- دالة الهدف

$$U\left(Q_1,Q_2\right)=Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}$$

- دالة القيد

$$g\left(Q_1,Q_2\right)=3Q_1+2Q_2=80$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$80-3Q_1-2Q_2=0$$

- دالة لاجرانج

$$L\left(Q_1,Q_2,\lambda\right)=Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}+\lambda\left(80-3Q_1-2Q_2\right)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial Q_1}\left(Q_1,Q_2,\lambda\right)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_2}\left(Q_1,Q_2,\lambda\right)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}\left(Q_1,Q_2,\lambda\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}-3\lambda=0.............(1)\\ \frac{3}{4}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}}-2\lambda=0.............(2)\\ 80-3Q_1-2Q_2=0...........(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن $\lambda$، أي

$$\begin{cases}(1)\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{12}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}..............(1')\\ (2)\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{8}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}}..............(2')\end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد

$$\begin{aligned}(1')=(2')&\Leftrightarrow\frac{1}{12}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{8}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}}\\ &\Leftrightarrow\frac{1}{12}\frac{Q_2^{\frac{3}{4}}}{Q_1^{\frac{3}{4}}}-\frac{3}{8}\frac{Q_1^{\frac{1}{4}}}{Q_2^{\frac{1}{4}}}=0\\ &\Leftrightarrow\frac{2Q_2-9Q_1}{24Q_1^{\frac{3}{4}}Q_2^{\frac{1}{4}}}=0\\ &\Leftrightarrow 2Q_2-9Q_1=0\\ &\Leftrightarrow Q_2=\frac{9}{2}Q_1................(3')\end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة $Q_2$ في المعادلة (3) ، نجد

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow 80-3Q_1-9Q_1=0\\ &\Leftrightarrow 80-12Q_1=0\\ &\Leftrightarrow Q_1=\frac{20}{3}\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة $Q_1$ في المعادلة $(3')$ ، نجد

$$(3')\Leftrightarrow Q_2=\frac{9}{2}\left(\frac{20}{3}\right)=30$$

بالتعويض عن قيمتي $Q_1$ و $Q_2$ في المعادلة $(1')$، نجد

$$\begin{aligned}(1') &\Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{12}\left(\frac{20}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}(30)^{\frac{3}{4}}\\ &\Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{12}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\simeq 0.25\end{aligned}$$

ومنه $\left(\frac{20}{3};30\right)$ نقطة حرجة للدالة $L$ من أجل $\lambda=0.25$ .

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda)=-3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda)=\tfrac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2,\lambda)=-\tfrac{3}{16}Q_1^{-\frac{7}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda)=-2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2,\lambda)=-\tfrac{3}{16}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{5}{4}} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda)=\tfrac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(Q_1,Q_2,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial \lambda}(Q_1,Q_2,\lambda)=-2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial \lambda}(Q_1,Q_2,\lambda)=-3$$

ولدينا

$$H_L(Q_1,Q_2)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2\partial Q_1}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial Q_1}(Q_1,Q_2)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1\partial Q_2}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial Q_2}(Q_1,Q_2)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1\partial \lambda}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2\partial \lambda}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(Q_1,Q_2)\end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(Q_1,Q_2)=\begin{pmatrix}-\frac{3}{16}Q_1^{-\frac{7}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}} & \frac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} & -3\\ \frac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} & -\frac{3}{16}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{5}{4}} & -2\\ -3 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

ومنه

$$H_L\left(\frac{20}{3};30\right) \simeq \begin{pmatrix} -4.88 & 0.03 & -3 \\ 0.03 & -0.004 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

وعليه، باستعمال السطر الثالث للمصفوفة $H_L\left(\frac{20}{3};30\right)$، نجد

$$\begin{aligned} \det\left(H_L\left(\frac{20}{3};30\right)\right) &= -3\begin{vmatrix} 0.03 & -3 \\ -0.004 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -4.88 & -3 \\ 0.03 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -3\left[(0.03.-2)-(-0.004.-3)\right] + 2\left[(-4.88.-2)-(0.03.-3)\right] \\ &= 19.916 > 0 \end{aligned}$$

ومنه $U\left(\frac{20}{3};30\right) = 20.59$ قيمة حدية عظمى للدالة $U$ عند النقطة الحرجة $\left(\frac{20}{3};30\right)$ من أجل $\lambda = 0.25$، أي على المستهلك شراء ما يقارب 7 وحدات من السلعة الأولى و 30 وحدة من السلعة الثانية لتحقيق أقصى منفعة وهي 20.59. نلاحظ أن $\lambda = 0.25$، هذا يعني أن الزيادة في ثابت القيد من 80 إلى 81 يؤدي إلى الزيادة في دالة المنفعة $U$ بمقدار 0.25 تقريبا.

**تمرين 9-6.** من الخبرة السابقة لإحدى المنشآت التجارية، تبين أن التكاليف الكلية لأحد المنتجات ترتبط بالدعاية حسب العلاقة التالية

$$TC = 2T^2 - 6TI + 10T + \frac{9}{2}I^2 + 10I + 100 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

حيث، $T$ تكاليف الدعاية عن طريق التلفاز و $I$ تكاليف الدعاية عبر الانترنت. إذا كانت التكاليف المخصصة للدعاية في هذه المنشأة هي 100 وحدة نقدية، فكم يجب أن تنفق المنشأة على الدعاية عن طريق التلفاز والانترنت لتحقيق اقل تكلفة ممكنة ؟

**الحل.** إيجاد حجم الإنفاق على الدعاية عن طريق التلفاز والانترنت لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن. لدينا

- دالة الهدف

$$TC(T,I) = 2T^2 - 6TI + 10T + \frac{9}{2}I^2 + 10I + 100$$

- دالة القيد

$$g(T,I) = T + I = 100$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$100 - T - I = 0$$

- دالة لاجرانج

$$L(T,I,\lambda) = 2T^2 - 6TI + 10T + \frac{9}{2}I^2 + 10I + 100 + \lambda(100 - T - I)$$

– إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial T}(T,I,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial I}(T,I,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(T,I,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4T-6I+10-\lambda=0 .............(1) \\ 9I-6T+10-\lambda=0 .............(2) \\ 100-T-I=0 ......................(3) \end{cases}$$

من المعادلتين $(1)$ و $(2)$ ، نستخرج علاقة تعبر عن $\lambda$ ، أي

$$\begin{cases} (1) \Leftrightarrow \lambda=4T-6I+10 ...............(1') \\ (2) \Leftrightarrow \lambda=9I-6T+10 .............(2') \end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$ ، نجد

$$\begin{aligned} (1')=(2') &\Leftrightarrow 4T-6I+10=9I-6T+10 \\ &\Leftrightarrow 10T=15I \\ &\Leftrightarrow T=\frac{3}{2}I ...........(3') \end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة $T$ في المعادلة $(3)$ ، نجد

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 100-\frac{3}{2}I-I=0 \\ &\Leftrightarrow 100-\frac{5}{2}I=0 \\ &\Leftrightarrow I=40 \end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة $I$ في المعادلة $(3')$ ، نجد

$$(3') \Leftrightarrow T=\frac{3}{2}(40)=60$$

بالتعويض عن قيمتي $T$ و $I$ في المعادلة $(1')$ ، نجد

$$\begin{aligned} (1') &\Leftrightarrow \lambda=4(60)-6(40)+10 \\ &\Leftrightarrow \lambda=10 \end{aligned}$$

ومنه $(60;40)$ نقطة حرجة للدالة $L$ من أجل $\lambda=10$ .

– إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}(T,I,\lambda)=4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial T}(T,I,\lambda)=-6 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial T}(T,I,\lambda)=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T \partial I}(T,I,\lambda)=-6 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial I^2}(T,I,\lambda)=9 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial I}(T,I,\lambda)=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T \partial \lambda}(T,I,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial \lambda}(T,I,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(T,I,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(T,I)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial I\partial T}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial T}(T,I)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial T\partial I}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial I^2}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial I}(T,I)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial T\partial \lambda}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial I\partial \lambda}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(T,I)\end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(T,I)=\begin{pmatrix}4 & -6 & -1\\ -6 & 9 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=H_L(60;40)$$

وعليه، باستعمال السطر الثالث للمصفوفة $H_L(60;40)$، نجد

$$\begin{aligned}\det\left(H_L(60;40)\right)&=-\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 9 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & -1\\ -6 & -1\end{vmatrix}\\ &=-\left[(-6.-1)-(9.-1)\right]+\left[(4.-1)-(-6.-1)\right]\\ &=-(6+9)+(-4-6)\\ &=-25<0\end{aligned}$$

ومنه وحدة نقدية $TC(60;40)=1100$ قيمة حدية صغرى للدالة $TC$ عند النقطة الحرجة $(60;40)$ من أجل $\lambda=10$، أي على المنشأة الإنفاق على الدعاية عن طريق التلفاز والانترنت 60 وحدة نقدية و40 وحدة نقدية على الترتيب للحصول على أدنى تكلفة وهي 1100 وحدة نقدية. نلاحظ أن $\lambda=10$، هذا يعني أن النقصان في ثابت القيد من 100 إلى 99 يؤدي إلى النقصان في دالة التكاليف $TC$ بمقدار 10 وحدات نقدية تقريبا.

**تمرين 9-7.** حدد القيمة القصوى لدالة الإنتاج التالية والتي تسمى دالة كوب–دوجلاس[1]

$$Q(K,L)=50K^{0.2}L^{0.8}$$

علما أن سعر رأس المال $P_K=10$، سعر العمل $P_L=20$ وقيد الميزانية هو 300 وحدة نقدية.

**الحل.** لدينا

- دالة الهدف

$$Q(K,L)=50K^{0.2}L^{0.8}$$

- دالة القيد

$$g(K,L)=10K+20L=300$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$300-10K-20L=0$$

[1] دالة كوب–دوجلاس (Cobb-Douglas) هي من دوال الإنتاج المعروفة التي تحدد العلاقة بين الإنتاج والعوامل الداخلة في العملية الإنتاجية ويعبر عنها بالصيغة التالية

$$Q(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

حيث $Q$ الإنتاج، $A$ كمية ثابتة موجبة، $K$ كمية عنصر رأس المال، $L$ كمية عنصر العمل، $\alpha$ نسبة الزيادة في الإنتاج عندما يزداد عنصر رأس المال بنسبة 1%، $\beta$ نسبة الزيادة في الإنتاج عندما يزداد عنصر العمل بنسبة 1%، ينظر: عقيل جاسم عبد الله، إبراهيم غبريال. *مقدمة في الاقتصاد الرياضي*. ط 2. دار مجدلاوي للنشر، عمان– الأردن، 1999، ص. 292.

- دالة لاجرانج

$$L(K,L,\lambda)=50K^{0.2}L^{0.8}+\lambda(300-10K-20L)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial K}(K,L,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial L}(K,L,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(K,L,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10K^{-0.8}L^{0.8}-10\lambda=0..............(1)\\ 40K^{0.2}L^{-0.2}-20\lambda=0.............(2)\\ 300-10K-20L=0..............(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن $\lambda$، أي

$$\begin{cases}(1)\Leftrightarrow\lambda=K^{-0.8}L^{0.8}.................(1')\\ (2)\Leftrightarrow\lambda=2K^{0.2}L^{-0.2}..............(2')\end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد

$$\begin{aligned}(1')=(2')&\Leftrightarrow K^{-0.8}L^{0.8}=2K^{0.2}L^{-0.2}\\ &\Leftrightarrow \frac{L^{0.8}}{K^{0.8}}-2\frac{K^{0.2}}{L^{0.2}}=0\\ &\Leftrightarrow \frac{L-2K}{K^{0.8}L^{0.2}}=0\\ &\Leftrightarrow L-2K=0\\ &\Leftrightarrow L=2K.................(3')\end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة $L$ في المعادلة (3) ، نجد

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow 300-10K-20(2K)=0\\ &\Leftrightarrow 300-50K=0\\ &\Leftrightarrow K=6\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة $K$ في المعادلة $(3')$ ، نجد

$$(3')\Leftrightarrow L=2(6)=12$$

بالتعويض عن قيمتي $K$ و $L$ في المعادلة $(1')$، نجد

$$(1')\Leftrightarrow\lambda=(6)^{-0.8}(12)^{0.8}\simeq1.74$$

ومنه $(6;12)$ نقطة حرجة للدالة $L$ من أجل $\lambda\simeq1.74$ .

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial K^2}(K,L,\lambda)=-8K^{-1.8}L^{0.8}\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial K}(K,L,\lambda)=8K^{-0.8}L^{-0.2}\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial K}(K,L,\lambda)=-10$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial K\partial L}(K,L,\lambda)=8K^{-0.8}L^{-0.2}\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial L^2}(K,L,\lambda)=-8K^{0.2}L^{-1.2}\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial L}(K,L,\lambda)=-20$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial K\partial \lambda}(K,L,\lambda)=-10\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial \lambda}(K,L,\lambda)=-20\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(K,L,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(K,L)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial K^2}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial K}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\partial K}(K,L)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial K\partial L}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial L^2}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\partial L}(K,L)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial K\partial\lambda}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial\lambda}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}(K,L)\end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(K,L)=\begin{pmatrix}-8K^{-1.8}L^{0.8} & 8K^{-0.8}L^{-0.2} & -10\\ 8K^{-0.8}L^{-0.2} & -8K^{0.2}L^{-1.2} & -20\\ -10 & -20 & 0\end{pmatrix}$$

ومنه

$$H_L(6;12)\simeq\begin{pmatrix}-2.32 & 1.16 & -10\\ 1.16 & -0.58 & -20\\ -10 & -20 & 0\end{pmatrix}$$

وعليه، باستعمال السطر الثالث للمصفوفة $H_L(6;12)$، نجد

$$\begin{aligned}\det\left(H_L(6;12)\right)&=-10\begin{vmatrix}1.16 & -10\\ -0.58 & -20\end{vmatrix}+20\begin{vmatrix}-2.32 & -10\\ 1.16 & -20\end{vmatrix}\\ &=-10\left[(1.16.-20)-(-0.58.-10)\right]+20\left[(-2.32.-20)-(1.16.-10)\right]\\ &=1450>0\end{aligned}$$

ومنه $Q(6;12)=522.33$ قيمة حدية عظمى للدالة $Q$ عند النقطة الحرجة $(6;12)$ من أجل $\lambda\simeq 1.74$، أي كمية عنصر رأس المال هي 6 وحدات وكمية عنصر العمل هي 12 وحدة لتحقيق أقصى قيمة لدالة الإنتاج وهي 522.33. نلاحظ أن $\lambda\simeq 1.74$، هذا يعني أن الزيادة في ثابت القيد من 300 إلى 301 يؤدي إلى الزيادة في دالة الإنتاج $Q$ بمقدار 1.74 تقريبا.

**تمرين 9-8.** إذا كانت دالتي الطلب على سلعة معينة في سوقين منفصلين هما

$$P_1=100-Q_1$$
$$P_2=200-Q_2$$

حيث $P_1$ و $P_2$ هما سعري السلعة في السوق الأول والثاني على التوالي و $Q_1$، $Q_2$ هي الكمية المطلوبة للسلعة في السوق الأول والثاني على الترتيب.

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية للسلعتين هي

$$TC(Q_1,Q_2)=20Q_1+Q_2^2+80Q_2+300 \quad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد حجم الطلب على السلعة في السوقين الذي يحقق أعلى ربح ممكن.

**الحل.** لدينا، دالة الربح الكلي تعطى بالعلاقة التالية

$$TP=TR-TC$$

– لنجد دالة الإيراد الكلي $TR$، لدينا

$$\begin{aligned}TR(Q_1,Q_2)&=P_1Q_1+P_2Q_2\\&=(100-Q_1)Q_1+(200-Q_2)Q_2\\&=-Q_1^2+100Q_1-Q_2^2+200Q_2\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}TP(Q_1,Q_2)&=\left(-Q_1^2+100Q_1-Q_2^2+200Q_2\right)-\left(20Q_1+Q_2^2+80Q_2+300\right)\\&=-Q_1^2+80Q_1-2Q_2^2+120Q_2-300\end{aligned}$$

– إيجاد المشتقات الجزئية الأولى ل $TP$ ومساواتها بالصفر. لدينا

$$\begin{cases}\dfrac{\partial TP}{\partial Q_1}(x,y)=0\\[2mm]\dfrac{\partial TP}{\partial Q_2}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2Q_1+80=0\\-4Q_2+120=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}Q_1=40\\Q_2=30\end{cases}$$

ومنه $(40;30)$ نقطة حرجة للدالة $TP$.

– إيجاد المشتقات الجزئية الثانية ل $TP$ وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2TP}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2)=-2\qquad\frac{\partial^2TP}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2)=-4\qquad\frac{\partial^2TP}{\partial Q_1\partial Q_2}(Q_1,Q_2)=\frac{\partial^2TP}{\partial Q_2\partial Q_1}(Q_1,Q_2)=0$$

ومنه

$$\begin{aligned}H_{TP}(Q_1,Q_2)&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2TP}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2)&\dfrac{\partial^2TP}{\partial Q_2\partial Q_1}(Q_1,Q_2)\\[2mm]\dfrac{\partial^2TP}{\partial Q_1\partial Q_2}(Q_1,Q_2)&\dfrac{\partial^2TP}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

وعليه

$$H_{TP}(40;30)=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-4\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\det\left(H_{TP}(40;30)\right)=-2(-4)-(0)^2=8>0$$

وبما أن $\dfrac{\partial^2TP}{\partial Q_1^2}(40;30)=-2<0$ و $\dfrac{\partial^2TP}{\partial Q_2^2}(40;30)=-4<0$، فإن $TP(40;30)=3000$ قيمة حدية عظمى ل $TP$ عند النقطة الحرجة $(40;30)$، أي حجم الطلب على السلعة هو 40 وحدة في السوق الأول و 30 وحدة في السوق الثاني وأعلى ربح هو 3000 وحدة نقدية.

## 6-2- تمارين للحل

**تمرين 9-9.** أوجد مجالات تعريف الدوال التالية

$$f(x,y)=\frac{3}{x-y} \qquad g(x,y)=x^5y+\ln\left(x^2-y\right)+6$$

$$h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1} \qquad k(x,y)=\frac{x}{\sqrt{2+xy}}$$

**تمرين 9-10.** أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدوال التالية

$$f(x,y)=10x^2+5y^3 \qquad g(x,y)=x^3y^2$$

$$h(x,y)=3x+7y-xy^2+6$$

$$I(x,y)=x^2y-2xy^2+x-y$$

$$J(x,y)=x^3+y^4-xy^3+2xy-5x+4y-1$$

**تمرين 9-11.** مصنع يقوم بإنتاج نوعين من السلع $x$ و $y$ وكانت دالة التكلفة الكلية للمصنع على الصورة التالية

$$TC(x,y)=2x^2-120x+5y^2-200y+900 \quad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد حجم الإنتاج الواجب إنتاجه من كلا النوعين لتحقيق أقل تكلفة ممكنة.

**تمرين 9-12.** حدد القيمة القصوى لدالة الإنتاج التالية والتي تسمى دالة كوب دوجلاس

$$Q\left(K,L\right)=3K^2L^3$$

حيث $K$ يمثل رأس المال و $L$ يمثل العمل وسعر رأس المال هو $P_K=5$ وسعر العمل هو $P_L=10$ وقيد الميزانية هو 200 دينار.

# الفصل العاشر

# الفضاءات

# الشعاعية

الفضاءات الشعاعية جزء مهم من الجبر الخطي الذي يستخدم في نمذجة بعض الظواهر الاقتصادية كالتعبير عن متغير اقتصادي مرتبط خطيا بمتغيرات أخرى كالعلاقة الخطية بين السعر والكمية المعروضة لسلعة معينة.

## 1- بنية الفضاء الشعاعي (Vector Space Structure)

لتكن $E$ مجموعة، تسمى عناصرها بالأشعة ويرمز لها ب $u,v,...,u_1,u_2,...$ و $R$ مجموعة الأعداد الحقيقية التي تسمى عناصرها بالسُلميات ويرمز لها ب $\alpha,\beta,...,\alpha_1,\beta_1,...$.

- يمكن أن نجمع عنصرين $u$ و $v$ من $E$ بحيث $u+v$ عنصر من $E$ ونقول أن الجمع $(+)$ عملية داخلية في $E$.
- كما يمكن أن نضرب أي عنصر $u$ من $E$ بعدد حقيقي $\alpha$ من $R$ بحيث $\alpha.u$ عنصر من $E$ ونقول أن الضرب $(.)$ عملية خارجية على $E$.[1]

**تعريف 10-1.** *نقول عن مجموعة $E$ مزودة بعمليتي الجمع الداخلي $(+)$ والضرب الخارجي $(.)$ على $R$ أنها فضاء شعاعي ونكتب $(E,+,.)$، إذا كان*

*1) (+ تجميعي)* $\forall u,v,w\in E: u+(v+w)=(u+v)+w$

*2) (+ تبديلي)* $\forall u,v\in E: u+v=v+u$

*3) ($0_E$ العنصر الحيادي بالنسبة +)* $\exists 0_E\in E,\forall u\in E: u+0_E=0_E+u=u$

*4) ($(-u)$ العنصر النظير ل u بالنسبة ل +)* $\forall u\in E,\exists(-u)\in E: u+(-u)=(-u)+u=0_E$ [2]

*5) (. تجميعي)* $\forall \alpha,\beta\in R,\forall u\in E: \alpha.(\beta.u)=(\alpha.\beta).u$

*6) (. توزيعي على + من اليسار)* $\forall \alpha\in R,\forall u,v\in E: \alpha.(u+v)=\alpha.u+\alpha.v$

*7) (. توزيعي على + من اليمين)* $\forall \alpha,\beta\in R,\forall u\in E: (\alpha+\beta).u=\alpha.u+\beta.u$

*8) (1 العنصر الحيادي بالنسبة ل .)* $\forall u\in E: 1.u=u$ [3]

**ملاحظة 10-1**

1) نرمز للأشعة بالرموز $u,v,w,...$ عوضا عن الرموز $\vec{u},\vec{v},\vec{w},...$.

2) نرمز لضرب شعاع $u$ بسُلمِية $\alpha$ بالرمز $\alpha u$ بدلا من $\alpha.u$.

3) إذا كان $(E,+,.)$ فضاء شعاعيا على $R$، فإن

- $\forall \alpha\in R: \alpha.0_E=0_E$، بحيث $0_E$ الشعاع المعدوم في $E$.
- $\forall u\in E: 0.u=0_E$، بحيث $0$ هو العدد صِفر.
- $\forall \alpha\in R,\forall u\in E: \alpha.(-u)=(-\alpha).u$ [4]

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 175-176.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 8.1, pp. 193-194.
(3) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 3, p. 176.
(4) Stéphane Rossignol. Op. Cit, p. 194.

4) العنصران الحياديان $0_E$ بالنسبة لعملية الجمع $(+)$ و $1$ بالنسبة لعملية الضرب $(.)$ وحيدان وكذا الأمر بالنسبة للعنصر النظير $(-u)$ لـ $u$ بالنسبة لعملية الجمع $(+)$.[1]

**أمثلة 10−1**

1) $(R,+,.)$ فضاء شعاعي على $R$، بحيث $E=R$ مجموعة الأعداد الحقيقية. في هذه الحالة فقط، تتساوى الأشعة $u,v,...$ والسلميات $\alpha,\beta,...$ والشروط من (1) إلى (8) في التعريف 10−1 محققة.

2) $\left(R^2,+,.\right)$ فضاء شعاعي على $R$، بحيث $E=R^2=\left\{u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/\,x,y\in R\right\}$

وشروط التعريف 10−1 محققة، بحيث

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in R^2:u=v\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(x=x';y=y'\right)$$

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in R^2:u+v\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$$

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2,\forall\alpha\in R:\alpha u=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$$

الشعاع المعدوم $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0_{R^2}=0$ يمثل العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع $(+)$ و $-u=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ معاكس أو العنصر النظير للشعاع $u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ بالنسبة لعملية الجمع $(+)$.

$1u=1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=u$ أي العدد $1$ هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب $(.)$.

3) يمكن تعميم المثال السابق (2) على $\left(R^n,+,.\right)$ التي تمثل فضاءات شعاعية على $R$.

4) $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على $R$، بحيث $E$ مجموعة الدوال التآلفية $f$ من $R$ نحو $R$، أي

$$\begin{aligned}&f:R\to R\\&\quad x\mapsto f(x)=f_{a,b}(x)=ax+b\,/\,a,b\in R\end{aligned}$$

ومنه $E=\left\{f_{a,b}\,/\,a,b\in R\right\}$. فمثلا $f_{2,1}(x)=2x+1$ ، $f_{-3,0}(x)=-3x+0=-3x$ .

شروط التعريف 10−1 محققة، بحيث

$$\begin{aligned}\forall f_{a,b},f_{c,d}\in E:f_{a,b}=f_{c,d}&\Leftrightarrow\forall x\in R:f_{a,b}(x)=f_{c,d}(x)\\&\Leftrightarrow ax+b=cx+d\\&\Leftrightarrow a=c,b=d\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\forall x\in R:f_{a,b}(x)+f_{c,d}(x)&=\left(f_{a,b}+f_{c,d}\right)(x)\\&=(ax+b)+(cx+d)\\&=(a+c)x+(b+d)\\&=f_{a+c,b+d}(x)\in E\end{aligned}$$

[1] Stéphane Rossignol. Op. Cit, p. 194.

و

$$\begin{aligned}\forall\alpha\in R,\forall f_{a,b}\in E:(\alpha f_{a,b})(x)&=\alpha f_{a,b}(x)\\&=\alpha(ax+b)\\&=(\alpha a)x+(\alpha b)\\&=f_{\alpha a,\alpha b}(x)\in E\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\forall f_{a,b},f_{c,d}\in E:f_{a,b}+f_{c,d}&=f_{a+c,b+d}\\&=f_{c+a,d+b}\\&=f_{c,d}+f_{a,b}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\forall f_{a,b}\in E:f_{a,b}+f_{0,0}&=f_{a+0,b+0}\\&=f_{a,b}\end{aligned}$$

بحيث $f_{0,0}(x)=0x+0=0$ الدالة التآلفية المعدومة.

5) $(E,+,.)$ فضاء شعاعي، بحيث $E$ مجموعة المتتاليات $(u_n)$ من $N$ نحو $R$، أي

$$\begin{aligned}u:N&\to R\\n&\mapsto u(n)=u_n\end{aligned}$$

شروط التعريف 10-1 محققة، بحيث

$$\forall(u_n),(v_n)\in E:(u_n)+(v_n)=((u+v)_n)$$

و

$$\forall\alpha\in R,\forall(u_n)\in E:\alpha(u_n)=((\alpha u)_n)$$

## 2- الفضاء الشعاعي الجزئي (Vector Subspace)

**تعريف 10-2.** *ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعيا على $R$ و $F$ جزءا من $E$، أي $F\subset E$. نقول أن $F$ فضاء شعاعي جزئي من $E$، إذا كانت ل $F$ بنية فضاء شعاعي على $R$ بالنسبة لاقتصار عمليتي الجمع الداخلي والضرب الخارجي على $F$.*[1]

**نظرية 10-1.** *$F$ فضاء شعاعي جزئي من $E$، إذا وفقط إذا كان*

*1) $0_E\in F$ ( $F$ غير خالٍ).*

*2) $\forall u,v\in F,\forall\alpha,\beta\in R:\alpha u+\beta v\in F$ ( $F$ مستقرة بالنسبة لعمليتي الضرب بسلمية والجمع).*[2]

**أمثلة 10-2**

1) ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعيا على $R$.

$F=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=\{0_E\}$ فضاء شعاعي جزئي من $E$، $F$ يحوي عنصرا وحيدا هو الشعاع المعدوم ل $E$.

---

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 3، ص. 64.

(2) نفسه. قضية، ص. 64.

2) $E=R^2$ و $F=\{(x,0)/x\in R\}$ فضاء شعاعي جزئي من $R^2$، لأن

- من أجل $x=0$: $0_E=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in F$ ( $F$ غير خالٍ)

و

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}\in F,\forall\alpha,\beta\in R:\alpha u+\beta v=\alpha\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta y\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta y\\0\end{pmatrix}\in F$$

3) $E=R^3$ و $F=\{(2,y,z)/y,z\in R\}$ ليس فضاء شعاعيا جزئيا من $R^3$ لأن $0_{R^3}=(0,0,0)\notin F$.

## 3- أساس وبُعد فضاء شعاعي (جزئي)

## (Base and Dimension of Vector Space (Subspace))

من أهم مفاهيم الفضاءات الشعاعية، أنه يمكن كتابة كل شعاع بدلالة جملة معينة من الأشعة يُطلق عليها اسم أساس الفضاء الشعاعي وهذا ما يسهل عمليات الحساب في هذا الأخير.

### 3-1- أساس فضاء شعاعي (جزئي)

قبل التعرف إلى مفهوم أساس فضاء شعاعي، سنتطرق إلى بعض المفاهيم المتعلقة به.

#### 3-1-1- التركيبة الخطية لجملة أشعة

**تعريف 3-10.** *ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعيا على $R$ و $u_1,u_2,...,u_n$ $n$ شعاعا من $E$. نسمي* *تركيبة خطية* *للأشعة $u_1,u_2,...,u_n$ كل شعاع $v$ من $E$ يُكتب على الشكل*

$$v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_nu_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iu_i,\qquad \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R,\ \ n\in N$$ (1)

**أمثلة 3-10**

1) ليكن لدينا الأشعة $u=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$، $v=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ و $w=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$. لاحظ أن $w=4u+v$، أي

$$4\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$$

ومنه الشعاع $w$ عبارة عن تركيبة خطية للشعاعين $u$ و $v$.

2) من أجل الشعاعين $u$ و $v$ السابقين، لدينا $w'=\begin{pmatrix}-12\\-10\end{pmatrix}$ الذي يمثل تركيبة خطية أخرى لـ $u$ و $v$، بحيث

$$3u-4v=3\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12\\-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-12\\-10\end{pmatrix}=w'$$

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 4, p. 183.

وعليه $3u-4v=w'$.

### 3-1-2- الأشعة المولِدة لفضاء شعاعي (جزئي)

**تعريف 4-10.** *ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعيا على $R$. نسمي جملة الأشعة $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ من $E$ بالأشعة المولِدة ل $E$، إذا كان كل شعاع من $E$ يكتب على شكل تركيبة خطية لهذه الأشعة، أي*

$$\forall v\in E,\exists \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R: v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_nu_n,\quad n\in N$$ [1]

*ونقول أيضا أن $E$ مُولَد من الأشعة $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ ونكتب*

$$E=vect(u_1,u_2,...,u_n)$$ [2]

**أمثلة 4-10**

1) من أجل $E=R^2$، الشعاعان $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ مولِدان ل $R^2$، لأن كل شعاع $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ من $R^2$ يُكتب على شكل تركيبة خطية ل $u_1$ و $u_2$، أي

$$\begin{aligned}v&=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\\&=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=xu_1+yu_2\,/\,x,y\in R\end{aligned}$$

فمثلا

$$\begin{aligned}v_1&=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\\&=-5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=-5u_1+2u_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_2&=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\&=4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=4u_1+0u_2\end{aligned}$$

وعليه $R^2=vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$.

2) من أجل $E=R^3$، الأشعة $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ مولِدة ل $R^3$، لأن كل شعاع $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ من $R^3$ يكتب على شكل تركيبة خطية ل $u_1$، $u_2$ و $u_3$، أي

---

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 6, pp. 186-187.
[2] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 8.3, p. 196.

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}$$
$$=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$=xu_1+yu_2+zu_3\ /\ x,y,z\in R$$

فمثلا

$$v_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$$
$$=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$=3u_1-u_2+4u_3$$
$$v_2=\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$
$$=5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$=5u_1+0u_2+2u_3$$

وعليه $R^3=vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ .

3) من أجل $E=R^2$ و $A=\{(x,y)/x+y=0\}$ ، لدينا

$$A=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/x=-y\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}-y\\y\end{pmatrix}/y\in R\right\}$$
$$=\left\{y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}/y\in R\right\}$$

إذا $A=vect\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ ، أي $A$ مولَد من الشعاع $u=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ .

4) من أجل $E=R^3$ و $B=\{(2x+y+z,x-y+z,x+3y-z)/x,y,z\in R\}$ ، لدينا

$$B=\left\{\begin{pmatrix}2x+y+z\\x-y+z\\x+3y-z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}/x,y,z\in R\right\}$$

إذا $B$ مولد من الأشعة $u_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$، $u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ و $u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$، أي $B=vect\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

### 3-1-3- الاستقلال والارتباط الخطيان لأشعة

**تعريف 10-5.** *نقول عن جملة أشعة $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ من $E$ أنها طليقة (أو أن الأشعة $u_1,u_2,...,u_n$ مستقلة خطيا)، إذا كان*

$$\forall \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R:\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_nu_n=0\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$$ [(1)]

*ونقول في الحالة العكسية، إن الجملة $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ مقيَدة (أو أن الأشعة $u_1,u_2,...,u_n$ مرتبطة خطيا)، أي يمكن كتابة أحدها أو بعضها على شكل تركيبة خطية للأشعة المتبقية.* [(2)]

**ملاحظة 10-2**

1) الجملة $\{u\}$ طليقة إذا وفقط إذا كان $u\neq\vec{0}$.

2) إذا كانت الجملة $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ تحوي الشعاع المعدوم فهي مقيَدة.

3) إذا كانت الجملة $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ تحوي مرتين أو أكثر الشعاع نفسه فهي مقيدة.

4) إذا كان في الجملة $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ شعاع يكتب بدلالة الآخر فهي مقيدة. [(3)]

5) إذا كانت الجملة $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ طليقة فإن أي جملة جزئية منها طليقة. [(4)]

**أمثلة 10-5**

1) الجملة $\left\{u=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right\}$ طليقة لأن $u\neq\vec{0}$.

2) الجملة $\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ طليقة لأن

$$\begin{aligned}\forall \alpha_1,\alpha_2\in R:\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0 &\Leftrightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}\end{aligned}$$

ومنه الجملتان الجزئيتان $\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ و $\left\{u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ طليقتان.

3) الجملة $\left\{u_1=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ مقيدة لأنها تحوي الشعاع المعدوم، لكن الجملة الجزئية

---

[(1)] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 2، ص. 68.

[(2)] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 8.7, p. 197.

[(3)] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 191-192.

[(4)] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 8.6, p. 198.

$\left\{u_1=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}\right\}$ طليقة.

4) الجملة $\left\{u_1=\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$ مقيدة لأنها تحوي مرتين الشعاع نفسه $u_1$ ، لكن الجملة الجزئية $\left\{u_1=\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}$ طليقة.

5) الجملة $\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\right\}$ مقيدة لأن الشعاع $u_3$ يكتب بدلالة $u_1$، أي $u_3=2u_1$، لكن الجملتان الجزئيتان $\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ و $\left\{u_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\right\}$ طليقتين.

**– ملاحظة حول مفهوم أساس فضاء شعاعي (جزئي)**

**تعريف 10-6.** *ليكن $E$ فضاء شعاعيا. نسمي* ***أساسا*** *ل $E$ كل جملة أشعة $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ طليقة ومولِدة ل $E$*[1]*، أي كل شعاع $v$ من $E$ يُكتب بطريقة وحيدة على الشكل*

$$v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_nu_n$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ *أعداد حقيقية تسمى* ***مُرَكِبات*** $v$ *في الأساس* $\{u_1,u_2,...,u_n\}$، *أي*

$$v=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} \quad (2)$$

**أمثلة 10-6**

1) من أجل $E=R^n$، الجملة $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ تسمى **الأساس القانوني** ل $R^n$، بحيث

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

وكل شعاع $v$ ذي المركبات $v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ من $R^n$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 3، ص. 68.

[2] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 8.7, p. 199.

$$v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\x_2\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$$

فمثلا، من أجل $E=R^2$ ، الأساس القانوني ل $R^2$ هو $\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ (لأنها مولِدة ل $R^2$(أنظر الأمثلة 10−4 (1)) وطليقة (أنظر الأمثلة 10−5 (2))). الشعاع $v=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}\in R^2$ يُكتب على الصيغة الوحيدة

$$v=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$$

$$=5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$=5e_1-3e_2$$

2) ليكن $A$ فضاء شعاعيا جزئيا من $R^2$ ، بحيث

$$A=\{(x,x+y)/x,y\in R\}$$

لنجد أساسا ل $A$ .

- إيجاد الأشعة المولِدة ل $A$

لدينا

$$A=\left\{\begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}/x,y\in R\right\}$$

ومنه $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ و $u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ أشعة مولِدة ل $A$ ، أي $A=vect(u_1,u_2)$ .

- دراسة الاستقلال الخطي ل $u_1$ و $u_2$

لدينا

$$\forall\alpha_1,\alpha_2\in R:\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0\Leftrightarrow\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}$$

ومنه الجملة $\{u_1,u_2\}$ طليقة وبما أنها مولِدة ل $A$ فهي تشكل أساسا له.

3) ليكن $B$ فضاء شعاعيا من $R^3$ ، بحيث

$$B=\{(x+y,x+2y+z,2x+3y+z)/x,y,z\in R\}$$

لنجد أساسا ل $B$ .

– إيجاد الأشعة المولِدة ل $B$

لدينا

$$B=\left\{\begin{pmatrix}x+y\\x+2y+z\\2x+3y+z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}/x,y,z\in R\right\}$$

ومنه $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ ، $u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ و $u_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ أشعة مولِدة ل $B$ ، أي $B=vect(u_1,u_2,u_3)$ .

– دراسة الاستقلال الخطي ل $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$

لدينا

$$\forall\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R:\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0\Leftrightarrow\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1\\2\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\2\alpha_2\\3\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\alpha_3\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3\\2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\\2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

نضع

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0..................(1)\\\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0.........(2)\\2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0........(3)\end{cases}$$

ومنه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\(3)-(2)\Leftrightarrow\alpha_1+\alpha_2=0\\2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

وعليه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\Leftrightarrow \alpha_1=-\alpha_2\\(3)\Leftrightarrow \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\alpha_2\\\alpha_3=-\alpha_2\end{cases}$$

ومنه الجملة $(I)$ لها مالا نهاية من الحلول $S=\{(-\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_2)/\alpha_2\in R\}$ وعليه الجملة $\{u_1,u_2,u_3\}$ مقيدة، لكن الجملة $\{u_1,u_2\}$ طليقة وبما أنها مولِدة ل $B$ فهي تشكل أساسا له.

### 3-2- بُعد فضاء شعاعي (جزئي)

**تعريف 10-7.** *إذا كان $E$ فضاء شعاعيا على $R$ و $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ أساسا ل $E$ فإن كل أساس ل $E$ يحوي بالضبط $n$ شعاعا.[(1)] نعرف بُعد $E$ بأنه عدد أشعة الأساس $B$ ونرمز له ب* $\dim E$[(*)] *ونكتب*

$$^{(**)}\quad \dim E=card(B)=n$$

*ونقول اصطلاحا أن الفضاء الشعاعي $E=\{0_E\}$ ذا الأساس $B=\varnothing$ بُعده 0. في حالة إذا لم يكن للفضاء الشعاعي $E$ أساسا منتهيا، نقول اصطلاحا، إنه ذا بُعد لا نهائي ونكتب* $\dim E=\infty$.[(2)]

### أمثلة 10-7

1) $\dim R=1$ لأن $B=\{1\}$ أساس ل $R$ بشعاع واحد.

2) $\dim R^2=2$ لأن $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ أساس ل $R^2$ بشعاعين.

3) $\dim R^3=3$ لأن $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ أساس ل $R^3$ بثلاث أشعة.

4) $\dim R^n=n$ لأن $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ أساس ل $R^n$ ب $n$ شعاع.

5) مجموعة الدوال التآلفية من $R$ نحو $R$ فضاء شعاعي ذو بعد لا نهائي.

6) من الأمثلة 10-6 السابقة، لدينا

$$\dim A=card\left(\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)=2$$

$$\dim B=card\left(\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}\right)=2$$

**نظرية 10-2.** *ليكن $E$ فضاء شعاعيا ذا بُعد منته $n$ و $F$ فضاء شعاعيا جزئيا من $E$، لدينا*

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Corollaire 1, p. 198.

(*) أصل الرمز "dim" هو المصطلح "dimension" ومعناه "البُعد" بالانجليزية والفرنسية.

(**) أصل الرمز "card" هو المصطلح "cardinal" ومعناه "عدد العناصر".

(2) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 4، ص. 69.

(1 $\dim F \le \dim E$

(2 $E = F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$ [(1)]

**أمثلة 10-8**

1) كل فضاء شعاعي جزئي من $R^n$ ذو بُعد أقل أو يساوي $n$.

2) من المثالين 10-6 (2)، (3) والمثال 10-7 (6)، لدينا

$A$ فضاء شعاعي جزئي من $R^2$ بحيث $\dim A = 2$ و $B$ فضاء شعاعي جزئي من $R^3$ بحيث $\dim B = 2$.

**-رتبة جملة أشعة**

**تعريف 10-8.** *ليكن E فضاء شعاعيا على R ولتكن $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ جملة أشعة من E، رتبة S (ونرمز لها ب $\operatorname{rank}(S)$ [(*)]) هي أكبر عدد من الأشعة المستقلة خطيا التي يمكن استخراجها من S [(2)] وتعرف أيضا على أنها بُعد الفضاء الشعاعي الجزئي من E المولَد عن الأشعة $u_1, u_2, ..., u_n$.* [(3)]

**ملاحظة 10-3**

1) لرتبة جملة أشعة دور مهم في تحديد عدد حلول جملة معادلات خطية التي سندرسها في الفصل الثالث عشر.

2) لتحديد رتبة جملة أشعة نعتمد على طريقة الصف البسيط أو طريقة غوص اللتين سندرسهما في الفصل الثالث عشر، لكن نكتفي في هذا الفصل بقوانين الارتباط والاستقلال الخطيين التي تطرقنا إليها في الفقرة 3-1-3.

**أمثلة 10-9**

1) $\operatorname{rank}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} = 0$.

2) $\operatorname{rank}\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}\right\} = 1$ لأن الشعاع $\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$ غير معدوم.

3) الجملة $\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}\right\}$ مقيدة فهي تحوي الشعاع المعدوم وشعاعا مكتوبا بدلالة الآخر، أي $\begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$، لكن الجملتان الجزئيتان $\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right\}$ و $\left\{\begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}\right\}$ طليقتين وعليه

$$\operatorname{rank}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{rank}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{rank}\left\{\begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}\right\} = 1$$

4) الجملة $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}\right\}$ مقيدة لأن الأشعة $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ مرتبطة خطيا، بحيث $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix} = -\frac{5}{3}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$، لكن الجمل الجزئية $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$، $\left\{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right\}$ و $\left\{\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}\right\}$ طليقة وعليه

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 8.9, p. 201.

(*) الرمز "rank" يعني "الرتبة" بالانجليزية.

(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 8.11, p. 202.

(3) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 5، ص. 72.

$$\text{rank}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}\right\}=\text{rank}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\text{rank}\left\{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right\}=\text{rank}\left\{\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}\right\}=1$$

5) $\text{rank}\left\{\begin{pmatrix}4\\-5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-7\\0\\3\end{pmatrix}\right\}=2$ لأن الجملة $\left\{\begin{pmatrix}4\\-5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-7\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$ طليقة.

6) $\text{rank}\left\{\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}=3$ لأن الأشعة $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ مستقلة خطيا.

## 4- تمارين

### 4-1- تمارين محلولة

### تمرين 10-1

في كل حالة مما يلي، $E$ فضاء شعاعي. هل الأجزاء التالية من $E$ فضاءات شعاعية جزئية منه ؟

$$A=\{(x,y)/\,y=2x\},\quad E=R^2$$
$$B=\{(x,-x,z)/\,x,z\in R\},\quad E=R^3$$
$$C=\{(x,y,z)/\,x+y-1=0\},\quad E=R^3$$
$$D=\{(x,y,x+y)/\,x,y\in R\},\quad E=R^3$$

**الحل**

1) $A=\{(x,y)/\,y=2x\}=\{(x,2x)/\,x\in R\}$ و $E=R^2$

لدينا

- $A$ غير خالٍ لأنه بوضع $x=0$ ، نجد $0_{R^2}=(0,0)=(0,2(0))\in A$

و

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}x'\\2x'\end{pmatrix}\in A,\forall\alpha,\beta\in R:\alpha u+\beta v=\alpha\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x'\\2x'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha x\\2\alpha x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta x'\\2\beta x'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\2\alpha x+2\beta x'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(\alpha x+\beta x')\\2(\alpha x+\beta x')\end{pmatrix}\in A$$

ومنه $A$ فضاء شعاعي جزئي من $R^2$ .

2) $B=\{(x,-x,z)/\,x,z\in R\}$ و $E=R^3$

لدينا

- $B$ غير خالٍ لأنه بوضع $x=z=0$ ، نجد $0_{R^3}=(0,0,0)=(0,-0,0)\in B$

و

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\-x\\z\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}x'\\-x'\\z'\end{pmatrix}\in B,\forall\alpha,\beta\in R:\alpha u+\beta v=\alpha\begin{pmatrix}x\\-x\\z\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x'\\-x'\\z'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha x\\-\alpha x\\\alpha z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta x'\\-\beta x'\\\beta z'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\-\alpha x-\beta x'\\\alpha z+\beta z'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(\alpha x+\beta x')\\-(\alpha x+\beta x')\\(\alpha z+\beta z')\end{pmatrix}\in B$$

ومنه $B$ فضاء شعاعي جزئي من $R^3$.

3) $C=\{(x,y,z)/x+y-1=0\}$ و $E=R^3$

لدينا

$$C=\{(x,y,z)/x=-y+1\}$$
$$=\{(-y+1,y,z)/y,z\in R\}$$

بوضع $y=z=0$، نجد $0_{R^3}=(0,0,0)\neq(1,0,0)=(-0+1,0,0)$ ومنه $0_{R^3}\notin C$

وعليه $C$ ليس فضاء شعاعيا جزئيا من $R^3$.

4) $D=\{(x,y,x+y)/x,y\in R\}$ و $E=R^3$

لدينا

− $D$ غير خالٍ لأنه بوضع $x=y=0$، نجد $0_{R^3}=(0,0,0)=(0,0,0+0)\in D$

و

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}x'\\y'\\x'+y'\end{pmatrix}\in D,\forall\alpha,\beta\in R:\alpha u+\beta v=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x'\\y'\\x'+y'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\\\alpha(x+y)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta x'\\\beta y'\\\beta(x'+y')\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\\alpha y+\beta y'\\\alpha(x+y)+\beta(x'+y')\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(\alpha x+\beta x')\\(\alpha y+\beta y')\\\left[(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')\right]\end{pmatrix}\in D$$

ومنه $D$ فضاء شعاعي جزئي من $R^3$.

**تمرين 10-2.** أوجد الأشعة المولِدة للفضاءات الشعاعية الجزئية التالية

$A=\{(x,y)/2x-3y=0\},\quad E=R^2$

$B=\{(2x-y,x+4y)/x,y\in R\},\quad E=R^2$

$C=\{(x,y,z)/x-y+2z=0\},\quad E=R^3$

$D=\{(-x+y-3z,2x+z,-4y)/x,y,z\in R\},\quad E=R^3$

**الحل**

1) لدينا

$$A=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/2x-3y=0\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/x=\frac{3}{2}y\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\frac{3}{2}y\\y\end{pmatrix}/y\in R\right\}$$
$$=\left\{y\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}/y\in R\right\}$$

ومنه الشعاع $\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$ مولِد ل $A$ ، أي $A=vect\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}\right)$.

2) لدينا

$$B=\left\{\begin{pmatrix}2x-y\\x+4y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}/x,y\in R\right\}$$

ومنه الشعاعان $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ مولِدان ل $B$ ، أي $B=vect\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right)$.

3) لدينا

$$C=\{(x,y,z)/x-y+2z=0\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}/x=y-2z\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}y-2z\\y\\z\end{pmatrix}/y,z\in R\right\}$$
$$=\left\{y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}/y,z\in R\right\}$$

ومنه الشعاعان $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ مولِدان ل $C$، أي $C = vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

4) لدينا

$$D=\left\{\begin{pmatrix}-x+y-3z\\2x+z\\-4y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}/x,y,z\in R\right\}$$

ومنه الأشعة $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ مولِدة ل $D$، أي $D = vect\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

**تمرين 10-3.** من بين جمل الأشعة التالية، حدد المقيدة والطليقة منها.

$$A=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}\qquad B=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}\qquad D=\left\{\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\-6\end{pmatrix}\right\}\qquad E=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

**الحل**

1) الجملة $A$ طليقة لأن

$$\begin{aligned}\forall\alpha_1,\alpha_2\in R:\alpha_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-\alpha_1\\\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-\alpha_1\\\alpha_1+2\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha_1=0\\\alpha_1+2\alpha_2=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}\end{aligned}$$

2) الجملة $B$ مقيدة لأنها تحوي الشعاع المعدوم.

3) الجملة $C$ مقيدة لأنها تحوي مرتين الشعاع $\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$.

4) الجملة $D$ مقيدة لأنها تحوي شعاع يكتب بدلالة الآخر، أي $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-6\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

5) الجملة $E$ طليقة لأن

$$\forall \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R:\alpha_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\alpha_2\\4\alpha_2\\\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\alpha_3\\2\alpha_3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3\alpha_2-\alpha_3\\4\alpha_2+2\alpha_3\\\alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha_2-\alpha_3=0..........(1)\\4\alpha_2+2\alpha_3=0.........(2)\\\alpha_1+\alpha_2=0.............(3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(1)+(2)\Leftrightarrow 10\alpha_2=0\\(2)\Leftrightarrow\alpha_3=-2\alpha_2\\(3)\Leftrightarrow\alpha_1=-\alpha_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_2=0\\\alpha_3=0\\\alpha_1=0\end{cases}$$

**تمرين 4-10.** نعتبر $E$فضاء شعاعيا، عين في كل حالة مما يلي، أساس وبُعد $E$

$$E_1=\{(x+y,x-2y)/x,y\in R\}$$
$$E_2=\{(x+3y,-x-3y)/x,y\in R\}$$
$$E_3=\{(x+y+z,2x+2y,3x)/x,y,z\in R\}$$

**الحل**

1) لدينا $E_1=\{(x+y,x-2y)/x,y\in R\}$

- إيجاد الأشعة المولِدة ل $E_1$

لدينا

$$E_1=\left\{\begin{pmatrix}x+y\\x-2y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}/x,y\in R\right\}$$

ومنه $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ و $u_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ أشعة مولِدة ل $E_1$ ، أي $E_1=vect(u_1,u_2)$ .

- دراسة الاستقلال الخطي ل $u_1$ و $u_2$

لدينا

$$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in R : \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0..........(1) \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0........(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \Leftrightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \\ (1)-(2) \Leftrightarrow 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

ومنه الجملة $\{u_1,u_2\}$ طليقة وبما أنها مولِدة ل $E_1$ فهي تشكل أساسا له وعليه $\dim E_1 = card(u_1,u_2) = 2$ .

2) لدينا $E_2 = \{(x+3y,-x-3y)/x,y \in R\}$

- إيجاد الأشعة المولِدة ل $E_2$

لدينا

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y \\ -x-3y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} / x,y \in R \right\}$$

ومنه $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ أشعة مولِدة ل $E_2$ ، أي $E_2 = vect(u_1,u_2)$ .

- دراسة الاستقلال الخطي ل $u_1$ و $u_2$

لدينا

$$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in R : \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ -3\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

نضع

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0..........(1) \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0.......(2) \end{cases}$$

ومنه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\Leftrightarrow \alpha_1=-3\alpha_2\\(1)\Leftrightarrow -(2)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1=-3\alpha_2$$

ومنه الجملة $(I)$ لها مالا نهاية من الحلول $S=\{(-3\alpha_2,\alpha_2)/\alpha_2\in R\}$ وعليه الجملة $\{u_1,u_2\}$ مقيدة،

لكن الجملة $\{u_1\}$ طليقة وبما أنها مولِدة ل $E_2$ فهي تشكل أساسا له وعليه $\dim E_2=card(u_1)=1$ .

3) لدينا $E_3=\{(x+y+z,2x+2y,3x)/x,y,z\in R\}$

- إيجاد الأشعة المولِدة ل $E_3$

لدينا

$$E_3=\left\{\begin{pmatrix}x+y+z\\2x+2y\\3x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}/x,y,z\in R\right\}$$

ومنه $u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$، $u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ و $u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ أشعة مولِدة ل $E_3$ ، أي $E_3=vect(u_1,u_2,u_3)$ .

- دراسة الاستقلال الخطي ل $u_1$، $u_2$ و $u_3$

لدينا

$$\forall\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R:\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0\Leftrightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1\\2\alpha_1\\3\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\2\alpha_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\2\alpha_1+2\alpha_2\\3\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\2\alpha_1+2\alpha_2=0\\3\alpha_1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_2+\alpha_3=0\\2\alpha_2=0\\\alpha_1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_3=0\\\alpha_2=0\\\alpha_1=0\end{cases}$$

ومنه الجملة $\{u_1,u_2,u_3\}$ طليقة وبما أنها مولِدة ل $E_3$ فهي تشكل أساسا له وعليه $\dim E_3=card(u_1,u_2,u_3)=3$

**تمرين 10-5.** حدد رتبة جمل الأشعة التالية

$$A=\left\{\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}\qquad B=\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}\right\}\qquad D=\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

**الحل**

1) لدينا $A=\left\{\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

نضع $A=\{u_1,u_2\}$ ، بحيث $u_1=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ و $u_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. لتحديد رتبة الجملة $A$ ، ندرس الاستقلال الخطي للشعاعين $u_1$ و $u_2$. لدينا

$$\begin{aligned}\forall\alpha_1,\alpha_2\in R:\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0 &\Leftrightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\alpha_1\\-5\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\alpha_2\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\alpha_1+2\alpha_2\\-5\alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}4\alpha_1+2\alpha_2=0.........(1)\\-5\alpha_1+\alpha_2=0.........(2)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}(1)-2(2)\Leftrightarrow 14\alpha_1=0\\(1)\Leftrightarrow \alpha_2=-2\alpha_1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}\end{aligned}$$

ومنه الجملة $A$ طليقة وعليه $\operatorname{rank}(A)=2$ .

2) لدينا $B=\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$

الجملة $B$ مقيدة لأنها تحوي الشعاع المعدوم وعليه ندرس الاستقلال الخطي للشعاعين $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ .

لدينا

$$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in R:\alpha_1\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3\alpha_1\\0\\-\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\-\alpha_2\\2\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3\alpha_1+\alpha_2\\-\alpha_2\\-\alpha_1+2\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha_1+\alpha_2=0\\-\alpha_2=0\\-\alpha_1+2\alpha_2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}$$

وعليه الشعاعان $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ مستقلان خطيا، إذا $\operatorname{rank}(B)=2$ .

3) لدينا $C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}\right\}$

نضع $C=\{u_1,u_2,u_3\}$ بحيث $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$، $u_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix}$ و $u_3=\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}$. نلاحظ أن الشعاعين $u_1$ و $u_3$ مرتبطان خطيا لأن $\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ أي $u_3=5u_1$. بينما، الشعاعان $u_1$ و $u_2$ مستقلان خطيا، كذلك الأمر بالنسبة للشعاعين $u_2$ و $u_3$ وعليه $\operatorname{rank}(C)=2$ .

4) لدينا $D=\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

الجملة $D$ طليقة، لأن

$$\forall \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R : \alpha_1\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-\alpha_1\\2\alpha_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\alpha_2\\\alpha_2\\4\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\alpha_3\\\alpha_3\\2\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-\alpha_1+3\alpha_2+6\alpha_3\\2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\4\alpha_2+2\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha_1+3\alpha_2+6\alpha_3=0..........(1)\\2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0..............(2)\\4\alpha_2+2\alpha_3=0....................(3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(1)+(2)\Leftrightarrow 7\alpha_2+13\alpha_3=0.....(1')\\2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.....................(2)\\4\alpha_2+2\alpha_3=0...........................(3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(1')-7(3)\Leftrightarrow 38\alpha_3=0\\(2)\Leftrightarrow\alpha_1=-\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)\\(3)\Leftrightarrow\alpha_2=-\frac{1}{2}\alpha_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_3=0\\\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}$$

ومنه $\operatorname{rank}(D)=3$ .

## 4-2- تمارين للحل

### تمرين 10-6

في كل حالة مما يلي، $E$ فضاء شعاعي. هل الأجزاء التالية من $E$ فضاءات شعاعية جزئية منه ؟

$$A=\{(x,y,z)/z=3x-y\},\quad E=R^3$$
$$B=\{(x,3)/x\in R\},\quad E=R^2$$
$$C=\{(x,x^2,z)/x,z\in R\},\quad E=R^3$$
$$D=\{(x,y,z)/x=y=z\},\quad E=R^3$$

**تمرين 10-7**. أوجد الأشعة المولِدة للفضاءات الشعاعية الجزئية التالية

$$A=\{(x,y)/x=0\},\quad E=R^2$$
$$B=\{(-x+y,x)/x,y\in R\},\quad E=R^2$$
$$C=\{(x,y,z)/2x+z=0\},\quad E=R^3$$
$$D=\{(x+y+z,y,x-2y)/x,y,z\in R\},\quad E=R^3$$

**تمرين 10-8.** من بين جمل الأشعة التالية، حدد المقيدة والطليقة منها.

$$A=\left\{\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\right\}\qquad B=\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\qquad D=\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right\}$$

**تمرين 10-9.** نعتبر $E$فضاء شعاعيا، عين في كل حالة مما يلي، أساس وبُعد $E$

$$E_1=\{(2x+y,3x)/x,y\in R\}$$

$$E_2=\{(6x+2y,3x+y)/x,y\in R\}$$

$$E_3=\{(x+2z,z,x+y)/x,y,z\in R\}$$

$$E_4=\{(x+2y+z,y,x+y+z)/x,y,z\in R\}$$

**تمرين 10-10.** حدد رتبة جمل الأشعة التالية

$$A=\left\{\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\right\}\qquad B=\left\{\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix}\right\}\qquad D=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}\qquad E=\left\{\begin{pmatrix}4\\-5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

# الفصل الحادي عشر

# التطبيقات

# الخطية

للتطبيقات الخطية دور مهم في نمذجة بعض الظواهر الاقتصادية، لأنها تربط بين متغيرين أو أكثر بأبسط علاقة وهي العلاقة الخطية.

## 1- التطبيق الخطي

**تعريف 11-1.** *ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين على $R$ و $f$ تطبيقا من $E$ في $F$. نقول أن $f$ تطبيق خطي إذا تحقق الشرطان التاليان*

*1)* $\forall u,v\in E: f(u+v)=f(u)+f(v)$

*2)* $\forall u\in E,\forall \alpha\in R: f(\alpha u)=\alpha f(u)$ [1]

*ويمكن جمع الشرطين السابقين في شرط واحد كالآتي*

$$\forall u,v\in E,\forall \alpha,\beta\in R: f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$$ [2]

**أمثلة 11-1**

1) ليكن

$$\forall a\in R,\quad \begin{aligned} f: E &\to E \\ u &\mapsto f(u)=au \end{aligned}$$

$f$ تطبيق خطي لأن

$$\begin{aligned}\forall u,v\in E,\forall \alpha,\beta\in R: f(\alpha u+\beta v)&=a(\alpha u+\beta v)\\ &=a\alpha u+a\beta v\\ &=\alpha(au)+\beta(av)\\ &=\alpha f(u)+\beta f(v)\end{aligned}$$

وكحالة خاصة، من أجل $E=R$، فإن التطبيق

$$\begin{aligned} R &\to R \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

الذي تمثيله البياني عبارة عن خط مستقيم ميله $a$، هو تطبيق خطي.

2) ليكن

$$g: R^2\to R^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ x-3y\end{pmatrix}$$

$g$ تطبيق خطي لأن

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 8.12, p. 203.

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 13, p. 203.

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in R^2, \forall \alpha,\beta\in R: g(\alpha u+\beta v)=g\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$$

$$=g\left(\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta x'\\\beta y'\end{pmatrix}\right)$$

$$=g\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\\alpha y+\beta y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')\\2(\alpha x+\beta x')\\(\alpha x+\beta x')-3(\alpha y+\beta y')\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y'\\2\alpha x+2\beta x'\\\alpha x+\beta x'-3\alpha y-3\beta y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha x+\alpha y)+(\beta x'+\beta y')\\(2\alpha x)+(2\beta x')\\(\alpha x-3\alpha y)+(\beta x'-3\beta y')\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha x+\alpha y\\2\alpha x\\\alpha x-3\alpha y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta x'+\beta y'\\2\beta x'\\\beta x'-3\beta y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha(x+y)\\\alpha(2x)\\\alpha(x-3y)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta(x'+y')\\\beta(2x')\\\beta(x'-3y')\end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix}x+y\\2x\\x-3y\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x'+y'\\2x'\\x'-3y'\end{pmatrix}$$

$$=\alpha g(u)+\beta g(v)$$

## 2− صورة، نواة ورتبة تطبيق خطي

**تعريف 11−2.** *ليكن $f$ تطبيقا خطيا من $E$ في $F$. نسمي نواة $f$ المجموعة التي نرمز لها بالرمز $Ker(f)$* [*] *والمعرفة كما يلي*

$$Ker(f)=\{u\in E: f(u)=0_F\}=f^{-1}(\{0_F\})$$

*ونسمي صورة $f$ المجموعة التي نرمز لها بالرمز $f(E)$ أو $\operatorname{Im} f$ ، بحيث*

$$\operatorname{Im} f=\{v\in F:\exists u\in E, f(u)=v\}$$ [1]

**نظرية 11−1.** *ليكن $f$ تطبيقا خطيا من $E$ في $F$.*

*1) $Ker(f)$ فضاء شعاعي جزئي من $E$.*

*2) $\operatorname{Im} f$ فضاء شعاعي جزئي من $F$.* [2]

---

(*) الرمز "Ker" أصله كلمة "Kernel" التي تعني "نواة" بالألمانية.

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 16, p. 211.

(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 8.15, p. 206.

**تعريف 11−3.** ليكن $f$ تطبيقا خطيا من $E$ في $F$. رتبة التطبيق $f$ هي بُعد صورته، أي

$$\text{rank}(f) = \dim \operatorname{Im} f$$ [1]

ولدينا بشكل عام

$$\text{rank}(f) \leq \dim E \quad \text{و} \quad \text{rank}(f) \leq \dim F$$ [2]

**أمثلة 11−2.** لنعين صورة، نواة ورتبة كل تطبيق من التطبيقين الخطيين التاليين

1) لدينا

$$f : R^3 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-z \\ 2x-y+z \end{pmatrix}$$

− إيجاد نواة $f$ . لدينا

$$Ker(f) = \{u \in R^3 : f(u) = 0_{R^2}\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ 2x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

لإيجاد نواة $f$ ، نحل الجملة التالية

$$\begin{cases} y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ 2x-z+z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ 2x=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases}$$

ومنه

$$Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / z \in R \right\}$$

وعليه

$$Ker(f) = vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 17, p. 212.
[2] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 8.18, p. 208.

- إيجاد صورة $f$ . لدينا

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \left\{v \in R^2 : \exists u \in R^3, f(u) = v\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} y-z \\ 2x-y+z \end{pmatrix} / x, y, z \in R\right\} \\ &= \left\{x\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} / x, y, z \in R\right\}\end{aligned}$$

ومنه

$$\operatorname{Im} f = vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

نلاحظ أن الشعاعين $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا لأن $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ وعليه الجملة $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ مقيدة، لكن الجملة $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ طليقة وعليه

$$\dim \operatorname{Im} f = card\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = 2$$

- إيجاد رتبة $f$

لدينا $\operatorname{rank}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 2$

2) لدينا

$$\begin{aligned} g : R^2 &\to R^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- إيجاد نواة $g$ . لدينا

$$\begin{aligned} Ker(g) &= \left\{u \in R^2 : g(u) = 0_{R^2}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 : g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

لإيجاد نواة $g$ ، نحل الجملة التالية

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ومنه

$$Ker(g) = vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{0_{R^2}\right\}$$

- إيجاد صورة $g$ . لدينا

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} g &= \left\{v\in R^2 : \exists u\in R^2, g(u)=v\right\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}2x\\ x+y\end{pmatrix} / x,y\in R\right\}\\ &=\left\{x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} / x,y\in R\right\}\end{aligned}$$

ومنه

$$\operatorname{Im} g = vect\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

الجملة $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ طليقة وعليه $\dim \operatorname{Im} g = card\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=2$ .

- إيجاد رتبة $g$

لدينا $\operatorname{rank}(g)=\dim \operatorname{Im} g = 2$

## 3- التطبيق الخطي المتباين، الغامر والتقابلي

**نظرية 11-2.** *ليكن $f$ تطبيقا خطيا من $E$ في $F$. لدينا*

*1)* $f$ *متباين* $\Leftrightarrow Ker(f)=\{0_E\}$

*2)* $f$ *غامر* $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$ [1]

**نظرية 11-3.** *ليكن $f$ تطبيقا خطيا من $E$ في $F$، بحيث $E$ و $F$ فضاءان شعاعيان ذوا بُعدين منتهيين. لدينا*

*1)* $f$ *متباين* $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(f)=\dim E$

*2)* $f$ *غامر* $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(f)=\dim F$

*3)* $f$ *تقابل* $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(f)=\dim E=\dim F$ [2]

**ملاحظة 11-1.** كل تطبيق تقابلي هو تطبيق متباين وغامر في الوقت نفسه.

**نظرية 11-4.** *إذا كان $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين لهما البُعد المنته نفسه $n$ وكان $f$ تطبيقا خطيا من $E$ في $F$ فإن*

*$f$ متباين $\Leftrightarrow$ $f$ غامر $\Leftrightarrow$ $f$ تقابل*[3]

**نظرية 11-5.** *ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين ذوي بُعدين منتهيين وليكن $f$ تطبيقا خطيا من $E$ في $F$. لدينا*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim Ker(f) = \dim E$$ [4]

**تعريف 11-4.** *كل تطبيق خطي وتقابلي من $E$ في $F$ يسمى تشاكلا تقابليا (isomorphism).*[5]

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 8.16, p. 207.
(2) Ibid. Proposition 8.19, p. 208.
(3) Ibid. Proposition 8.21, p. 209.
(4) Ibid. Théorème, p. 209.
(5) Ibid. Définition 8.18, p. 209.

**أمثلة 11-3.** بالرجوع إلى الأمثلة 11-2، لدينا

1) في المثال (1)، نلاحظ أن

$$Ker(f)=vect\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)\neq\{0_{R^3}\}$$

وعليه $f$ ليس متباينا (حسب النظرية 11-2). وبما أن $\operatorname{rank}(f)=2=\dim R^2=\dim F$ فإن $f$ غامر (حسب النظرية 11-3) وعليه $f$ ليس تقابلا (حسب الملاحظة 11-1).

لكن حسب النظرية 11-5، المساواة التالية محققة

$$\dim \operatorname{Im} f+\dim Ker(f)=\dim E$$

أي
$$2+1=3=\dim R^3$$

2) في المثال (2)، نلاحظ أن $Ker(g)=\{0_{R^2}\}$ ومنه $g$ متباين (حسب النظرية 11-2). وبما أن $\dim E=\dim F=\dim R^2=2<\infty$ وحسب النظرية 11-4 فإن $g$ غامر وعليه $g$ تقابل وحسب التعريف 11-4 فإن $g$ تشاكل تقابلي. كما يمكن التأكد بكل سهولة، بأن

$$\dim \operatorname{Im} g+\dim Ker(g)=\dim E$$

أي
$$2+0=2=\dim R^2$$

## 4- التطبيق العكسي لتطبيق خطي

**نظرية 11-6.** *إذا كان $f$ تشاكلا تقابليا من $E$ في $F$ فإن تطبيقه العكسي $f^{-1}$ هو أيضا تشاكل تقابلي من $F$ في $E$، بحيث*

$$f\circ f^{-1}=Id_F \quad \text{و} \quad f^{-1}\circ f=Id_E$$ ***(بتصرف)***[1]

**أمثلة 11-4.** بالرجوع إلى الأمثلة 11-3، لدينا

في المثال (2)، $g$ تشاكل تقابلي من $R^2$ في $R^2$ وعليه تطبيقه العكسي $g^{-1}$ هو أيضا تشاكل تقابلي من $R^2$ في $R^2$.

- لنجد عبارة التطبيق الخطي التقابلي $g^{-1}$

لدينا، عبارة $g$ كما يلي

$$g:R^2\to R^2$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2x\\x+y\end{pmatrix}$$

نضع $g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ وعليه، حسب النظرية 11-6، لدينا

$$(g^{-1}\circ g)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=g^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \quad \text{أي} \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=g^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

ومنه، لإيجاد عبارة $g^{-1}$ يكفي كتابة المركبتين $x$ و $y$ بدلالة $x'$ و $y'$، ليكون

[1] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 8.22, p. 209.

$$g^{-1}: R^2 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto g^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

لدينا

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

لنحل الجملة التالية

$$\begin{cases} 2x = x' \\ x+y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' \\ y = y' - x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' \\ y = y' - \frac{1}{2}x' \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x' \\ y' - \frac{1}{2}x' \end{pmatrix} = g^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

إذا

$$g^{-1}: R^2 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto g^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x' \\ y' - \frac{1}{2}x' \end{pmatrix}$$

أي

$$g^{-1}: R^2 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ y - \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

ويمكن التأكد بسهولة أن $g \circ g^{-1} = Id_{R^2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، أي

$$g \circ g^{-1}: R^2 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left(g \circ g^{-1}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

بحيث

$$\left(g\circ g^{-1}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=g\left[g^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]$$
$$=g\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x\\y-\frac{1}{2}x\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\left(\frac{1}{2}x\right)\\\left(\frac{1}{2}x\right)+\left(y-\frac{1}{2}x\right)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=Id_{R^2}$$

وبالمثل $g^{-1}\circ g=Id_{R^2}$ ، أي

$$g^{-1}\circ g:R^2\to R^2$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\left(g^{-1}\circ g\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

بحيث

$$\left(g^{-1}\circ g\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=g^{-1}\left[g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]$$
$$=g^{-1}\begin{pmatrix}2x\\x+y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(2x)\\(x+y)-\frac{1}{2}(2x)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=Id_{R^2}$$

## 5- المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي

**نظرية 11-7.** *ليكن* $E$ *و* $F$ *فضاءين شعاعيين على* $R$*، بحيث* $\dim E=n$ *و* $\dim F=m$ *وليكن* $B_E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ *أساسا ل* $E$ *و* $B_F=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ *أساسا ل* $F$.

- *لكل تطبيق خطي* $f$ *من* $E$ *في* $F$ *مصفوفة مرافقة* $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,...,m\\j=1,...,n}}$ *بحيث العناصر* $a_{ij}$ *معرفة كما يلي*

$$(1)\quad\begin{cases}f\left(e_1\right)=a_{11}b_1+a_{21}b_2+...+a_{m1}b_m\\f\left(e_2\right)=a_{12}b_1+a_{22}b_2+...+a_{m2}b_m\\\vdots\\f\left(e_n\right)=a_{1n}b_1+a_{2n}b_2+...+a_{mn}b_m\end{cases}$$

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 215.

*والمصفوفة A تأخذ الشكل التالي*

$$A=\left(a_{ij}\right)=\begin{array}{cc} f(e_1)\ f(e_2)\ldots f(e_n) & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \end{array}$$

*أي عدد أسطر المصفوفة A هو بُعد Fأي m وعدد أعمدتها هو بُعد Eأي n .*

- *وبالعكس، كل مصفوفة A هي مرافقة لتطبيق خطي f .*[1]
- *رتبة المصفوفة A هي رتبة التطبيق الخطي f ، أي* $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(f)=\dim\operatorname{Im} f$ .[2]

## أمثلة 11-5

1) ليكن $f$ تطبيقا خطيا، بحيث

$$f: R^2 \to R^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x-y \\ x+4y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

وليكن $B_E=B_{R^2}=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ الأساس القانوني ل $E=R^2$

و $B_F=B_{R^3}=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ الأساس القانوني ل $F=R^3$ .

لنحسب $f(e_1)=f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}=5b_1+b_2-b_3$ و $f(e_2)=f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}=-b_1+4b_2+b_3$

ومنه المصفوفة $A$ المرافقة للتطبيق الخطي $f$ هي

$$A=\begin{array}{cc} f(e_1)\ f(e_2) & \\ \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \end{array}$$

نلاحظ أن عدد أسطر $A$ هو $\dim F=\dim R^3=3$ وعدد أعمدتها هو $\dim E=\dim R^2=2$ .

بما أن الجملة $\left\{\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$ طليقة فإن $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(f)=\dim\operatorname{Im} f=card\left\{\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\right\}=2$ .

2) لتكن المصفوفة

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

لإيجاد التطبيق الخطي $g$ المرافق للمصفوفة $B$ ، نتبع عكسيا خطوات المثال السابق أعلاه.

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Proposition 13, p. 217.

(2) Ibid. Définition 19, p. 217.

نلاحظ أن عدد أسطر $B$ هو $2$، أي $\dim F = 2 = \dim R^2$ وعدد أعمدتها هو $3$، أي $\dim E = 3 = \dim R^3$.

ومنه

$$\begin{aligned} g : R^3 &\to R^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

لدينا $B_E = B_{R^3} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ الأساس القانوني ل $E = R^3$

و $B_F = B_{R^2} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ الأساس القانوني ل $F = R^2$.

ولدينا

$$\begin{aligned} \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3 \end{aligned}$$

بما أن $g$ تطبيق خطي، فإن

$$\begin{aligned} g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= g\left(xe_1 + ye_2 + ze_3\right) \\ &= xg\left(e_1\right) + yg\left(e_2\right) + zg\left(e_3\right) \\ &= x\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ -3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x - y \\ -3x + y - 4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} g : R^3 &\to R^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ -3x + y - 4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 6- تمارين

### 6-1- تمارين محلولة

**تمرين 11-1.** هل التطبيقات التالية خطية ؟

$$h : R \to R^2 \qquad x \mapsto \begin{pmatrix} 4x \\ -x \end{pmatrix} \qquad\qquad g : R^2 \to R^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y \\ \sqrt{3x} \end{pmatrix} \qquad\qquad f : R^2 \to R \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$$

**الحل**

1) لدينا

$$f : R^2 \to R$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$$

وعليه

$$\begin{aligned}
\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in R^2, \forall \alpha, \beta \in R : f(\alpha u + \beta v) &= f\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \\
&= f\begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix} \\
&= \alpha x + \beta x' \\
&= \alpha(x) + \beta(x') \\
&= \alpha f(u) + \beta f(v)
\end{aligned}$$

ومنه $f$ تطبيق خطي.

2) لدينا

$$g : R^2 \to R^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y \\ \sqrt{3x} \end{pmatrix}$$

وعليه

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in R^2,\forall\alpha,\beta\in R:g\left(\alpha u+\beta v\right)=g\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$$

$$=g\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\\alpha y+\beta y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')\\\alpha y+\beta y'\\\sqrt{3(\alpha x+\beta x')}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y'\\\alpha y+\beta y'\\\sqrt{3\alpha x+3\beta x'}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha x-\alpha y)+(\beta x'-\beta y')\\(\alpha y)+(\beta y')\\\sqrt{(3\alpha x)+(3\beta x')}\end{pmatrix}$$

$$\neq\begin{pmatrix}\alpha x-\alpha y\\\alpha y\\\sqrt{3\alpha x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta x'-\beta y'\\\beta y'\\\sqrt{3\beta x'}\end{pmatrix}$$

$$\neq\alpha g\left(u\right)+\beta g\left(v\right)$$

نلاحظ أن $\sqrt{3\alpha x+3\beta x'}\neq\sqrt{3\alpha x}+\sqrt{3\beta x'}\neq\alpha\sqrt{3x}+\beta\sqrt{3x'}$ . إذا $g$ ليس تطبيقا خطيا.

3) لدينا

$$\begin{aligned}h:R&\to R^2\\x&\mapsto\begin{pmatrix}4x\\-x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}\forall u=x,v=x'\in R,\forall\alpha,\beta\in R: h(\alpha u+\beta v)&=h(\alpha x+\beta x')\\&=\begin{pmatrix}4(\alpha x+\beta x')\\-(\alpha x+\beta x')\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4\alpha x+4\beta x'\\-\alpha x-\beta x'\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(4\alpha x)+(4\beta x')\\(-\alpha x)+(-\beta x')\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4\alpha x\\-\alpha x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\beta x'\\-\beta x'\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\alpha(4x)\\\alpha(-x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta(4x')\\\beta(-x')\end{pmatrix}\\&=\alpha\begin{pmatrix}4x\\-x\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4x'\\-x'\end{pmatrix}\\&=\alpha h(u)+\beta h(v)\end{aligned}$$

ومنه $h$ تطبيق خطي.

**تمرين 11−2.** ليكن لدينا التطبيق الخطي التالي

$$\begin{aligned}f:R^2&\to R^2\\\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix}x-y\\-x+y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- عين صورة، نواة ورتبة $f$ .
- هل $f$ متباين ؟ غامر ؟ تقابلي ؟

**الحل**

1) تعيين صورة، نواة ورتبة $f$

لدينا

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f&=\left\{v\in R^2:\exists u\in R^2, f(u)=v\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}x-y\\-x+y\end{pmatrix}/x,y\in R\right\}\\&=\left\{x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}/x,y\in R\right\}\end{aligned}$$

ومنه

$$\operatorname{Im} f=vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

نلاحظ أن $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ وعليه، الجملة $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ مقيدة، لكن الجملة $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ طليقة وعليه $\dim\operatorname{Im} f=card\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}=1$ . إذا، $\operatorname{rank}(f)=\dim\operatorname{Im} f=1$ .

- إيجاد نواة $f$

$$Ker(f)=\left\{u\in R^2 : f(u)=0_{R^2}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2 : f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\-x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

لإيجاد نواة $f$ ، نحل الجملة التالية

$$\begin{cases}x-y=0\\-x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow x-y=0$$
$$\Leftrightarrow x=y$$

ومنه

$$Ker(f)=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}/\,x\in R\right\}$$
$$Ker(f)=vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

2) بما أن $Ker(f)\neq\left\{0_{R^2}\right\}$ ، فإن $f$ غير متباين وبما أن $\operatorname{rank}(f)=1\neq\dim F=\dim R^2=2$ ، فإن $f$ غير غامر وعليه $f$ غير تقابلي.

**تمرين 11−3.** ليكن لدينا التطبيق الخطي التقابلي التالي

$$g: R^2\to R^2$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}5y\\x+2y\end{pmatrix}$$

- عين التطبيق العكسي ل $g$

**الحل.** تعيين التطبيق العكسي $g^{-1}$ ل $g$

بما أن $g$ تقابل من $R^2$ في $R^2$ ، فإن تطبيقه العكسي $g^{-1}$ أيضا تقابل من $R^2$ في $R^2$ ، بحيث

$$\left(g\circ g^{-1}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(g^{-1}\circ g\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=Id_{R^2}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

نضع $g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ . لإيجاد عبارة $g^{-1}$ ، نكتب مركبتي الشعاع $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ بدلالة مركبتي الشعاع $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ، أي

$$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5y\\x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

نحل الجملة التالية

$$\begin{cases}5y=x'\\x+2y=y'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{5}x'\\x=-2y+y'\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-2}{5}x'+y'\\y=\frac{1}{5}x'\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{5}x'+y'\\\frac{1}{5}x'\end{pmatrix}=g^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

وعليه

$$g^{-1}: R^2 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-2}{5}x' + y' \\ \frac{1}{5}x' \end{pmatrix}$$

إذا

$$g^{-1}: R^2 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-2}{5}x + y \\ \frac{1}{5}x \end{pmatrix}$$

### تمرين 11-4

1) أوجد المصفوفة $M$ المرافقة للتطبيق الخطي التالي

$$f: R^3 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-z \\ x+2y \end{pmatrix}$$

2) أوجد التطبيق الخطي $g$ المرافق للمصفوفة التالية

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

**الحل**

1) إيجاد المصفوفة $M$ المرافقة للتطبيق الخطي $f$

ليكن $B_E = B_{R^3} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ الأساس القانوني ل $E = R^3$

و $B_F = B_{R^2} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ الأساس القانوني ل $F = R^2$ .

لنحسب $f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 + b_2$ و $f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0b_1 + 2b_2$

$$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -b_1 + 0b_2$$

ومنه المصفوفة $M$ المرافقة للتطبيق الخطي $f$ هي

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \end{array}$$

نلاحظ أن عدد أسطر $M$ هو $\dim F = \dim R^2 = 2$ وعدد أعمدتها هو $\dim E = \dim R^3 = 3$ .

2) إيجاد التطبيق الخطي $g$ المرافق للمصفوفة $N$

نلاحظ أن عدد أسطر $N$ هو 4، أي $\dim F = 4 = \dim R^4$ وعدد أعمدتها هو 2، أي $\dim E = 2 = \dim R^2$ .

ومنه

$$g : R^2 \to R^4$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

لدينا $B_E = B_{R^2} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ الأساس القانوني ل $E = R^2$

و $B_F = B_{R^4} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ الأساس القانوني ل $F = R^4$ .

ولدينا

$$\begin{aligned} \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= xe_1 + ye_2 \end{aligned}$$

بما أن $g$ تطبيق خطي، فإن

$$\begin{aligned} g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= g\left(xe_1 + ye_2\right) \\ &= xg\left(e_1\right) + yg\left(e_2\right) \\ &= x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ -x \\ 0 \\ 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3y \\ y \\ -5y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ -x+3y \\ y \\ 4x-5y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

وعليه

$$g : R^2 \to R^4$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ -x+3y \\ y \\ 4x-5y \end{pmatrix}$$

**تمرين 11-5.** ليكن لدينا

$$f: R^2 \to R^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix}$$

$$g: R^3 \to R^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ -x+2y+z \end{pmatrix}$$

1) بين أن $f$ و $g$ تطبيقان خطيان.

2) عين صورتي، نواتي ورتبتي كل من $f$ و $g$.

3) هل التطبيقان $f$ و $g$ متباينان ؟ غامران ؟ تقابليان ؟

4) عين التطبيقين العكسيين ل $f$ و $g$، إن وجدا.

5) أوجد المصفوفتين $M$ و $N$ المرافقتين ل $f$ و $g$ على الترتيب واستنتج رتبتيهما.

**الحل**

1) تبيان أن $f$ و $g$ تطبيقان خطيان

لدينا

$$\begin{aligned}
\forall u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in R^2, \forall \alpha,\beta \in R : f(\alpha u+\beta v) &= f\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \\
&= f\begin{pmatrix} \alpha x+\beta x' \\ \alpha y+\beta y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha x+\beta x')+2(\alpha y+\beta y') \\ \alpha y+\beta y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x+\beta x'+2\alpha y+2\beta y' \\ \alpha y+\beta y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha x+2\alpha y)+(\beta x'+2\beta y') \\ (\alpha y)+(\beta y') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x+2\alpha y \\ \alpha y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta x'+2\beta y' \\ \beta y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(x+2y) \\ \alpha(y) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta(x'+2y') \\ \beta(y') \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} x'+2y' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= \alpha f(u)+\beta f(v)
\end{aligned}$$

ومنه $f$ تطبيق خطي.

ولدينا

$$\forall u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\in R^3,\forall\alpha,\beta\in R:g(\alpha u+\beta v)=g\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)$$

$$=g\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\\alpha y+\beta y'\\\alpha z+\beta z'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')\\(\alpha x+\beta x')+(\alpha z+\beta z')\\-(\alpha x+\beta x')+2(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha y+\beta y'+\alpha z+\beta z'\\\alpha x+\beta x'+\alpha z+\beta z'\\-\alpha x-\beta x'+2\alpha y+2\beta y'+\alpha z+\beta z'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha y+\alpha z)+(\beta y'+\beta z')\\(\alpha x+\alpha z)+(\beta x'+\beta z')\\(-\alpha x+2\alpha y+\alpha z)+(-\beta x'+2\beta y'+\beta z')\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha y+\alpha z\\\alpha x+\alpha z\\-\alpha x+2\alpha y+\alpha z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta y'+\beta z'\\\beta x'+\beta z'\\-\beta x'+2\beta y'+\beta z'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha(y+z)\\\alpha(x+z)\\\alpha(-x+2y+z)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta(y'+z')\\\beta(x'+z')\\\beta(-x'+2y'+z')\end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix}y+z\\x+z\\-x+2y+z\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y'+z'\\x'+z'\\-x'+2y'+z'\end{pmatrix}$$

$$=\alpha g(u)+\beta g(v)$$

ومنه $g$ تطبيق خطي.

2) تعيين صورة، نواة ورتبة $f$

لدينا

$$\operatorname{Im} f=\left\{v\in R^2:\exists u\in R^2, f(u)=v\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x+2y\\y\end{pmatrix}/ x,y\in R\right\}$$

$$=\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}/ x,y\in R\right\}$$

ومنه

$$\operatorname{Im} f=vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

الجملة $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ طليقة وعليه $\dim \operatorname{Im} f = card\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\} = 2$.

إذا $\operatorname{rank}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 2$.

- إيجاد نواة $f$

$$Ker(f) = \{u \in R^2 : f(u) = 0_{R^2}\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in R^2 : f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

لإيجاد نواة $f$ ، نحل الجملة التالية

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

ومنه

$$Ker(f) = vect\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \{0_{R^2}\}$$

بما أن $Ker(f) = \{0_{R^2}\}$ ، فإن $f$ متباين وبما أن $\dim E = \dim F = \dim R^2 = 2 < \infty$ ، فإن $f$ غامر وتقابل.

- تعيين التطبيق العكسي $f^{-1}$ ل $f$

بما أن $f$ تقابل من $R^2$ في $R^2$ ، فإن تطبيقه العكسي $f^{-1}$ أيضا تقابل من $R^2$ في $R^2$ ، بحيث

$$\left(f \circ f^{-1}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \left(f^{-1} \circ f\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = Id_{R^2} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

نضع $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ . لإيجاد عبارة $f^{-1}$ ، نكتب مركبتي الشعاع $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ بدلالة مركبتي الشعاع $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ، أي

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

نحل الجملة التالية

$$\begin{cases} x+2y=x' \\ y=y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-2y \\ y=y' \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-2y' \\ y=y' \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'-2y'\\y'\end{pmatrix} = f^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

وعليه

$$f^{-1} : R^2 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x'-2y'\\y'\end{pmatrix}$$

إذا

$$f^{-1}: R^2 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ y \end{pmatrix}$$

– إيجاد المصفوفة $M$ المرافقة ل $f$ وكذا رتبتها

ليكن $B_E = B_F = B_{R^2} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ الأساس القانوني ل $E = F = R^2$

لنحسب $f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$ و $f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2$

ومنه المصفوفة $M$ المرافقة للتطبيق الخطي $f$ هي

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

و $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 2$ .

_ تعيين صورة، نواة ورتبة $g$

لدينا

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g &= \left\{ v \in R^3 : \exists u \in R^3, g(u) = v \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ -x+2y+z \end{pmatrix} / x, y, z \in R \right\} \\ &= \left\{ x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / x, y, z \in R \right\} \end{aligned}$$

ومنه

$$\operatorname{Im} g = vect\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

نلاحظ أن $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ وعليه الجملة $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ مقيدة، لكن الجملة $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

طليقة وعليه $\dim \operatorname{Im} g = card\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = 2$ .

إذا $\operatorname{rank}(g) = \dim \operatorname{Im} g = 2$ .

- إيجاد نواة $g$

$$Ker(g)=\{u\in R^3 : g(u)=0_{R^3}\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 : g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\x+z\\-x+2y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

لإيجاد نواة $g$ ، نحل الجملة التالية

$$\begin{cases}y+z=0\\x+z=0\\-x+2y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-z\\x=-z\\z-2z+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-z\\x=-z\\0=0\ (\text{قضية صحيحة})\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-z\\x=-z\end{cases}$$

ومنه

$$Ker(g)=\left\{\begin{pmatrix}-z\\-z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}/z\in R\right\}$$

وعليه

$$Ker(g)=vect\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

بما أن $Ker(g)\neq\{0_{R^3}\}$ ، فإن $g$ غير متباين وبما أن $\text{rank}(g)=2\neq\dim F=\dim R^3=3$ ، فإن $g$ غير غامر وعليه $g$ غير تقابلي وبالتالي لا يقبل تطبيقا عكسيا.

- إيجاد المصفوفة $N$ المرافقة ل $g$ وكذا رتبتها

ليكن $B_E=B_F=B_{R^3}=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ الأساس القانوني ل $E=F=R^3$

لنحسب $g(e_1)=g\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=e_2-e_3$ ، $g(e_2)=g\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=e_1+2e_3$ ،

$$g(e_3)=g\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=e_1+e_2+e_3$$

ومنه المصفوفة $N$ المرافقة للتطبيق الخطي $g$ هي

$$N=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

و $\operatorname{rank}(N)=\operatorname{rank}(g)=\dim \operatorname{Im} g=2$ .

## 6-2- تمارين للحل

**تمرين 11-6.** هل التطبيقات التالية خطية ؟

$$f:R^3\to R^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y \\ z-x \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

$$g:R^2\to R^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+y \\ x-4y \end{pmatrix}$$

$$h:R^3\to R^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-x \\ x+z \end{pmatrix}$$

**تمرين 11-7.** ليكن لدينا التطبيق الخطي التالي

$$f:R^2\to R^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}$$

- عين صورة، نواة ورتبة $f$ .
- هل $f$ متباين ؟ غامر ؟ تقابلي ؟

**تمرين 11-8.** ليكن لدينا التطبيق الخطي التقابلي التالي

$$g:R^2\to R^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 7x \end{pmatrix}$$

- عين التطبيق العكسي ل $g$

**تمرين 11-9**

1) أوجد المصفوفة $M$ المرافقة للتطبيق الخطي التالي

$$f:R^2\to R^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ -x+5y \\ 3y \end{pmatrix}$$

2) أوجد التطبيق الخطي $g$ المرافق للمصفوفة التالية

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

**تمرين 11-10.** ليكن لدينا

$$f : R^2 \to R^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ -x-2y \end{pmatrix}$$

$$g : R^3 \to R^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y-z \\ x+y+z \\ y+z \end{pmatrix}$$

1) بين أن $f$ و $g$ تطبيقان خطيان.

2) عين صورتي، نواتي ورتبتي كل من $f$ و $g$ .

3) هل التطبيقان $f$ و $g$ متباينان ؟ غامران ؟ تقابليان ؟

4) عين التطبيقين العكسيين ل $f$ و $g$ ، إن وجدا.

5) أوجد المصفوفتين $M$ و $N$ المرافقتين ل $f$ و $g$ على الترتيب واستنتج رتبتيهما.

# الفصل الثاني عشر

# المصفوفات

للمصفوفات دور مهم في الاقتصاد، إذ تعتبر طريقة بسيطة ومنظمة للتعبير عن العلاقة الخطية بين متغيرين أو أكثر، كما تساعد في حل جمل المعادلات الخطية وتحديد ما إذا كان يوجد حل قبل إجراء المحاولة.

## 1- تعريف مصفوفة (Definition of Matrix)

**تعريف 12-1.** *المصفوفة هي شكل مستطيل يشبه الجدول، مؤلف من أسطر وأعمدة، بحيث يشترك كل سطر مع عمود بعدد ذي قيمة حقيقية، تسمى هذه الأعداد بعناصر المصفوفة. يرمز للمصفوفات بإحدى الحروف اللاتينية الكبيرة $A$، $B$، $C$،... ولعناصرها بإحدى الحروف الصغيرة $a$، $b$، $c$،... التي يرفق معها رقمان يشيران للسطر والعمود اللذين يشتركان بهذا العنصر.* [1]

*الشكل العام لكتابة مصفوفة $A$ يعطى كالآتي*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

*المصفوفة $A$ تتألف من $m$ سطر و $n$ عمود وفي هذه الحالة، نقول أن $A$ من الدرجة $(m,n)$ أو $(m\times n)$ ونكتب $A(m,n)$ أو $A_{m,n}$ أو $A\in M_{m,n}(R)$ بحيث $M_{m,n}(R)$ هي مجموعة المصفوفات ذات $m$ سطر و $n$ عمود بمعاملات حقيقية. العنصر $a_{ij}$ يمثل العدد الحقيقي الذي يقع في تقاطع السطر $i$ مع العمود $j$.* [2]

### أمثلة 12-1

1) من أجل

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

فإن $A\in M_{2,3}(R)$ أو $A_{2,3}$ أي $A$ مصفوفة من سطرين وثلاث أعمدة.

$a_{11}$ يقرأ "$a$ واحد واحد" وليس "$a$ أحدا عشر" ويمثل العنصر الذي يقع في تقاطع السطر الأول مع العمود الأول وقيمته $a_{11}=8$.

$a_{23}$ يقرأ "$a$ اثنان ثلاثة" وليس "$a$ ثلاثة وعشرون" ويمثل العنصر الذي يقع في تقاطع السطر الثاني مع العمود الثالث وقيمته $a_{23}=7$.

2) من أجل

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

فإن $B\in M_{2,2}(R)$ أو $B_{2,2}$ بحيث $b_{21}=-3$ و $b_{12}=9$.

---

[1] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 417-418.

[2] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 219.

3) من أجل

$$C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & -1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

فإن $C\in M_{3,2}(R)$ أو $C_{3,2}$ بحيث $c_{11}=2$، $c_{21}=4$ و $c_{32}=1$.

4) من أجل

$$D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \sqrt{5}\\ e\end{pmatrix}$$

فإن $D\in M_{3,1}(R)$ أو $D_{3,1}$ بحيث $d_{11}=\frac{1}{2}$ و $d_{31}=e$.

5) من أجل

$$E=\begin{pmatrix}-2 & 0 & \frac{7}{3} & \pi\end{pmatrix}$$

فإن $E\in M_{1,4}(R)$ أو $E_{1,4}$ بحيث $e_{12}=0$، $e_{11}=-2$ و $e_{14}=\pi$.

## 2- مصفوفات خاصة (Special Matrices)

### 2-1- مصفوفة سطر (Row Matrix)

*مصفوفة سطر هي المصفوفة التي تتألف من سطر واحد وعدد من الأعمدة، أي درجتها $(1,n)$.*[1]

**أمثلة 12-2**

1) $A=\begin{pmatrix}7 & -5 & -\frac{4}{9} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\in M_{1,4}(R)$ أي $A$ تتألف من سطر واحد وأربع أعمدة.

2) $B=\begin{pmatrix}\sqrt{11} & 0\end{pmatrix}\in M_{1,2}(R)$ أي $B$ تتألف من سطر واحد وعمودين.

### 2-2- مصفوفة عمود (Column Matrix)

*مصفوفة عمود هي المصفوفة التي تتألف من عدد من الأسطر وعمود واحد ودرجتها $(m,1)$.*[2]

**أمثلة 12-3**

$A=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}\in M_{2,1}(R)$ ، $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -8\end{pmatrix}\in M_{3,1}(R)$.

### 2-3- مصفوفة العنصر الواحد (One Element Matrix)

*مصفوفة العنصر الواحد هي المصفوفة التي تتألف من سطر واحد وعمود واحد أي درجتها $(1,1)$.*

**أمثلة 12-4**

$A=(4)\in M_{1,1}(R)$ ، $B=(-7)\in M_{1,1}(R)$.

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 219.

(2) Ibid, p. 219.

### 2-4- المصفوفة الصفرية (Null or Zero Matrix)

تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا *بالمصفوفة الصِفرية* ويرمز لها بالرمز 0 بغض النظر عن درجتها. (1)

### أمثلة 12-5

$$0_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{، }0_{1,1}=(0)\text{، }0_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\text{، }0_{2,1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

### 2-5- المصفوفة المربعة (Square Matrix)

- نسمي $A$ *مصفوفة مربعة*، إذا تساوى فيها عدد الأسطر مع عدد الأعمدة، أي درجتها $(n,n)$ ونقول اختصارا أنها من الدرجة n ونكتب $A_n$أو

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(R)$$

وتسمى العناصر $a_{11},a_{22},...,a_{nn}$ بعناصر *القطر الرئيسي (principal diagonal)* لـ $A$.

- نسمي *أثر (trace)* $A$، مجموع عناصر القطر الرئيسي ويرمز له بـ $tr(A)$ ونكتب

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \quad (2)$$

### أمثلة 12-6

1) $A=\begin{pmatrix}2&3\\-9&5\end{pmatrix}\in M_2(R)$

عناصر القطر الرئيسي لـ $A$ هي $a_{11}=2$، $a_{22}=5$ ومنه $tr(A)=a_{11}+a_{22}=2+5=7$.

2) $B=\begin{pmatrix}4&6&0\\-1&-3&5\\2&7&-1\end{pmatrix}\in M_3(R)$

عناصر القطر الرئيسي لـ $B$ هي $b_{11}=4$، $b_{22}=-3$ و $b_{33}=-1$ ومنه $tr(B)=b_{11}+b_{22}+b_{33}=4-3-1=0$.

### 2-6- المصفوفة المثلثية (Triangular Matrix)

#### 2-6-1- المصفوفة المثلثية العلوية (Upper Triangular Matrix)

نسمي مصفوفة مربعة $A$ مصفوفة *مثلثية علوية*، إذا كانت جميع عناصرها تحت القطر الرئيسي أصفارا، أي

$$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}=\begin{cases}a_{ij}\neq 0; & i\le j\\ a_{ij}=0; & i>j\end{cases} \quad (3)$$

---

(1) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص. 422.

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 220-221.

(3) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 94.

**أمثلة 12−7.** المصفوفات التالية، مصفوفات مثلثية علوية

$$C=\begin{pmatrix}8&-1&6&0\\0&2&1&3\\0&0&4&1\\0&0&0&7\end{pmatrix} ،B=\begin{pmatrix}-5&3&6\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix} ،A=\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}$$

### 2−6−2 المصفوفة المثلثية السفلية (Lower Triangular Matrix)

*نسمي مصفوفة مربعة $A$ مصفوفة مثلثية سفلية، إذا كانت جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي أصفارا، أي*

$$A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}=\begin{cases}a_{ij}=0; & i<j\\ a_{ij}\neq 0; & i\ge j\end{cases}$$ (1)

**أمثلة 12−8.** المصفوفات التالية، مصفوفات مثلثية سفلية

$$C=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\-1&2&0&0\\5&-4&10&0\\9&4&1&6\end{pmatrix} ،B=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&2&0\\6&9&3\end{pmatrix} ،A=\begin{pmatrix}5&0\\-6&3\end{pmatrix}$$

### 2−7 المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix)

*نسمي مصفوفة مربعة $A$ مصفوفة قطرية، إذا كانت جميع عناصرها أصفارا باستثناء القطر الرئيسي، أي*

$$A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}=\begin{cases}a_{ij}=0; & i\neq j\\ a_{ij}\neq 0; & i=j\end{cases}$$ (2)

**ملاحظة 12−1.** المصفوفة القطرية هي مصفوفة مثلثية علوية وسفلية في آن واحد.

**أمثلة 12−9.** المصفوفات التالية، مصفوفات قطرية

$$C=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&7&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} ،B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix} ،A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&6\end{pmatrix}$$

### 2−8 مصفوفة الوحدة (Identity or Unit Matrix)

*مصفوفة الوحدة هي مصفوفة قطرية، بحيث عناصر قطرها الرئيسي تساوي العدد 1 ويرمز لها بالرمز $I$ أو $I_n$ حيث $n$ درجتها، أي*

$$I_n=\begin{cases}a_{ij}=0; & i\neq j\\ a_{ij}=1; & i=j\end{cases}$$ (3)

**أمثلة 12−10**

$$I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} ،I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} ،I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

---

(1) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 94.

(2) نفسه، ص. 93.

(3) نفسه، ص. 93.

**–منقول مصفوفة (Transpose of Matrix)**

*منقول مصفوفة $A$ هو تغيير أسطرها إلى أعمدة وأعمدتها إلى أسطر ونرمز له بأحد الرموز التالية $A^t$ أو $A'$ ، $A^T$ ، فإذا كان $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ فإن $A^T=\left(a_{ij}{}^T\right)_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le m}}$ بحيث $a_{ij}{}^T=a_{ji}$ مع $\left(A^T\right)^T=A$.*[1]

**أمثلة 12–11.** لنجد منقول كل من المصفوفات التالية

1) $A=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ ومنه $A^T=\begin{pmatrix}4 & -1\end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\0 & -5\end{pmatrix}$ ومنه $B^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\3 & -5\end{pmatrix}$

3) $C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\5 & 1 & 4\end{pmatrix}$ ومنه $C^T=\begin{pmatrix}-1 & 5\\3 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}$

4) $D=\begin{pmatrix}3 & -9\\-4 & 7\\6 & 0\end{pmatrix}$ ومنه $D^T=\begin{pmatrix}3 & -4 & 6\\-9 & 7 & 0\end{pmatrix}$

## 2–9– المصفوفة التناظرية (Symmetric Matrix)

*تكون مصفوفة مربعة $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ تناظرية، إذا كان $A^T=A$ ، أي $\forall i\neq j: a_{ij}=a_{ji}$.*[2]

**أمثلة 12–12.** المصفوفات التالية تناظرية

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\2 & 1 & 5\\6 & 5 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 0 & 1\\2 & 4 & -9 & 6\\0 & -9 & 8 & 3\\1 & 6 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

## 2–10– المصفوفة ضد التناظرية (Skew-symmetric Matrix)

*تكون مصفوفة مربعة $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ ضد تناظرية، إذا كان $A^T=-A$ ، أي $\forall i\neq j: a_{ij}=-a_{ji}$ وعناصر القطر الرئيسي معدومة.*[3]

**أمثلة 12–13.** المصفوفات التالية ضد تناظرية

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\-2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -3\\-5 & 0 & 1\\3 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & -4 & 2 & -1\\4 & 0 & 3 & -5\\-2 & -3 & 0 & 7\\1 & 5 & -7 & 0\end{pmatrix}$$

---

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 219-220.
[2] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 10.9, p. 285.
[3] Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 224.

## 3- عمليات على المصفوفات (Matrices Operations)

### 3-1- تساوي مصفوفتين (Equality of Matrices)

*تتساوى مصفوفتان، إذا كانتا من الدرجة نفسها وكانت العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساوية، أي، إذا كانت* $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *و* $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *مصفوفتين من الدرجة* $(m,n)$*، فإن*

$A=B$ *إذا كان* $\forall 1\le i\le m, \forall 1\le j\le n : a_{ij}=b_{ij}$ [(1)]

**أمثلة 12-14**

1) المصفوفتان التاليتان متساويتان

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}5 & \frac{27}{9}\\ -\frac{9}{9} & \frac{16}{8}\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

2) المصفوفتان التاليتان غير متساويتين

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 7 & 3\\ 1 & -1 & 9\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}-2 & 7 & 8\\ 1 & -1 & 9\end{pmatrix}$$

3) لتكن $A$ و $B$ مصفوفتين، بحيث

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}x+4 & -2y\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

لنجد قيمتي المتغيرين $x$ و $y$ حتى تكون $A=B$.

بما أن المصفوفتين $A$ و $B$ متساويتان، فإن

$$\begin{cases}x+4=3\\ -2y=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}$$

### 3-2- جمع وطرح المصفوفات (Addition and Subtraction of Matrices)

*عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من الدرجة نفسها ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة من المصفوفتين، أي إذا كانت* $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *و* $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *مصفوفتين من الدرجة* $(m,n)$*، فإن*

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\text{، } A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \text{ و } B-A=\left(b_{ij}-a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

*مصفوفات من الدرجة* $(m,n)$ *(بتصرف).* [(2)]

**أمثلة 12-15.** إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}9 & 8 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 6\\ -4 & 3 & 7\end{pmatrix}$$

---

(1) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص. 423.

(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 9.3, p. 218.

فإن

$$A+B=\begin{pmatrix} 9+1 & 8+5 & 1+6 \\ -1-4 & 0+3 & 2+7 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & 13 & 7 \\ -5 & 3 & 9 \end{pmatrix}=B+A$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 9-1 & 8-5 & 1-6 \\ -1-(-4) & 0-3 & 2-7 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 3 & -5 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix} 1-9 & 5-8 & 6-1 \\ -4-(-1) & 3-0 & 7-2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -8 & -3 & 5 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}=-(A-B)$$

**نظرية 12−1.** *لتكن $A$ ، $B$ و $C$ ثلاث مصفوفات من الدرجة نفسها. لدينا*

*1) (جمع المصفوفات تبديلي)* $A+B=B+A$

*2) (المصفوفة المعدومة تمثل العنصر الحيادي بالنسبة لعملية جمع المصفوفات)* $A+0=0+A=A$

*3) (جمع المصفوفات تجميعي)* $(A+B)+C=A+(B+C)$ [1]

### 3−3− ضرب مصفوفة بعدد حقيقي (Scalar Multiplication of Matrix)

*عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بهذا العدد، أي، إذا كانت* $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ *مصفوفة من الدرجة* $(m,n)$ *وكان* $\alpha\in R$ *، فإن* $\alpha A=(\alpha a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ *مصفوفة من الدرجة* $(m,n)$. [2]

**أمثلة 12−16.** إذا كان

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

فإن

$$3A=\begin{pmatrix} 3(6) & 3(-9) \\ 3(-3) & 3(0) \\ 3(0) & 3(3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 18 & -27 \\ -9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

---

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 551.

(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 9.4, p. 219.

و

$$\frac{1}{3}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(6) & \frac{1}{3}(-9)\\ \frac{1}{3}(-3) & \frac{1}{3}(0)\\ \frac{1}{3}(0) & \frac{1}{3}(3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

**ملاحظة 12–2.** نكتب $3A$ وليس $A3$ ! و $\frac{1}{3}A$ وليس $\frac{A}{3}$ !

### 3–4– ضرب المصفوفات (Multiplication of Matrices)

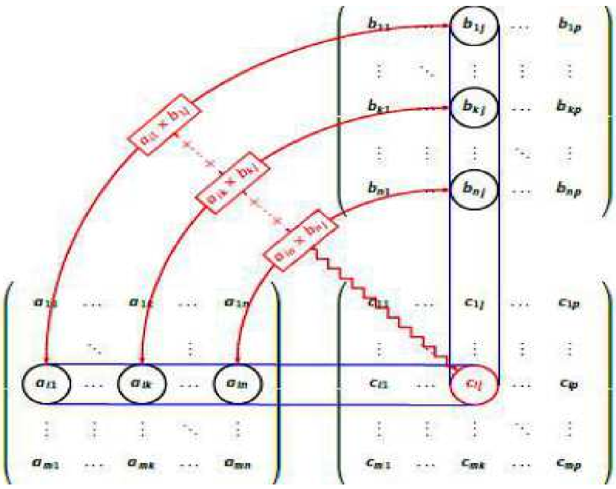
*عند ضرب مصفوفتين يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساويا لعدد أسطر المصفوفة الثانية والمصفوفة الناتجة لها عدد أسطر المصفوفة الأولى وعدد أعمدة المصفوفة الثانية، أي، إذا كانت*

$B=(b_{kj})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le j\le p}}$ ، و $A=(a_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le n}}$

*فإن*

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ بحيث $AB=C=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}$

*وهذا ما يوضحه الشكل التالي*



***شكل 12–1– جداء مصفوفتين*** (1)

**أمثلة 12–17.** إذا كان $A\in M_{3,2}(R)$ و $B\in M_{2,3}(R)$ ، بحيث

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 222.

فإن $BA \in M_2(R)$ ، بحيث

$$BA = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} (5.3)+(2.2)+(1.6) & (5.4)+(2.1)+(1.2) \\ (3.3)+(3.2)+(4.6) & (3.4)+(3.1)+(4.2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & 24 \\ 39 & 23 \end{pmatrix}$$

و $AB \in M_3(R)$ ، بحيث

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} (3.5)+(4.3) & (3.2)+(4.3) & (3.1)+(4.4) \\ (2.5)+(1.3) & (2.2)+(1.3) & (2.1)+(1.4) \\ (6.5)+(2.3) & (6.2)+(2.3) & (6.1)+(2.4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & 18 & 19 \\ 13 & 7 & 6 \\ 36 & 18 & 14 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $AB \neq BA$ ، كما لا يمكن حساب $AA$ و $BB$ .

**نظرية 12-2.** *لتكن $A$ ، $B$ و $C$ ثلاث مصفوفات تحقق قواعد ضرب المصفوفات. لدينا*

*1) (ضرب المصفوفات تجميعي)* $(AB)C = A(BC)$

*2) (ضرب المصفوفات توزيعي على الجمع من اليسار)* $A(B+C) = AB + AC$

*3) (ضرب المصفوفات توزيعي على الجمع من اليمين)* $(A+B)C = AC + BC$ [1]

*4) (ضرب المصفوفات ليس تبديليا)* $AB \neq BA$

*5) (مصفوفة الوحدة $I$ محايدة في عملية ضرب المصفوفات)* $AI = IA = A$

*6) (المصفوفة المعدومة $0$ عنصر ماص في عملية ضرب المصفوفات)* $A0 = 0A = 0$

---

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 556.

7) $(AB)^T = B^T A^T$

8) $A^n = \underbrace{A.A...A}_{n\ \text{مرة}}$ مع $n \in N$ [1]

### ملاحظة 12-3

1) $AB = 0$ لا يعني أن $A = 0$ أو $B = 0$ ومثال ذلك

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \neq 0_2 \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \neq 0_2 \quad \text{و} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

2) $AB = AC$ مع $A \neq 0$ لا يعني أن $B = C$ ومثال ذلك

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\text{،} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} : \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (-2) \quad \text{و} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)$$

ومنه $AB = AC$، لكن $B \neq C$.

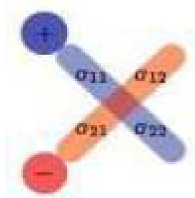
للمحددات دور أساسي في قابلية قلب مصفوفة. سنستعرض أشهر الطرق لحساب محدد مصفوفة وكذا مقلوبها.

## 4- محدد مصفوفة (Determinant of a Matrix)

- *لكل مصفوفة مربعة $A$، قيمة رقمية تسمى محددها، يرمز له بأحد الرموز* $|A|$، $\Delta A$ *أو* $\det(A)$.[2]
- *إذا كان* $|A| = 0$ *فإن* $A$ *تسمى مصفوفة مفردة (singular) وإن كان* $|A| \neq 0$ *فان* $A$ *تسمى مصفوفة غير مفردة (non-singular)*.[3]

### 4-1- محدد مصفوفة من الدرجة الثانية (Determinant of Matrix of Order two)

*لتكن* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية. محدد* $A$ *يحسب بالطريقة التالية*




*أي* $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.[4]

**أمثلة 12-18.** لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (2.4) - (1.3) = 5$$

---

[1] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 436-438.

[2] Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 230.

[3] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص. 448.

[4] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 257-258.

### 4–2– محدد مصفوفة من الدرجة $n$ (Determinant of Matrix of Order $n$)

بشكل عام، لإيجاد محدد مصفوفة من الدرجة $n$، نستخدم طريقة المحددات الصغرى، لكن استثناء من أجل المصفوفات من الدرجة الثالثة يمكن استخدام طريقة أخرى وهي طريقة سايروس.

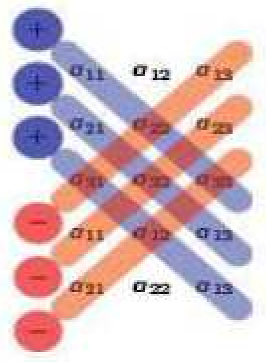
*لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة الثالثة، بحيث*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

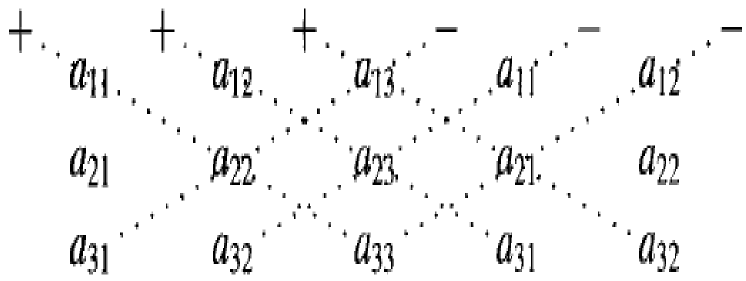
*لإيجاد محدد $A$ نستخدم إحدى الطريقتين التاليتين.*

### 4–2–1– طريقة سايروس (Sarrus's Rule)

*في هذه الطريقة، نعيد كتابة العمودين الأول والثاني أو السطرين الأول والثاني، ثم نجد حاصل ضرب الأقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الأقطار المرافقة كالآتي*



أو



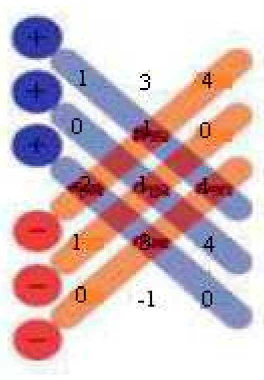

وعليه $\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$ [1]

**ملاحظة 12–4**. طريقة سايروس صالحة فقط للمصفوفات من الدرجة الثالثة ولا يمكن تعميمها لمصفوفات من درجة أعلى. [2]

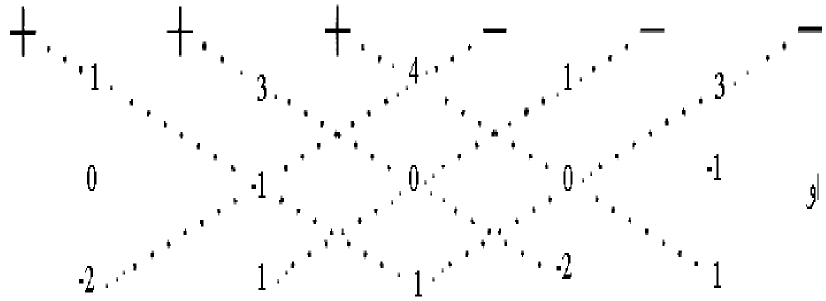
**أمثلة 12–19**. لنحسب المحدد التالي بطريقة سايروس

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

لدينا



أو




---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 261-262.

(2) Ibid, p. 262.

ومنه

$$\begin{aligned}\Delta &= (1.-1.1)+(3.0.-2)+(4.0.1)-(4.-1.-2)-(1.0.1)-(3.0.1)\\ &= -1+0+0-8-0-0\\ &= -9\end{aligned}$$

### 4-2-2- طريقة المحددات الصغرى (Expansion by Cofactors)

طريقة المحددات الصغرى تقوم على فكرة إيجاد محددات من درجة أقل حتى الحصول على محددات من الدرجة الثانية ويمكن حساب المحدد من أجل سطر أو عمود معينين.

*ليكن*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

محدد *من الدرجة* $n$، بحيث

$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_{ij}$، *بالنسبة للسطر* $i$ *و* $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_{ij}$، *بالنسبة للعمود* $j$. (1)

حيث $X_{ij}$ *يسمى العامل المرافق (cofactor) للعنصر* $a_{ij}$، بحيث

$$X_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$$

*و* $\Delta_{ij}$ *المحدد الثانوي (minor) للعنصر* $a_{ij}$، *أي المحدد من الدرجة* $(n-1)$ *المستخرج من* $\Delta$ *بإزالة السطر* $i$ *والعمود* $j$ *. نرمز لمصفوفة العوامل المرافقة* $X_{ij}$ *للعنصر* $a_{ij}$ *بأحد الرمزين* $C$ *أو* comA (*)، *بحيث*

$$C = \text{com}A = \left(X_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} = \left((-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \quad (2)$$

*إذا كانت*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

*فإن محدد* $A$ *بالنسبة للسطر الأول هو*

$$\begin{aligned}\Delta A &= (-1)^{1+1} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

*ثم نجد محددات المصفوفات من الدرجة الثانية. يمكن إيجاد المحدد بالنسبة لأي سطر أو أي عمود وفق الإشارات التالية*

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 263.

(*) الرمز "com" أصله كلمة "co-matrix" أي "matrix of cofactors" وتعني "مصفوفة العوامل المرافقة".

(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 9.23, p. 244.

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad ^{(1)}$$

**أمثلة 12−20.** لنحسب محدد المصفوفة التالية بالنسبة للسطر الأول والعمود الثاني، بحيث

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

بالنسبة للسطر الأول

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}.2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.(-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\left[(5.0)-(4.1)\right] - 1\left[(1.1)-(5.3)\right] \\ &= 2(0-4) - 1(1-15) = 6 \end{aligned}$$

بالنسبة للعمود الثاني

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2}.0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 5\left[(2.0)-(-1.3)\right] - 1\left[(2.4)-(-1.1)\right] \\ &= 5(0+3) - 1(8+1) = 6 \end{aligned}$$

**نظرية 12−3.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$. لدينا*

*1) إذا كانت عناصر أحد أسطر أو أعمدة المصفوفة $A$ أصفارا، فإن $|A| = 0$.*

*2) إذا تساوى سطرين أو عمودين في المصفوفة $A$، فإن $|A| = 0$.*

*3) إذا كانت أسطر أو أعمدة المصفوفة $A$ مرتبطة خطيا، فإن $|A| = 0$.*

*4) إذا بدلنا بين سطرين أو عمودين في المصفوفة $A$، فإن محددها تنعكس إشارته.*

*5) إذا ضرب أحد أسطر أو أعمدة المصفوفة $A$ بعدد ثابت، فإن محددها يضرب بالعدد نفسه.* (2)

*6)* $|\alpha A| = \alpha^n |A|; \quad \alpha \in R$

*7)* $|AB| = |A||B|$ و $|A^T| = |A|$

*8) محدد مصفوفة مثلثية أو قطرية هو حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي.* (3)

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 601.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 9.2, p. 241.
(3) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 234-235.

## 5- مقلوب مصفوفة (Inverse of Matrix)

*لتكن* $A$ *مصفوفة مربعة من الدرجة* $n$ *(أي* $A\in M_n(R)$*). نقول أن* $A$ *قابلة للقلب (invertible) إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة وحيدة* $B$ *(مع* $B\in M_n(R)$*)، بحيث* $AB=BA=I_n$ *ونقول أن "* $B$ *مقلوب (inverse)* $A$*" ونكتب "* $A^{-1}=B$ *" ونقول أيضا أن "* $A$ *مقلوب* $B$*" ونكتب "* $B^{-1}=A$ *" (بتصرف).*[1]

**نظرية 12-4.** *لتكن* $A$ *مصفوفة مربعة من الدرجة* $n$*. تكون* $A$ *قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان* $\det(A)\neq 0$.[2]

**نظرية 12-5.** *لتكن* $A$ *مصفوفة مربعة قابلة للقلب. لدينا*

*1) إذا كان* $A=(a_{11})\in M_1(R)$ *مع* $a_{11}\neq 0$*، فإن* $A^{-1}=\dfrac{1}{a_{11}}$.

*2)* $A^{-1}$ *قابلة للقلب و* $(A^{-1})^{-1}=A$.

*3) من أجل كل عدد طبيعي* $k$*،* $A^k$ *قابلة للقلب و* $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$.

*4)* $A^T$ *قابلة للقلب و* $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

*5)* $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$.

*6) إذا كانت* $A$ *و* $B$ *مصفوفتين قابلتين للقلب، فإن* $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.[3]

**ملاحظة 12-5.** الكتابة $\dfrac{A}{B}$ خاطئة، بحيث $A$ و $B$ مصفوفتان.

**-إيجاد مقلوب مصفوفة (Finding Inverse of a Matrix)**

هناك عدة طرق لإيجاد مقلوب مصفوفة، فيما يلي الطريقتين الأكثر استعمالا.

**أ) طريقة المحدد (Method of Determinant)**

**نظرية 12-6.** *لتكن* $A\in M_n(R)$*. إذا كان* $\det(A)\neq 0$*، فإن*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}(\mathrm{com}A)^T \quad [4]$$

*بوضع* $\mathrm{adj}A=(\mathrm{com}A)^T$ [*]*، فإن*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}A \quad [5]$$

**أمثلة 12-21.** لنجد مقلوبي المصفوفتين التاليتين

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 235.

(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 9.25, p. 243.

(3) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 238.

(4) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 9.28, p. 246.

(*) الرمز "adj" أصله كلمة "adjoint matrix" والتي تعني "مصفوفة مساعدة".

(5) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 235-236.

- إيجاد $A^{-1}$ . لنتأكد أن $A$ قابلة للقلب.

لدينا

$$\begin{aligned}\det(A)&=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}\\&=(2.3)-(1.5)\\&=1\neq 0\end{aligned}$$

بما أن $\det(A)\neq 0$ ، فان $A$ قابلة للقلب وعليه

$$\begin{aligned}\mathrm{com}A&=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}|3| & (-1)^{1+2}|5|\\(-1)^{2+1}|1| & (-1)^{2+2}|2|\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}A&=(\mathrm{com}A)^T\\&=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}^T\\&=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

إذا

$$\begin{aligned}A^{-1}&=\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}A\\&=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- إيجاد $B^{-1}$ . لنتأكد أن $B$ قابلة للقلب.

لنحسب محدد $B$ باستعمال العمود الأول.

$$\begin{aligned}\det(B)&=\begin{vmatrix}1&5&-3\\0&3&1\\0&2&-1\end{vmatrix}\\&=(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}.0\begin{vmatrix}5&-3\\2&-1\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix}5&-3\\3&1\end{vmatrix}\\&=1\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}\\&=(3.-1)-(1.2)\\&=-5\neq 0\end{aligned}$$

بما أن $\det(B)\neq 0$ ، فإن $B$ قابلة للقلب وعليه

$$\text{com}B=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&3\\0&2\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&-3\\2&-1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-3\\0&-1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&5\\0&2\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&-3\\3&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-3\\0&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&5\\0&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&0&0\\-1&-1&-2\\14&-1&3\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\text{adj}B=(\text{com}B)^T$$

$$=\begin{pmatrix}-5&-1&14\\0&-1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

إذا

$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\text{adj}B$$

$$=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-5&-1&14\\0&-1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&1&-14\\0&1&1\\0&2&-3\end{pmatrix}$$

**ب) طريقة غوص–جوردان (Gauss-Jordan's Rule)**

*تعتمد هذه الطريقة على مجموعة عمليات تقام على أسطر المصفوفة وتتمثل في*

- *ضرب سطر بعدد ثابت غير معدوم.*
- *ضرب سطر بعدد ثابت غير معدوم وجمعه إلى سطر آخر.*
- *تبديل سطر بآخر.*

*ونجد مقلوب مصفوفة $A$ كما يلي*

$$(A|I_n)\underline{\textit{Gauss - Jordan}}(I_n|A^{-1})$$ [1]

**ملاحظة 12–6**

- يمكن أن نقوم بأكثر من عملية من العمليات المذكورة أعلاه في الوقت نفسه.
- يمكن أن تُقام العمليات السابقة على أعمدة المصفوفة.[2]

**أمثلة 12–22.** لنجد مقلوبي المصفوفتين الواردتين في الأمثلة 12–21 بطريقة غوص–جوردان، بحيث

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص ص. 100–101.

[2] نفسه، ص. 103.

$$B=\begin{pmatrix}1&5&-3\\0&3&1\\0&2&-1\end{pmatrix} \text{ ، } A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$$

- إيجاد $A^{-1}$

$$\begin{matrix}R_1^{(1)}\\R_2^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\5&3&0&1\end{array}\right)\to\begin{matrix}R_1^{(2)}=\frac{1}{2}R_1^{(1)}\\R_2^{(2)}=2R_2^{(1)}-5R_1^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-5&2\end{array}\right)$$

$$\to\begin{matrix}R_1^{(3)}=R_1^{(2)}-\frac{1}{2}R_2^{(2)}\\R_2^{(3)}=R_2^{(2)}\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-1\\0&1&-5&2\end{array}\right)$$

ومنه

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$

- إيجاد $B^{-1}$

$$\begin{matrix}R_1^{(1)}\\R_2^{(1)}\\R_3^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&-3&1&0&0\\0&3&1&0&1&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{matrix}R_1^{(2)}=R_1^{(1)}-R_2^{(1)}-R_3^{(1)}\\R_2^{(2)}=R_2^{(1)}-R_3^{(1)}\\R_3^{(2)}=2R_2^{(1)}-3R_3^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&1&-1&-1\\0&1&2&0&1&-1\\0&0&5&0&2&-3\end{array}\right)$$

$$\to\begin{matrix}R_1^{(3)}=R_1^{(2)}\\R_2^{(3)}=R_2^{(2)}\\R_3^{(3)}=\frac{1}{5}R_3^{(2)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&1&-1&-1\\0&1&2&0&1&-1\\0&0&1&0&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{array}\right)$$

$$\to\begin{matrix}R_1^{(4)}=R_1^{(3)}+3R_3^{(3)}\\R_2^{(4)}=R_2^{(3)}-2R_3^{(3)}\\R_3^{(4)}=R_3^{(3)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&\frac{1}{5}&-\frac{14}{5}\\0&1&0&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&0&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{array}\right)$$

ومنه

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{5}&-\frac{14}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&1&-14\\0&1&1\\0&2&-3\end{pmatrix}$$

## 6- تمارين

### 6-1- تمارين محلولة

**تمرين 12-1.** لدى شركة "إعمار" للبناء 10 مهندسين معماريين، 25 مهندسا مدنيا و300 عامل بناء.

إذا علمت أن الأجر الشهري للمهندس المعماري، المدني وعامل البناء على التوالي هو 70000 دج، 50000 دج و 30000 دج وأنهم يحصلون على منحة مردودية شهرية تقدر ب 10000 دج، 8000 دج و5000 دج على الترتيب، كما يتقاضون 1000 دج منحة للتنقل.

- باستعمال المصفوفات، عبر عن الأجر الشهري لموظفي الشركة، مجموع المنح الممنوحة لهم شهريا، مجمل ما يتقاضونه شهريا وكذا التكاليف النهائية للشركة شهريا عن رواتب موظفيها.

**الحل.** يمكن التعبير عن عدد موظفي الشركة بالمصفوفة التالية

$$A=\begin{pmatrix}10 & 25 & 300\end{pmatrix}$$

وعن الأجر الشهري للموظفين بالمصفوفة الآتية

$$B=\begin{pmatrix}70000\\50000\\30000\end{pmatrix}$$

وعن منحة المردودية بالمصفوفة التالية

$$C=\begin{pmatrix}10000\\8000\\5000\end{pmatrix}$$

أما منحة النقل فيمكن التعبير عنها بالمصفوفة الآتية

$$D=\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\end{pmatrix}$$

مجموع المنح الممنوحة للموظفين شهريا هي

$$E=C+D=\begin{pmatrix}10000\\8000\\5000\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}11000\\9000\\6000\end{pmatrix}$$

مجمل ما يتقاضاه كل موظف شهريا هو

$$F=B+E=\begin{pmatrix}70000\\50000\\30000\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11000\\9000\\6000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}81000\\59000\\36000\end{pmatrix}$$

تكاليف الشركة من الرواتب شهريا هي

$$G=AF=\begin{pmatrix}10 & 25 & 300\end{pmatrix}\begin{pmatrix}81000\\59000\\36000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}13085000\end{pmatrix}$$

إذا، تكاليف الشركة النهائية شهريا عن أجور موظفيها هي 13085000 دج.

**تمرين 12-2.** يقوم أحد المصانع المتخصصة بإنتاج ثلاثة أنواع من الحواسيب المحمولة بأحجام مختلفة في اليوم الواحد وعلى ثلاثة خطوط إنتاجية $A$ ، $B$ و $C$ كما هو موضح في الجدول التالي

| نوع الحواسيب / الخطوط المحمولة الإنتاجية | حجم صغير | حجم متوسط | حجم كبير |
|---|---|---|---|
| $A$ | 6 | 11 | 18 |
| $B$ | 10 | 14 | 20 |
| $C$ | 9 | 15 | 24 |

- أوجد كمية الإنتاج من الأنواع الثلاثة لمدة 15 يوما.

**الحل**. يمكن كتابة معطيات الجدول في مصفوفة الإنتاج التالية

$$T=\begin{pmatrix} 6 & 11 & 18 \\ 10 & 14 & 20 \\ 9 & 15 & 24 \end{pmatrix}$$

ومنه كمية الإنتاج من الأنواع الثلاثة لمدة 15 يوما تمثل المصفوفة $15T$، أي

$$15T=15\begin{pmatrix} 6 & 11 & 18 \\ 10 & 14 & 20 \\ 9 & 15 & 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 90 & 165 & 270 \\ 150 & 210 & 300 \\ 135 & 225 & 360 \end{pmatrix}$$

**تمرين 12-3**. شركة للأشغال العمومية، متخصصة في بناء الفيلات، العمارات ومنازل الاصطياف، تستعمل لذلك الاسمنت، الآجر، الخشب وساعات العمل كما هو موضح في الجدول التالي

| المواد الأولية / المبنى | الاسمنت (وحدة) | الآجر (وحدة) | الخشب (وحدة) | ساعات العمل (وحدة) | الحديد (وحدة) |
|---|---|---|---|---|---|
| فيلا | 25 | 10 | 9 | 21 | 4 |
| عمارة | 30 | 15 | 6 | 24 | 5 |
| منزل اصطياف | 28 | 9 | 8 | 19 | 3 |

- أوجد الكمية اللازمة لبناء 5 فيلات، 10 عمارات و 8 منازل اصطياف.

**الحل**. يمكن التعبير عن معطيات الجدول على شكل مصفوفة كما يلي

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 10 & 9 & 21 & 4 \\ 30 & 15 & 6 & 24 & 5 \\ 28 & 9 & 8 & 19 & 3 \end{pmatrix}$$

ويمكن التعبير عن العمل المنجز من قبل الشركة في المصفوفة التالية

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

وعليه، كمية المواد اللازمة الكلية هي

$$BA=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 10 & 9 & 21 & 4 \\ 30 & 15 & 6 & 24 & 5 \\ 28 & 9 & 8 & 19 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 649 & 272 & 169 & 497 & 94 \end{pmatrix}$$

أي، أن الشركة تحتاج 649 وحدة من الاسمنت، 272 وحدة من الآجر، 169 وحدة من الخشب، 497 وحدة من ساعات العمل و94 وحدة من الحديد لبناء فيلات، 10 عمارات و8 منازل اصطياف.

**تمرين 12-4.** في دائرة تتكون من ثلاث بلديات، تتنافس أربعة أحزاب للفوز بمقاعد في مجلس الدائرة. الجدول التالي يوضح نسب تفضيل كل حزب حسب البلديات وذلك من واقع خبرات سابقة.

| البلدية / الحزب | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.2 | 0.4 | 0.3 |
| 2 | 0.15 | 0.3 | 0.2 |
| 3 | 0.1 | 0.2 | 0.4 |
| 4 | 0.55 | 0.1 | 0.1 |

إذا علمت أن عدد سكان كل بلدية هو على الترتيب 5000، 8000 و 4000 نسمة، فما هي النتيجة المتوقعة للانتخابات ؟

**الحل.** يمكن التعبير عن معطيات الجدول على شكل مصفوفة كما يلي

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.15 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.55 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

ويمكن التعبير عن عدد سكان كل بلدية في المصفوفة التالية

$$B = \begin{pmatrix} 5000 \\ 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}$$

وعليه، عدد الأصوات المتوقعة للأحزاب الأربعة هو

$$AB = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.15 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.55 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5000 \\ 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5400 \\ 3950 \\ 3700 \\ 3950 \end{pmatrix}$$

ومنه، نتوقع حصول الحزب الأول على أكبر عدد من الأصوات. إذا، النتيجة المتوقعة هي فوز الحزب الأول.

**تمرين 12-5.** لدى شركة "كوندور" (Condor) أربعة محلات للبيع بالتجزئة في ولاية سعيدة. لدى المحل الأول 40 تلفازا، 12 ثلاجة و32 مكيف هواء والمحل الثاني به 32 تلفازا، 16 ثلاجة و28 مكيف هواء ويوجد 56 تلفازا، 24 ثلاجة و44 مكيف هواء بالمحل الثالث، أما المحل الرابع به 28 تلفازا، 12 ثلاجة و28 مكيف هواء.

1) عبر عن المخزون الحالي $I_1$ لدى المحلات الأربع في صيغة مصفوفة.

2) إذا أرسلت الشركة الأم إلى المحلات الفرعية التابعة لها ربع ما لدى هذه الأخيرة من مخزون، ما هو المستوى الجديد من المخزون $I_2$ ؟

3) إذا علمت أن المبيعات من أجهزة التلفاز، الثلاجات ومكيفات الهواء بلغت 20، 8 و12 على التوالي بالنسبة للمحل الأول و14، 9 و13 على الترتيب بالنسبة للمحل الثاني و30، 11 و20 على التوالي للمحل الثالث، أما بالنسبة للمحل الرابع فبلغت 10، 4 و15 على الترتيب.

أ) أوجد المستوى الجديد للمخزون $I_3$.

ب) إذا علمت أن سعر التلفاز هو 40000 دج وسعر الثلاجة هو 30000 دج، أما سعر مكيف الهواء هو 50000 دج. أوجد قيمة المخزون في المحل الثاني ثم في المحلات الأربع للشركة.

**الحل**

1) يمكن تلخيص المخزون الحالي للمحلات الأربع في الجدول التالي

| الأجهزة / المحلات | تلفاز | ثلاجة | مكيف هواء |
|---|---|---|---|
| المحل الأول | 40 | 12 | 32 |
| المحل الثاني | 32 | 16 | 28 |
| المحل الثالث | 56 | 24 | 44 |
| المحل الرابع | 28 | 12 | 28 |

كما يمكن التعبير عنه في صيغة مصفوفة $I_1$ كما يلي

$$I_1 = \begin{pmatrix} 40 & 12 & 32 \\ 32 & 16 & 28 \\ 56 & 24 & 44 \\ 28 & 12 & 28 \end{pmatrix}$$

2) الشركة الأم أرسلت ربع ما لدى المحلات الأربع من مخزون، أي $\frac{1}{4}I_1$ وعليه، المستوى الجديد من المخزون هو $I_2$

$$I_2 = I_1 + \frac{1}{4}I_1 = \frac{5}{4}I_1$$

$$= \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 40 & 12 & 32 \\ 32 & 16 & 28 \\ 56 & 24 & 44 \\ 28 & 12 & 28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 50 & 15 & 40 \\ 40 & 20 & 35 \\ 70 & 30 & 55 \\ 35 & 15 & 35 \end{pmatrix}$$

3) يمكن التعبير عن المبيعات للمحلات الأربع في صيغة مصفوفة $S$ كما يلي

$$S=\begin{pmatrix}20&8&12\\14&9&13\\30&11&20\\10&4&15\end{pmatrix}$$

أ) إيجاد المستوى الجديد للمخزون $I_3$. لدينا

$$I_3=I_2-S=\begin{pmatrix}50&15&40\\40&20&35\\70&30&55\\35&15&35\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}20&8&12\\14&9&13\\30&11&20\\10&4&15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}30&7&28\\26&11&22\\40&19&35\\25&11&20\end{pmatrix}$$

ب) إيجاد قيمة المخزون في المحل الثاني. لدينا

مستوى المخزون في المحل الثاني هو

$$I_4=\begin{pmatrix}26&11&22\end{pmatrix}$$

ويمكن التعبير عن سعر الأجهزة في المصفوفة التالية

$$P=\begin{pmatrix}40000\\30000\\50000\end{pmatrix}$$

وعليه، قيمة المخزون في المحل الثاني هي

$$V=I_4P=\begin{pmatrix}26&11&22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40000\\30000\\50000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2470000\end{pmatrix}DA$$

أما قيمة المخزون في المحلات الأربع للشركة هي

$$V'=I_3P=\begin{pmatrix}30&7&28\\26&11&22\\40&19&35\\25&11&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40000\\30000\\50000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2810000\\2470000\\3920000\\2330000\end{pmatrix}\begin{matrix}DA\\DA\\DA\\DA\end{matrix}$$

**تمرين 12-6.** تنتج شركة لمواد التنظيف أربعة أنواع من المنظفات على شكل سائل، مسحوق، صلب وبخاخ. احتياجات الوحدة الواحدة من كل نوع من مستلزمات الإنتاج موضحة في الجدول التالي

| نوع المنتج / مستلزمات الإنتاج | سائل | مسحوق | صلب | بخاخ |
|---|---|---|---|---|
| مواد خام | 6 | 4 | 5 | 3 |
| ساعات عمل | 8 | 6 | 9 | 4 |
| عناصر ثابتة | 20 | 13 | 10 | 8 |

إذا علمت أن سعر الوحدة الواحدة من المواد الخام، ساعات العمل والعناصر الثابتة هي على التوالي 4، 5 و3 وحدات نقدية وسعر بيع الوحدة الواحدة هي 300، 160، 120 و 200 وحدة نقدية لكل من المنظف السائل، المسحوق، الصلب والبخاخ على الترتيب وأن حجم الطلب على منتجات الشركة كانت على التوالي 90، 100، 180 و 200 وحدة لكل من المنظف السائل، المسحوق، الصلب والبخاخ، فأوجد الربح الكلي للشركة من بيع الكميات السابقة.

**الحل.** نعلم أن

الربح الكلي= الإيراد الكلي− التكلفة الكلية

– إيجاد الإيراد الكلي $TR$

الإيراد الكلي= سعر بيع الوحدة الواحدة × الكمية المباعة

يمكن التعبير عن سعر بيع الوحدة الواحدة من المنتجات السابقة بالمصفوفة التالية

$$P=\begin{pmatrix}300\\160\\120\\200\end{pmatrix} \text{ وحدة نقدية}$$

وعن الكمية المباعة أو حجم الطلب بالمصفوفة التالية

$$Q=\begin{pmatrix}90\\100\\180\\200\end{pmatrix} \text{ وحدة}$$

وعليه، الإيراد الكلي $TR$ هو

$$TR=P^TQ=\begin{pmatrix}300\\160\\120\\200\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}90\\100\\180\\200\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}300 & 160 & 120 & 200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}90\\100\\180\\200\end{pmatrix}$$

$$=(104600) \text{ وحدة نقدية}$$

– إيجاد التكلفة الكلية $TC$

لنجد أولا، تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع من المنتجات.

يمكن التعبير عن مستلزمات إنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع بالمصفوفة التالية

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 4 \\ 20 & 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

وعن سعر الوحدة الواحدة من مستلزمات الإنتاج بالمصفوفة التالية

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

وعليه، تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع= سعر الوحدة الواحدة من مستلزمات الإنتاج× احتياجات الوحدة الواحدة من كل نوع من مستلزمات الإنتاج، أي

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 4 \\ 20 & 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 4 \\ 20 & 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 124 & 85 & 95 & 56 \end{pmatrix} \text{ وحدة نقدية}$$

وعليه، التكلفة الكلية = تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة × الكمية المنتجة (أو حجم الطلب)، أي

$$TC = \begin{pmatrix} 124 & 85 & 95 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47960 \end{pmatrix} \text{ وحدة نقدية}$$

- إيجاد الربح الكلي $TP$. لدينا

$$\begin{aligned} TP &= TR - TC \\ &= (104600) - (47960) \\ &= (56640) \text{ وحدة نقدية} \end{aligned}$$

أي، الربح الكلي لهذه الشركة هو 56640 وحدة نقدية.

- يمكن إيجاد الربح الكلي بضرب الربح المتحصل عليه من بيع الوحدة الواحدة في الكمية المباعة.
- الربح المتحصل عليه من بيع الوحدة الواحدة= سعر بيع الوحدة الواحدة− تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة، أي

$$\begin{pmatrix} 300 \\ 160 \\ 120 \\ 200 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 124 & 85 & 95 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 & 160 & 120 & 200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 124 & 85 & 95 & 56 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 176 & 75 & 25 & 144 \end{pmatrix} \text{ وحدة نقدية}$$

وعليه، الربح الكلي هو

$$TP = \begin{pmatrix} 176 & 75 & 25 & 144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 56640 \end{pmatrix} \text{ وحدة نقدية}$$

**تمرين 12-7.** مصنع القمصان بسعيدة ينتج يوميا 30 وحدة من القمصان الرجالية، 40 وحدة من القمصان النسائية و15 وحدة من قمصان الأطفال. أسعار بيع الوحدة الواحدة من الأنواع السابقة هي على التوالي 16، 13 و12 وحدة نقدية، أما تكلفة الوحدة الواحدة من المنتجات السابقة فبلغت على الترتيب 12، 10 و8 وحدات نقدية.

- أوجد التكلفة الكلية، الإيراد والربح الكليين لمنتجات المصنع.

**الحل**

- إيجاد التكلفة الكلية $TC$

يمكن التعبير عن كمية الإنتاج بالمصفوفة التالية

$$Q=\begin{pmatrix}30\\40\\15\end{pmatrix} \text{ وحدة}$$

وتكلفة الوحدة الواحدة بالمصفوفة التالية

$$\begin{pmatrix}12\\10\\8\end{pmatrix}$$

وعليه، التكلفة الكلية $TC$ هي

$$TC=\begin{pmatrix}12\\10\\8\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}30\\40\\15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12 & 10 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\40\\15\end{pmatrix}$$

$$=(880) \text{ وحدة نقدية}$$

- إيجاد الإيراد الكلي $TR$

يمكن التعبير عن سعر بيع الوحدة الواحدة بالمصفوفة التالية

$$P=\begin{pmatrix}16\\13\\12\end{pmatrix} \text{ وحدة نقدية}$$

وعليه، الإيراد الكلي $TR$ هو

$$TR=P^TQ=\begin{pmatrix}16\\13\\12\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}30\\40\\15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}16 & 13 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\40\\15\end{pmatrix}$$

$$=(1180) \text{ وحدة نقدية}$$

- إيجاد الربح الكلي $TP$. لدينا

$$\begin{aligned} TP &= TR - TC \\ &= (1180) - (880) \\ &= (300) \text{ وحدة نقدية} \end{aligned}$$

أي، الربح الكلي للمصنع هو 300 وحدة نقدية.

- يمكن إيجاد الربح الكلي بضرب الربح المتحصل عليه من بيع الوحدة الواحدة في الكمية المباعة.
- الربح المتحصل عليه من بيع الوحدة الواحدة= سعر بيع الوحدة الواحدة− تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة، أي

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ وحدة نقدية}$$

وعليه، الربح الكلي هو

$$\begin{aligned} TP &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &= (300) \text{ وحدة نقدية} \end{aligned}$$

**تمرين 12−8.** المصفوفة التالية تمثل أسعار ثلاثة أنواع من الملابس $A$ ، $B$ و $C$ حسب الحجم.

$$X = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \text{صغير} \quad \text{كبير} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \text{ وحدة نقدية}$$

- أوجد ثمن الأنواع الثلاثة للملابس، إذا ارتفعت أسعارها بنسبة 50%.

**الحل.** مصفوفة الأسعار الجديدة هي

$$\begin{aligned} Y &= X + 0.5X = 1.5X \\ &= 1.5 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1.5 & 3 \\ 7.5 & 4.5 \end{pmatrix} \text{ وحدة نقدية} \end{aligned}$$

**تمرين 12−9.** للمنتج $x$ ( $y$ على التوالي) تكاليف ثابتة قدرها 1000 دج (700 دج على التوالي) وتكاليف متغيرة قدرها 100 دج (200 دج على التوالي) للوحدة الواحدة. إذا كان

$$C = \begin{pmatrix} 1000 & 100 \\ 700 & 200 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$$

حيث هي $C$ مصفوفة معامل التكلفة.

1) أحسب المصفوفة $CQ$ واشرح ماذا تمثل.

2) إذا كان المنتجان $x$ و $y$ يباعان على التوالي ب 180 دج و 240 دج للوحدة الواحدة، أوجد مصفوفة معامل الإيراد $R$.

3) أحسب المصفوفة $RQ-CQ$ واشرح ماذا تمثل.

**الحل**

1) حساب $CQ$. لدينا

$$\begin{aligned} CQ &= \begin{pmatrix} 1000 & 100 \\ 700 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1000+100q \\ 700+200q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

تمثل المصفوفة $CQ$ دالتي التكلفة الكلية للمنتجين $x$ و $y$، أي

$$TC_y(q)=700+200q \quad \text{و} \quad TC_x(q)=1000+100q$$

حيث $q$ عدد الوحدات المنتجة.

2) مصفوفة معامل الإيراد $R$ تعطى كما يلي

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 180 \\ 0 & 240 \end{pmatrix}$$

3) حساب المصفوفة $RQ-CQ$. لدينا

$$\begin{aligned} RQ &= \begin{pmatrix} 0 & 180 \\ 0 & 240 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 180q \\ 240q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} RQ-CQ &= \begin{pmatrix} 180q \\ 240q \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1000+100q \\ 700+200q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 80q-1000 \\ 40q-700 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

تمثل المصفوفة $RQ-CQ$ دالة الربح الكلي للمنتجين $x$ و $y$، أي $P=RQ-CQ$ وعليه

$$TP_y(q)=40q-700 \quad \text{و} \quad TP_x(q)=80q-1000$$

**تمرين 12-10.** تعطى دوال العرض والطلب لسلعة معينة وسلعة بديلة لها بالعلاقات التالية

$$\begin{aligned} Q_{d_1} &= 22+P_1+3P_2 \\ Q_{s_1} &= -4+3P_1 \\ Q_{d_2} &= 4+P_1 \\ Q_{s_2} &= -18+5P_2 \end{aligned}$$

- أوجد أسعار التوازن للسلعتين.

**الحل.** شرط التوازن للسلعة الأولى هو $Q_{d_1}=Q_{s_1}$، أي

$$Q_{d_1}=Q_{s_1}\Leftrightarrow 22+P_1+3P_2=-4+3P_1$$
$$\Leftrightarrow 2P_1-3P_2=26........(1)$$

وشرط التوازن للسلعة الثانية هو $Q_{d_2}=Q_{s_2}$ ، أي

$$Q_{d_2}=Q_{s_2}\Leftrightarrow 4+P_1=-18+5P_2$$
$$\Leftrightarrow -P_1+5P_2=22........(2)$$

وعليه، يمكن كتابة المعادلتين $(1)$ و$(2)$ على شكل مصفوفات كما يلي

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\ 22\end{pmatrix}\Leftrightarrow AP=B$$

حيث $P$ أسعار التوازن للسلعتين وعليه

$$P=A^{-1}B$$

إيجاد $A^{-1}$

لدينا $\det(A)=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=7\neq 0$ ومنه $A$ قابلة للقلب و $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}A$ ، بحيث

$$\mathrm{com}\,A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}|5| & (-1)^{1+2}|-1|\\ (-1)^{2+1}|-3| & (-1)^{2+2}|2|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}\,A=(\mathrm{com}A)^T=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

ومنه

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

وعليه

$$P=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26\\ 22\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}28\\ 10\end{pmatrix}$$

إذا، سعر التوازن للسلعة الأولى هو $P_1=28$ وحدة نقدية وسعر التوازن للسلعة الثانية هو $P_2=10$ وحدات نقدية.

**تمرين 12-11.** أسعار التوازن $P_1$ و $P_2$ لسلعتين تحقق جملة المعادلتين التاليتين

$$(I)\begin{cases}-4P_1+3P_2=35\\ 5P_1+P_2=75\end{cases}$$

- أوجد $P_1$ و $P_2$.

**الحل.** يمكن كتابة جملة المعادلتين $(I)$ على شكل مصفوفات كما يلي

$$(I)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\ 75\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow AP=B$$

بحيث $A=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ ، $P=\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}35\\ 75\end{pmatrix}$ وعليه مصفوفة أسعار التوازن تعطى بالعلاقة التالية

$$P=A^{-1}B$$

- إيجاد $A^{-1}$

لدينا $\det(A)=\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-19\neq 0$ ومنه $A$ قابلة للقلب و $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A$ ، بحيث

$$\operatorname{com} A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}|1| & (-1)^{1+2}|5|\\ (-1)^{2+1}|3| & (-1)^{2+2}|-4|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -3 & -4\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A=(\operatorname{com}A)^{T}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -5 & -4\end{pmatrix}$$

ومنه

$$A^{-1}=\frac{-1}{19}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -5 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

وعليه

$$P=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}35\\ 75\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}190\\ 475\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 25\end{pmatrix}$$

إذا، أسعار التوازن للسلعتين هي $P_1=10$ وحدات نقدية و $P_2=25$ وحدة نقدية.

**تمرين 12-12.** أحسب أثر ومنقول كل من المصفوفات التالية، ثم حدد نوع كل منها

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&-10\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-3&1&8\\0&7&11\\0&0&30\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}10&-6&8\\-6&4&1\\8&1&-5\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}5&0&0\\9&-18&0\\12&-3&4\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}0&13\\-13&0\end{pmatrix}$$

**الحل**

1) $tr(A)=\sum_{i=1}^{2}a_{ii}=a_{11}+a_{22}=1+1=2$ ، $A^T=A$ و $A=I_2$ مصفوفة الوحدة.

2) $tr(B)=\sum_{i=1}^{4}b_{ii}=b_{11}+b_{22}+b_{33}+b_{44}=0$ ، $B^T=B$ و $B=0_4$ المصفوفة المعدومة.

3) $tr(C)=\sum_{i=1}^{3}c_{ii}=c_{11}+c_{22}+c_{33}=2-4-10=-12$ ، $C^T=C$ و $C$ مصفوفة قطرية.

4) $tr(D)=\sum_{i=1}^{3}d_{ii}=d_{11}+d_{22}+d_{33}=-3+7+30=34$ ، $D^T=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&7&0\\8&11&30\end{pmatrix}$ و $D$ مصفوفة مثلثية علوية.

5) $tr(E)=\sum_{i=1}^{3}e_{ii}=e_{11}+e_{22}+e_{33}=10+4-5=9$ ، $E^T=E$ و $E$ مصفوفة تناظرية.

6) $tr(F)=\sum_{i=1}^{3}f_{ii}=f_{11}+f_{22}+f_{33}=5-18+4=-9$ ، $F^T=\begin{pmatrix}5&9&12\\0&-18&-3\\0&0&4\end{pmatrix}$ و $F$ مصفوفة مثلثية سفلية.

7) $tr(G)=\sum_{i=1}^{2} g_{ii}=g_{11}+g_{22}=0$ ، $G^T=\begin{pmatrix}0&-13\\13&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&13\\-13&0\end{pmatrix}=-G$ و $G$ مصفوفة ضد تناظرية.

**تمرين 12-13.** أحسب المحددات التالية

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&3\\-1&2\end{vmatrix}\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}4&0&-2\\-6&1&7\\2&3&0\end{vmatrix}\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}6&9&4&-2\\0&-3&8&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&5\end{vmatrix}\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&2&0\\-7&1&-4\end{vmatrix}\quad \Delta_5=\begin{vmatrix}2&0\\0&9\end{vmatrix}$$

**الحل**

1)

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&3\\-1&2\end{vmatrix}=(5.2)-(-1.3)=10-(-3)=13$$

2) باستخدام طريقة المحددات الصغرى بالنسبة للسطر الأول، نجد

$$\begin{aligned}\Delta_2&=(-1)^{1+1}.4\begin{vmatrix}1&7\\3&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.0\begin{vmatrix}-6&7\\2&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(-2)\begin{vmatrix}-6&1\\2&3\end{vmatrix}\\&=4\left[(1.0)-(7.3)\right]-2\left[(-6.3)-(1.2)\right]\\&=-44\end{aligned}$$

أو باستخدام طريقة سايروس، نجد

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4&0&-2\\-6&1&7\\2&3&0\end{vmatrix}=(4.1.0)+(-6.3.-2)+(2.0.7)-(-2.1.2)-(7.3.4)-(0.0.-6)$$

$$\begin{matrix}4&0&-2\\-6&1&7\end{matrix}$$

$$\Delta_2=0+36+0+4-84-0=-44$$

3) $\Delta_3=6.-3.1.5=-90$ لأن المصفوفة $\begin{pmatrix}6&9&4&-2\\0&-3&8&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$ مثلثية علوية.

4) $\Delta_4=1.2.-4=-8$ لأن المصفوفة $\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&0\\-7&1&-4\end{pmatrix}$ مثلثية سفلية.

5) $\Delta_5=2.9=18$ لأن المصفوفة $\begin{pmatrix}2&0\\0&9\end{pmatrix}$ قطرية.

**تمرين 12-14.** نعتبر في $M_3(R)$ المصفوفتين

$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\2&4&7\end{pmatrix}\qquad L=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\1&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

أحسب $ML$ و $LM$ واستنتج $M^{-1}$ و $L^{-1}$.

**الحل.** $ML=LM=I_3$ وعليه، نستنتج أن $M^{-1}=L$ و $L^{-1}=M$.

**تمرين 12-15.** لتكن $A\in M_3(R)$ ، بحيث

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- أحسب $2A-A^2$ واستنتج $A^{-1}$ .

**الحل**

- حساب $2A-A^2$ . لدينا

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$2A-A^2=2\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

وعليه $2A-A^2=I_3$

- استنتاج $A^{-1}$ . لدينا

$$\begin{aligned} 2A-A^2=I_3 &\Leftrightarrow A(2I_3-A)=I_3 \\ &\Leftrightarrow A^{-1}A(2I_3-A)=A^{-1}I_3 \\ &\Leftrightarrow I_3(2I_3-A)=A^{-1} \\ &\Leftrightarrow 2I_3-A=A^{-1} \end{aligned}$$

وعليه

$$A^{-1}=2I_3-A$$
$$=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذا

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**تمرين 12−16.** لتكن $A$ و $B$ مصفوفتين، بحيث

$$A=\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

– أحسب مقلوبي $A$ و $B$ بطريقتي المحدد وغوص−جوردان.

**الحل**

– حساب مقلوب $A$ بطريقة المحدد

لدينا $\det(A)=\begin{vmatrix}7&3\\2&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ ومنه $A$ قابلة للقلب و $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\text{adj}A$ ، بحيث

$$\text{com}\,A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}|1| & (-1)^{1+2}|2|\\ (-1)^{2+1}|3| & (-1)^{2+2}|7|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&7\end{pmatrix}$$

$$\text{adj}\,A=(\text{com}A)^T=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}$$

ومنه

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}$$

– حساب مقلوب $A$ بطريقة غوص−جوردان

$$\begin{matrix}R_1^{(1)}\\R_2^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}7&3&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\to\begin{matrix}R_1^{(2)}=R_1^{(1)}-3R_2^{(1)}\\R_2^{(2)}=7R_2^{(1)}-2R_1^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-3\\0&1&-2&7\end{array}\right)$$

ومنه

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}$$

– حساب مقلوب $B$ بطريقة المحدد. لدينا، باستعمال السطر الأول ل $B$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&0&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}.2\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.1\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}.0\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

ومنه $B$ قابلة للقلب و $B^{-1}=\dfrac{1}{\det(B)}\text{adj}B$ بحيث

$$\text{com}B=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&0\\2&-1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&1\\1&-2&0\\1&-2&-1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\text{adj}B=(\text{com}B)^T=\begin{pmatrix}-1&1&1\\3&-2&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

- حساب مقلوب $B$ بطريقة غوص–جوردان

$$\begin{array}{c} R_1^{(1)}\\ R_2^{(1)}\\ R_3^{(1)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\begin{array}{c} R_1^{(2)}=R_1^{(1)}-R_2^{(1)}\\ R_2^{(2)}=R_3^{(1)}-2R_2^{(1)}\\ R_3^{(2)}=R_1^{(1)}-R_3^{(1)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)$$

$$\to\begin{array}{c} R_1^{(3)}=R_1^{(2)}-R_2^{(2)}\\ R_2^{(3)}=R_2^{(2)}+3R_3^{(2)}\\ R_3^{(3)}=R_3^{(2)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)$$

$$\to\begin{array}{c} R_1^{(4)}=R_1^{(3)}-2R_3^{(3)}\\ R_2^{(4)}=R_2^{(3)}\\ R_3^{(4)}=R_3^{(3)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)$$

ومنه

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

### 6–2– تمارين للحل

**تمرين 12–17.** لتكن لدينا المصفوفتان $A$ و $B$، بحيث

$$A=\begin{pmatrix}13 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 19\\ -4 & 3 & 6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-10 & -2 & 4\\ 7 & 5 & 11\end{pmatrix}$$

1) أعط درجة كل من $A$ و $B$ .

2) اقرأ من المصفوفتين $A$ و $B$ العناصر التالية $a_{11},\ a_{23},\ a_{31},\ b_{12},\ b_{21},\ b_{23}$ .

**تمرين 12–18.** حدد نوع كل من المصفوفات التالية، ثم أحسب أثر ومنقول كل منها

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ -3 & 2 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 7 & -10\\ 1 & 7 & 0 & 6\\ 4 & -10 & 6 & -1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}23 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}17 & -15 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

**تمرين 12–19.** لتكن

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ -2 & 4 & 0\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -4\\ 0 & 3 & 7\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

أحسب $A+B$ ، $A-B$ ، $B-A$ و $3(B-A)$ .

**تمرين 12−20.** لتكن لدينا المصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أحسب أثر ومنقول كل مصفوفة إن أمكن.

2) أحسب كل الجداءات الممكنة لمصفوفتين من المصفوفات السابقة.

**تمرين 12−21.** أحسب المحددات التالية بطريقتين إن أمكن

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**تمرين 12−22.** لتكن لدينا المصفوفتان $A$ و $B$، بحيث

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

أحسب $AB$ و $BA$. ماذا تستنتج ؟

**تمرين 12−23.** أحسب مقلوبي المصفوفتين التاليتين بطريقتي المحدد وغوص−جوردان

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

# الفصل الثالث عشر

# جمل المعادلات

# الخطية

معظم النماذج الاقتصادية الخطية تؤدي إلى جمل معادلات خطية، نعتمد لحل هذه الأخيرة على المصفوفات لكونها تبسط وتسرع عملية الحساب.

## 1- الشكل المصفوف لجمل معادلات خطية

*لدينا m من المعادلات الخطية ب n مجهول (أو متغير) معطاة بالشكل العام التالي*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

*والذي يمكن كتابته على صيغة مصفوفات كما يلي*

$$AX = B$$

بحيث

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m,1} ، X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n,1} ، A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m,n}$$

*وتسمى $A$ مصفوفة المعاملات، $X$ مصفوفة المتغيرات (أو المجاهيل) و $B$ مصفوفة الثوابت.* [(1)]

*إذا كانت مصفوفة الثوابت معدومة، أي $B = 0_{m,1}$ فنقول أن الجملة $AX = B$ متجانسة (homogeneous).* [(2)]

## 2 - طرق حل جمل معادلات خطية

هناك عدة طرق لحل جمل معادلات خطية، من أشهرها، طريقة كرامر، مقلوب مصفوفة، غوص-جوردان، غوص وطريقة رتبة مصفوفة.

### 2-1- طريقة كرامر (Cramer's Rule)

**نظرية 13-1.** *لتكن $AX = B$ جملة معادلات خطية. إذا كانت المصفوفة $A$ مربعة أي $(m = n)$، فنقول أن الجملة $AX = B$ لكرامر*[(3)] *وإذا كان $|A| \neq 0$ فإن للجملة حل وحيد هو $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$، بحيث*

$$\forall i = \overline{1,n} : x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

*مع $A_i$ هي مصفوفة من درجة $A$، تنتج من حذف عناصر العمود $i$ من المصفوفة $A$ وإبدالها بعناصر مصفوفة العمود $B$.*[(4)]

**أمثلة 13-1.** لنحل الجملة التالية بطريقة كرامر

$$(I)\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 251.

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 229.

(3) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 9.30, p. 254.

(4) Ibid. Proposition 9.37, p. 255.

لنكتب الجملة $(I)$ على شكل مصفوفات

$$(I) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة $A$ مربعة، فالجملة $(I)$ لكرامر. نتأكد من وجود حل للجملة $(I)$ باستعمال محدد $A$، أي

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2.1) - (-1.1) = 3 \neq 0$$

ومنه الجملة $(I)$ لها حل وحيد هو $X = (x, y)^T$، بحيث

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3}$$

$$= \frac{(8.1) - (-1.1)}{3} = 3$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3}$$

$$= \frac{(2.1) - (8.1)}{3} = -2$$

ومنه

$$S = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

### 2-2- طريقة مقلوب مصفوفة

**نظرية 13-2.** *لتكن $AX = B$ جملة معادلات خطية. إذا كانت المصفوفة $A$ مربعة بحيث $|A| \neq 0$، فإن للجملة $AX = B$ حل وحيد هو $X = A^{-1}B$.*[1]

**أمثلة 13-2.** لنحل جملة المعادلات الخطية $(I)$ الواردة في الأمثلة 13-1 بطريقة مقلوب مصفوفة.

لدينا

$$(I) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة $A$ مربعة و $|A| = 3 \neq 0$، فإن $A$ قابلة للقلب والجملة $(I)$ لها حل وحيد هو $X = A^{-1}B$، بحيث

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A$$

مع $\operatorname{adj} A = (\operatorname{com} A)^T$، بحيث

$$\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|1| & (-1)^{1+2}|1| \\ (-1)^{2+1}|-1| & (-1)^{2+2}|2| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{com} A)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

---

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 266.

وعليه

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

ومنه

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$$

إذا

$$S=\left\{X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}\right\}$$

### 3-2- طريقة غوص-جوردان (Gauss-Jordan's Rule)

*لتكن $AX=B$ جملة معادلات خطية. إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة بحيث $\det(A)\neq 0$، فإن للجملة $AX=B$ حل وحيد، نجده بإتباع الخطوات التالية*

*نضع المصفوفة $(A|B)$ ونطبق على أسطرها مجموعة عمليات من ضرب سطر بعدد ثابت غير معدوم أو جمع سطرين أو أكثر أو تبديل سطر بآخر بهدف تحويل المصفوفة $A$ إلى مصفوفة الوحدة $I_n$ ومصفوفة الثوابت $B$ إلى مصفوفة الحل $C$، أي*

$$(A|B)\,\underline{Gauss\text{-}Jordan}\,(I_n|C)$$

بحيث $X=C$.[1]

**أمثلة 3-13.** لنحل الجملة التالية بطريقة غوص-جوردان

$$(K)\begin{cases}2x+y+z=0\\ 3x-2y+3z=-5\\ x-2z=2\end{cases}$$

لنكتب الجملة $(K)$ على شكل مصفوفات، أي

$$(K)\Leftrightarrow AX=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -5\\ 2\end{pmatrix}$$

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 104.

لدينا

$$\left(A|B\right)\Leftrightarrow\begin{matrix}R_1^{(1)}\\R_2^{(1)}\\R_3^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&0\\3&-2&3&-5\\1&0&-2&2\end{array}\right)\to\begin{matrix}R_1^{(2)}=R_1^{(1)}\\R_2^{(2)}=3R_1^{(1)}-2R_2^{(1)}\\R_3^{(2)}=R_1^{(1)}-2R_3^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&0\\0&7&-3&10\\0&1&5&-4\end{array}\right)$$

$$\to\begin{matrix}R_1^{(3)}=R_1^{(2)}-R_3^{(2)}\\R_2^{(3)}=5R_2^{(2)}+3R_3^{(2)}\\R_3^{(3)}=R_2^{(2)}-7R_3^{(2)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-4&4\\0&38&0&38\\0&0&-38&38\end{array}\right)$$

$$\to\begin{matrix}R_1^{(4)}=\frac{1}{2}R_1^{(3)}\\R_2^{(4)}=\frac{1}{38}R_2^{(3)}\\R_3^{(4)}=-\frac{1}{38}R_3^{(3)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\to\begin{matrix}R_1^{(5)}=R_1^{(4)}+2R_3^{(4)}\\R_2^{(5)}=R_2^{(4)}\\R_3^{(5)}=R_3^{(4)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

ومنه

$$S=\left\{C=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

## 2-4- طريقة غوص أو العنصر المحوري لغوص (Gaussian method or Gauss's pivot)

*لدينا جملة معادلات خطية ب n معادلة و n مجهول على الشكل التالي*

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AX=B$$

*هدف طريقة غوص (أو العنصر المحوري لغوص) هو تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية علوية للحصول على الجملة $A'X=B'$ المكافئة(*) للجملة $AX=B$ .[1]*

- *نفرض أن $a_{11}\neq 0$ والذي يسمى العنصر المحوري (pivot).*
- *المرحلة الأولى. لدينا المصفوفة $\left(A|B\right)=\left(A^{(1)}|B^{(1)}\right)$ . نحافظ على السطر الأول للمصفوفة $\left(A^{(1)}|B^{(1)}\right)$ والذي يسمى سطر العنصر المحوري $a_{11}=a_{11}^{(1)}$ ونحاول جعل عناصر العمود الأول ل $A^{(1)}$ أصفارا عدا العنصر المحوري $a_{11}^{(1)}$ (أي جعل معاملات المجهول $x_1$ في الأسطر من 2 إلى n أصفارا) وذلك بضرب عناصر سطر العنصر المحوري بعدد ثابت غير معدوم و(أو) جمعه لسطر آخر، أو يمكن أن نطرح من الأسطر من 2 إلى n سطر العنصر المحوري مضروبا بالعدد $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ مع $i=2,\ldots,n$. نسمي $\left(A^{(2)}|B^{(2)}\right)$ المصفوفة الناتجة عن هذه العمليات، بحيث*

---

(*) نقول أن الجملتين $AX=B$ و $A'X=B'$ متكافئتان إذا كان لهما الحل نفسه.

[1] Guillaume Legendre. *Méthodes numériques*. PSL Research University, 2013, p. 46.

$$i,j=2,\ldots,n \text{ مع } b_i^{(2)}=b_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1 \text{ و } a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$$

والجملة $A^{(2)}X=B^{(2)}$ مكافئة للجملة $AX=B$.

- المرحلة الثانية. نفرض أن $a_{22}^{(2)}\neq 0$ ويسمى العنصر المحوري للمرحلة الثانية. نحافظ على السطرين الأول والثاني للمصفوفة $\left(A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right)$ والعمود الأول ل $A^{(2)}$ ونحاول جعل عناصر العمود الثاني ل $A^{(2)}$ تحت العنصر المحوري $a_{22}^{(2)}$ أصفارا (أي جعل معاملات المجهول $x_2$ في الأسطر من 3 إلى n أصفار) وذلك بضرب عناصر سطر العنصر المحوري $a_{22}^{(2)}$ بعدد ثابت غير معدوم و(أو) جمعه لسطر آخر.[1]
- نكرر العملية السابقة نفسها مع فرضية $a_{kk}^{(k)}\neq 0$ مع $k=1,\ldots,n-1$، لنحصل على متتالية منتهية من المصفوفات $A^{(k)}$، $2\le k\le n$، ذات العبارة

$$A^{(k)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & & & & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

وفي المرحلة n، نحصل على الجملة المثلثية العلوية $A^{(n)}X=B^{(n)}$ المكافئة للجملة $AX=B$. تسمى العناصر $a_{kk}^{(k)}$، $k=1,\ldots,n-1$ بالعناصر المحورية التي نفرض أنها غير معدومة في كل مرحلة k.

- يمكن الانتقال من المرحلة $k$ إلى المرحلة $k+1$ باستعمال العلاقات التالية

$$i,j=k+1,\ldots,n \text{ مع } b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}b_k^{(k)} \text{ و } a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}a_{kj}^{(k)} \quad [2]$$

**ملاحظة 13-1.** إذا كان العنصر المحوري لمرحلة معينة معدوما أو قيمته صغيرة جدا، فيجب تغيير سطر (أو عمود) العنصر المحوري بأحد الأسطر (أو الأعمدة) التي تليه بحيث يكون العنصر المحوري الجديد غير معدوم.[3]

**أمثلة 13-4.** لنحل الجملة التالية بطريقة غوص

$$(I)\begin{cases}3x+2y+z-2=0\\4x-3y-2z-4=0\\x+5y+3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y+z=2\\4x-3y-2z=4\\x+5y+3z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&2&1\\4&-3&-2\\1&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AX=B$$

---

[1] Guillaume Legendre. Op. Cit, p. 47.
[2] Ibid, p. 47.
[3] Ibid, pp. 48-49.

- المرحلة الأولى. لدينا

$$\left(A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right)=\left(A\middle|B\right)=\begin{array}{c} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \\ R_3^{(1)} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

العنصر المحوري هو $a_{11}^{(1)}=3\neq 0$. نحافظ على السطر الأول للمصفوفة $\left(A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right)$ ونجعل عناصر العمود الأول ل $A^{(1)}$ أصفارا عدا العنصر المحوري $a_{11}^{(1)}=3$، كما يلي

$$\begin{array}{r} R_1^{(2)}=R_1^{(1)} \\ R_2^{(2)}=4R_1^{(1)}-3R_2^{(1)} \\ R_3^{(2)}=R_1^{(1)}-3R_3^{(1)} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 17 & 10 & -4 \\ 0 & -13 & -8 & 2 \end{array}\right)=\left(A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right)$$

المرحلة الثانية. العنصر المحوري هو $a_{22}^{(2)}=17\neq 0$. نحافظ على السطرين الأول والثاني للمصفوفة $\left(A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right)$ والعمود الأول ل $A^{(2)}$ ونجعل عناصر العمود الثاني ل $A^{(2)}$ أصفارا تحت العنصر المحوري $a_{22}^{(2)}=17$، كما يلي

$$\begin{array}{r} R_1^{(3)}=R_1^{(2)} \\ R_2^{(3)}=R_2^{(2)} \\ R_3^{(3)}=13R_2^{(2)}+17R_3^{(2)} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 17 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)=\left(A^{(3)}\middle|B^{(3)}\right)$$

- المرحلة الثالثة. العنصر المحوري هو $a_{33}^{(3)}=-6\neq 0$. نلاحظ أن الجملة $A^{(3)}X=B^{(3)}$ مثلثية علوية ومكافئة للجملة $AX=B$، بحيث

$$A^{(3)}X=B^{(3)}\Leftrightarrow\begin{cases} 3x+2y+z=2 \\ 17y+10z=-4 \\ -6z=-18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

إذا

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

**-مقارنة بين طريقتي كرامر وغوص**

- تُستعمل طريقتي كرامر وغوص لحل جمل معادلات خطية من الدرجة $n\times n$.
- تتميز طريقة كرامر بإعطاء العبارة المباشرة لحل جملة معادلات خطية، لكنها تحتاج لحساب $n+1$ محدد من الدرجة $n$ وبالمُجمل، تحتاج هذه الطريقة إلى $(n+1)!$ عملية جمع وطرح و $(n+2)!$ عملية ضرب و $n$ عملية قسمة، في حين تتميز طريقة غوص بالسرعة، فلحل جملة من الدرجة $n\times n$، تحتاج هذه الطريقة إلى $\frac{n^3}{3}$ عملية جمع وطرح و $\frac{n^3}{3}$ عملية ضرب و $\frac{n^2}{2}$ عملية قسمة، فمثلا من أجل حل جملة

من الدرجة $n=10$، تحتاج طريقة غوص إلى 700 عملية (جمع، طرح، ضرب وقسمة)، في حين تحتاج طريقة كرامر لحل الجملة نفسها إلى 479000000 عملية!

- عمليا، تُستعمل طريقة كرامر لحل جمل معادلات خطية من الدرجة $2\times 2$ أو $3\times 3$ على الأكثر.[1]

### 2-5- طريقة رتبة مصفوفة (Method of Rank of a Matrix)

*في الطرق الأربع السابقة، تطرقنا إلى حل جمل معادلات خطية $AX=B$ من الدرجة $n\times n$، أي ب $n$ معادلة و $n$ مجهول، لكن يمكن تعميم طريقة غوص لحل جمل معادلات خطية ب $m$ معادلة و $n$ مجهول بحيث $m\neq n$ وذلك بتحديد رتبة المصفوفة $A$ مهما كانت درجتها، بحيث $\operatorname{rank}(A|B)=\operatorname{rank}(A)=r$.*[2]

*وتُحدد رتبة المصفوفة $A$ بعدد أعمدتها المستقلة خطيا أو بعدد أسطرها أو أعمدتها غير المعدومة بعد تحويلات غوص*[*]*، بحيث $\operatorname{rank}(A)=r\leq\min(m,n)$ ويعتمد عدد حلول الجملة $AX=B$ على رتبة المصفوفة $A$ كما يلي*

- *إذا كان $r=m<n$، فإن الجملة $AX=B$ لها حل على الأقل.*[3]
- *إذا كان $r=n<m$، فإن الجملة $AX=B$ لها حل وحيد إن كان موجودا.*
- *إذا كان $r=n=m$، فإن الجملة $AX=B$ لها حل وحيد.*
- *إذا كان $r<m$ و $r<n$، فإن طريقة غوص تؤدي إلى $m-r$ أو $n-r$ معادلة من الشكل $0=0$ وفي هذه الحالة فإن الجملة $AX=B$ لها مالا نهاية من الحلول وفي حالة العكس فالجملة ليس لها حل.*[4]

**أمثلة 5-13.** لنحل الجملة التالية بطريقة رتبة مصفوفة

$$(I)\begin{cases}x+3y+z=-1\\2x+y-z=-8\\-x-4y+2z=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&-1\\-1&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\\7\end{pmatrix}\Leftrightarrow AX=B$$

لإيجاد رتبة الجملة $(I)$ نطبق طريقة غوص على المصفوفة $(A|B)$ كما يلي

$$\left(A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right)=\left(A|B\right)=\begin{matrix}R_1^{(1)}\\R_2^{(1)}\\R_3^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&-1\\2&1&-1&-8\\-1&-4&2&7\end{array}\right)$$

العنصر المحوري $a_{11}^{(1)}=1\neq 0$ وعليه

$$\begin{matrix}R_1^{(2)}=R_1^{(1)}\\R_2^{(2)}=2R_1^{(1)}-R_2^{(1)}\\R_3^{(2)}=R_1^{(1)}+R_3^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&-1\\0&5&3&6\\0&-1&3&6\end{array}\right)=\left(A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{22}^{(2)}=5\neq 0$ وعليه

$$\begin{matrix}R_1^{(3)}=R_1^{(2)}\\R_2^{(3)}=R_2^{(2)}\\R_3^{(3)}=R_2^{(2)}+5R_3^{(2)}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&-1\\0&5&3&6\\0&0&18&36\end{array}\right)=\left(A^{(3)}\middle|B^{(3)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{33}^{(3)}=18\neq 0$.

---

[1] Guillaume Legendre. Op. Cit, p. 49.
[2] Ibid, p. 50.
[*] يُقصد ب " تحويلات غوص" مجموعة العمليات التي تقام على المصفوفة لجعلها مثلثية علوية حسب طريقة غوص.
[3] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 9.35, p. 252.
[4] Ibid, p. 253.

بما أن عدد أسطر $A$ غير المعدومة بعد تحويلات غوص هو 3، فإن $\text{rank}(A)=r=m=n=3$ وعليه الجملة $(I)$ لها حل وحيد.

– الجملة $A^{(3)}X=B^{(3)}$ مكافئة للجملة $AX=B$، بحيث

$$A^{(3)}X=B^{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+z=-1 \\ 5y+3z=6 \\ 18z=36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

إذا

$$S=\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

## 3- تطبيقات اقتصادية: نموذج المدخلات-المخرجات

## (Economic Applications : Input-Output Model)

*نموذج المدخلات-المخرجات أو ما يُعرف ب المستخدم-المنتج من أهم الأساليب الرياضية المعتمدة في تحليل العلاقة بين قطاعات اقتصادية معينة سواء فيما بينها أو مع القطاع الخارجي.*

*أول من اقترح هذا النموذج هو الاقتصادي الأمريكي (روسي الأصل) وسيلي ليونتيف ( Wassily Leontief) عام 1941 وذلك تطبيقا على الاقتصاد الأمريكي في الفترة 1919-1939 ويُستخدم هذا النموذج للتنسيق بين أهداف الخطة الاقتصادية، بحيث يمكن تحقيقها دون حدوث عجز في الإنتاج أو فائض في المخزون.*

*تنظم جداول المدخلات-المخرجات العلاقة بين الكميات من السلع المختلفة التي تدخل كسلعة وسيطة من إنتاج سلعة أخرى وتسمى بالمدخلات وبين الكميات المنتجة من هذه السلعة وتسمى بالمخرجات[1] وهذا ما يوضحه الجدول التالي*

| المخرجات / المدخلات | | القطاعات المستهلكة (المستخدمة) | | | | | الطلب النهائي $(D_i)$ | الإنتاج الكلي $(X_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | .... | $n$ | | |
| القطاعات المنتجة | 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | .... | $X_{1n}$ | $D_1$ | $X_1$ |
| | 2 | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{23}$ | .... | $X_{2n}$ | $D_2$ | $X_2$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $n$ | $X_{n1}$ | $X_{n2}$ | $X_{n3}$ | .... | $X_{nn}$ | $D_n$ | $X_n$ |
| القيمة المضافة $(V_j)$ | | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | .... | $V_n$ | $\sum_{i=1}^{n} D_i=\sum_{j=1}^{n} V_j$ | – |
| الإنتاج الكلي $(X_j)$ | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | .... | $X_n$ | – | $\sum_{i=1}^{n} X_i=\sum_{j=1}^{n} X_j$ |

***جدول 13-1- جدول المدخلات-المخرجات***

[1] عقيل جاسم عبد الله، إبراهيم غبريال. المرجع السابق، ص ص. 156-157.

بحيث

$X_i$: الإنتاج الكلي للقطاع المنتج $(i)$.

$D_i$: الطلب النهائي على القطاع المنتج $(i)$ ويمثل الإنتاج الذي يُسوق إلى السوق.

$X_j$: الإنتاج الكلي للقطاع المستهلك $(j)$.

$V_j$: القيمة المضافة في القطاع المستهلك $(j)$ وتمثل الفرق بين قيمة إنتاج هذا القطاع وقيمة ما استخدمه من منتجات القطاعات الأخرى.(1)

**-مصفوفة المعاملات الفنية (التكنولوجية) (The Technical Coefficient Martix)**

تُعرف المعاملات الفنية (التكنولوجية) بأنها المقادير اللازمة لإنتاج وحدة واحدة في قطاع معين بالاعتماد على منتجات القطاعات الأخرى ويُرمز لها بالرمز $a_{ij}$ ونكتب

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}, \quad i, j = \overline{1, n}$$

وعليه، تكون مصفوفة المعاملات الفنية على النحو التالي

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ (2)

وعليه، يمكن التعبير عن الإنتاج الكلي للقطاع المنتج $(i)$ بالعلاقة التالية

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + D_i, \quad i = \overline{1, n}$$

ومنه، الإنتاج الكلي للقطاعات المنتجة تمثل بالنموذج التالي

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + D_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + D_2 \\ \vdots \\ X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + D_n \end{cases}$$

ويمكن كتابة جملة المعادلات الخطية السابقة على شكل مصفوفات كما يلي

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$$

ونكتب اختصارا

$$X = AX + D$$

حيث: $A$ مصفوفة المعاملات الفنية، $X$ مصفوفة الإنتاج الكلي و $D$ مصفوفة الطلب النهائي.

يُطلق على النموذج $X = AX + D$ نموذج ليونتيف المفتوح *(Open Leontief Model)* وذلك لأنه توجد منتجات زادت عن حاجة قطاعات الاقتصاد وكانت معدة للاستهلاك أو التصدير وبالمقابل إذا كان إنتاج الاقتصاد يكفي

(1) حسن ياسين طعمة. *الرياضيات للاقتصاد والعلوم الإدارية والمالية*. دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان-الأردن، 2010، ص ص. 149-150.

(2) نفسه، ص. 150.

فقط حاجات قطاعاته، فإن هذا الأخير يسمى بنموذج ليونتيف المغلق *(Closed Leontief Model)* ويأخذ الصيغة $X = AX$ ، أي مصفوفة الطلب النهائي $D = 0$ .[1]

ويمكن إعادة كتابة نموذج ليونتيف المفتوح كما يلي

$$\begin{aligned} X = AX + D &\Leftrightarrow X - AX = D \\ &\Leftrightarrow (I_n - A)X = D \\ &\Leftrightarrow (I_n - A)^{-1}(I_n - A)X = (I_n - A)^{-1}D \\ &\Leftrightarrow X = (I_n - A)^{-1}D \end{aligned}$$

حيث: $I_n$ مصفوفة الوحدة من الدرجة $n$، $I_n - A$ المصفوفة التقنية *(Technical Matrix)* أو مصفوفة ليونتيف *(Leontief Matrix)* وتُستخدم الصيغة الأخيرة لإيجاد حجم الإنتاج الكلي $X$ لقطاعات اقتصاد معين.[2]

**أمثلة 13-6.** لتكن لدينا المعلومات التالية عن اقتصاد بسيط مكون من قطاعي الزراعة $(X_1)$ والصناعة $(X_2)$

| المخرجات / المدخلات | | القطاعات المستهلكة $X_1$ | $X_2$ | الطلب النهائي $(D_i)$ | الإنتاج الكلي $(X_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| القطاعات المنتجة | $X_1$ | 70 | 90 | 40 | 200 |
| | $X_2$ | 120 | 80 | 100 | 300 |
| القيمة المضافة | $(V_j)$ | 10 | 130 | 140 | – |
| الإنتاج الكلي | $(X_j)$ | 200 | 300 | – | 500 |

أوجد ما يلي

1) مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج.

2) مصفوفة ليونتيف للاقتصاد المذكور.

3) حجم الإنتاج الكلي للقطاعين لتحقيق الطلب النهائي.

**الحل**

1) إيجاد مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج $A$ . لدينا

$$\begin{aligned} A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 2} &= \left(\frac{X_{ij}}{X_j}\right)_{1\le i,j\le 2} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{X_{11}}{X_1} & \frac{X_{12}}{X_2} \\ \frac{X_{21}}{X_1} & \frac{X_{22}}{X_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{70}{200} & \frac{90}{300} \\ \frac{120}{200} & \frac{80}{300} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.35 & 0.3 \\ 0.6 & 0.26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 467-468.

[2] حسن ياسين طعمة. المرجع السابق، ص. 152.

2) إيجاد مصفوفة ليونتيف $(I_2 - A)$. لدينا

$$I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.35 & 0.3 \\ 0.6 & 0.26 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.65 & -0.3 \\ -0.6 & 0.74 \end{pmatrix}$$

3) إيجاد حجم الإنتاج الكلي للقطاعين $X$. لدينا

$$X = (I_2 - A)^{-1} D$$
$$= \begin{pmatrix} 0.65 & -0.3 \\ -0.6 & 0.74 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix}$$

– إيجاد $(I_2 - A)^{-1}$. لدينا

$$\det(I_2 - A) = \begin{vmatrix} 0.65 & -0.3 \\ -0.6 & 0.74 \end{vmatrix}$$
$$= 0.2945 \neq 0$$

بما أن $\det(I_2 - A) \neq 0$، فان $(I_2 - A)$ قابلة للقلب وعليه

$$\operatorname{com}(I_2 - A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|0.74| & (-1)^{1+2}|-0.6| \\ (-1)^{2+1}|-0.3| & (-1)^{2+2}|0.65| \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.74 & 0.6 \\ 0.3 & 0.65 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\operatorname{adj}(I_2 - A) = \left(\operatorname{com}(I_2 - A)\right)^T$$
$$= \begin{pmatrix} 0.74 & 0.6 \\ 0.3 & 0.65 \end{pmatrix}^T$$
$$= \begin{pmatrix} 0.74 & 0.3 \\ 0.6 & 0.65 \end{pmatrix}$$

إذا

$$(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{\det(I_2 - A)} \operatorname{adj}(I_2 - A)$$
$$= \frac{1}{0.2945} \begin{pmatrix} 0.74 & 0.3 \\ 0.6 & 0.65 \end{pmatrix}$$

إذا

$$X = \frac{1}{0.2945} \begin{pmatrix} 0.74 & 0.3 \\ 0.6 & 0.65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{0.2945} \begin{pmatrix} 59.2 \\ 89 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 201 \\ 302 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

ومنه، حجم الإنتاج الكلي الواجب لتحقيق الطلب النهائي هو 200 وحدة لقطاع الزراعة و300 وحدة لقطاع الصناعة.

نلاحظ أن قيم الإنتاج لكلا القطاعين قريبة جدا من معطيات الجدول السابق.

## 4- تمارين

### 4-1- تمارين محلولة

**تمرين 13-1.** تقوم شركة للأثاث بإنتاج ثلاثة أنواع من المكاتب وتستخدم لذلك مواد أولية من خشب ومعدن وساعات عمل، فإذا كان إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول يحتاج إلى وحدتي خشب، 3 وحدات معدن و5 وحدات عمل. إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الثاني يحتاج إلى 4 وحدات خشب، 6 وحدات معدن و3 وحدات عمل، أما إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الثالث يحتاج إلى 7 وحدات خشب، وحدة واحدة معدن ووحدتي عمل، فإذا أفادت إدارة المخازن بأن المتاح لديها من هذه المواد الخام خلال الأسبوع القادم هو 285 وحدة خشب، 190 وحدة معدن و185 وحدة عمل.

- استخدم طريقتي كرامر ومقلوب مصفوفة لإيجاد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل نوع لاستغلال الموارد المتاحة.

**الحل.** يمكن وضع معطيات التمرين في الجدول التالي

| النوع / المواد الأولية | النوع الأول $x$ | النوع الثاني $y$ | النوع الثالث $z$ | الطاقة المتاحة |
|---|---|---|---|---|
| خشب | 2 | 4 | 7 | 285 |
| معدن | 3 | 6 | 1 | 190 |
| ساعات عمل | 5 | 3 | 2 | 185 |

كما يمكن وضعها في صورة معادلات كالتالي

$$(I)\begin{cases} 2x+4y+7z=285 \\ 3x+6y+z=190 \\ 5x+3y+2z=185 \end{cases}$$

ثم كتابتها على شكل مصفوفات كالأتي

$$(I)\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 285 \\ 190 \\ 185 \end{pmatrix}\Leftrightarrow AX=B$$

- حل الجملة $(I)$ بطريقة كرامر. باستعمال السطر الأول ل $A$، لدينا

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}.2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}.7\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-133\neq 0$$

ومنه الجملة $(I)$ لها حل وحيد هو $X=(x,y,z)^T$، بحيث

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=-\frac{1}{133}\begin{vmatrix}285&4&7\\190&6&1\\185&3&2\end{vmatrix}=-\frac{1}{133}\left[285\begin{vmatrix}6&1\\3&2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}190&1\\185&2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}190&6\\185&3\end{vmatrix}\right]=-\frac{1}{133}(-1995)=15$$

$$y=\frac{|A_2|}{|A|}=-\frac{1}{133}\begin{vmatrix}2&285&7\\3&190&1\\5&185&2\end{vmatrix}=-\frac{1}{133}\left[2\begin{vmatrix}190&1\\185&2\end{vmatrix}-285\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}3&190\\5&185\end{vmatrix}\right]=-\frac{1}{133}(-2660)=20$$

$$z=\frac{|A_3|}{|A|}=-\frac{1}{133}\begin{vmatrix}2&4&285\\3&6&190\\5&3&185\end{vmatrix}=-\frac{1}{133}\left[2\begin{vmatrix}6&190\\3&185\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}3&190\\5&185\end{vmatrix}+285\begin{vmatrix}3&6\\5&3\end{vmatrix}\right]=-\frac{1}{133}(-3325)=25$$

إذا

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\20\\25\end{pmatrix}\right\}$$

وعليه، على الشركة إنتاج 15 وحدة من النوع الأول و20 وحدة من النوع الثاني و25 وحدة من النوع الثالث لاستغلال الموارد المتاحة.

- حل الجملة $(I)$ بطريقة مقلوب مصفوفة. لدينا $X=A^{-1}B$ ، بحيث

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\text{adj}A$$

مع $\text{adj}A=(\text{com}A)^T$ ، بحيث

$$\text{com}A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6&1\\3&2\end{vmatrix}&(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}&(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&6\\5&3\end{vmatrix}\\(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4&7\\3&2\end{vmatrix}&(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&7\\5&2\end{vmatrix}&(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&4\\5&3\end{vmatrix}\\(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4&7\\6&1\end{vmatrix}&(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&7\\3&1\end{vmatrix}&(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&4\\3&6\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9&-1&-21\\13&-31&14\\-38&19&0\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\text{adj}A=(\text{com}A)^T=\begin{pmatrix}9&13&-38\\-1&-31&19\\-21&14&0\end{pmatrix}$$

وعليه

$$A^{-1}=-\frac{1}{133}\begin{pmatrix}9&13&-38\\-1&-31&19\\-21&14&0\end{pmatrix}$$

ومنه

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{133}\begin{pmatrix} 9 & 13 & -38 \\ -1 & -31 & 19 \\ -21 & 14 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 285 \\ 190 \\ 185 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$$

إذا

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} \right\}$$

**تمرين 13-2.** مصنع لإنتاج الإلكترونيات ينتج ثلاثة أنواع من شاشات التلفاز: شاشات عادية، متوسطة الجودة وشاشات عالية الجودة ويحتاج لذلك ثلاثة أقسام، فإذا كان إنتاج وحدة واحدة من النوع الأول يحتاج إلى 4 ساعات عمل في القسم الثاني وساعتي عمل في القسم الثالث وإنتاج وحدة واحدة من النوع الثاني يحتاج إلى 5، 7 و 1 ساعات عمل في الأقسام الأول، الثاني والثالث على الترتيب، بينما إنتاج وحدة واحدة من النوع الثالث يحتاج إلى 6، 8 و4 ساعات عمل في الأقسام الأول، الثاني والثالث على التوالي والطاقة المتاحة للأقسام الأول، الثاني والثالث هي على الترتيب: 210، 450 و150 ساعة عمل.

- حدد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من الأنواع الثلاثة لاستغلال الطاقة المتاحة بطريقتي غوص وغوص- جوردان.

**الحل.** يمكن وضع معطيات التمرين في الجدول التالي

| النوع / القسم | شاشات عادية $x$ | شاشات متوسطة الجودة $y$ | شاشات عالية الجودة $z$ | الطاقة المتاحة |
|---|---|---|---|---|
| القسم الأول | 0 | 5 | 6 | 210 |
| القسم الثاني | 4 | 7 | 8 | 450 |
| القسم الثالث | 2 | 1 | 4 | 150 |

كما يمكن وضعها في صورة معادلات كالتالي

$$(I)\begin{cases} 5y + 6z = 210 \\ 4x + 7y + 8z = 450 \\ 2x + y + 4z = 150 \end{cases}$$

ثم كتابتها على شكل مصفوفات كالأتي

$$(I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 450 \\ 150 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

- حل الجملة $(I)$ بطريقة غوص. لدينا

$$\left(A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right)=\left(A\middle|B\right)=\begin{array}{c}R_1^{(1)}\\R_2^{(1)}\\R_3^{(1)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}0&5&6&210\\4&7&8&450\\2&1&4&150\end{array}\right)$$

نلاحظ أن العنصر المحوري $a_{11}^{(1)}=0$ وعليه نقوم بتبديل السطرين الأول والثاني (أو الأول والثالث) ومنه

العنصر المحوري الجديد هو $a_{11}^{(1)}=4\neq 0$.

$$\left(A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right)=\begin{array}{c}R_1^{(1)}\\R_2^{(1)}\\R_3^{(1)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}4&7&8&450\\0&5&6&210\\2&1&4&150\end{array}\right)\to\begin{array}{c}R_1^{(2)}=R_1^{(1)}\\R_2^{(2)}=R_2^{(1)}\\R_3^{(2)}=R_1^{(1)}-2R_3^{(1)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}4&7&8&450\\0&5&6&210\\0&5&0&150\end{array}\right)=\left(A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{22}^{(2)}=5\neq 0$ وعليه

$$\begin{array}{c}R_1^{(3)}=R_1^{(2)}\\R_2^{(3)}=R_2^{(2)}\\R_3^{(3)}=R_2^{(2)}-R_3^{(2)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}4&7&8&450\\0&5&6&210\\0&0&6&60\end{array}\right)=\left(A^{(3)}\middle|B^{(3)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{33}^{(3)}=6\neq 0$.

- الجملة $A^{(3)}X=B^{(3)}$ مكافئة للجملة $AX=B$، بحيث

$$A^{(3)}X=B^{(3)}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+7y+8z=450\\5y+6z=210\\6z=60\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=40\\y=30\\z=10\end{cases}$$

إذا

$$S=\left\{\begin{pmatrix}40\\30\\10\end{pmatrix}\right\}$$

وعليه على المصنع إنتاج 40 وحدة من الشاشات العادية و30 وحدة من الشاشات متوسطة الجودة و10 وحدات من الشاشات عالية الجودة لاستغلال الطاقة المتاحة.

- حل الجملة $(I)$ بطريقة غوص–جوردان. لدينا

$$(A|B) \Leftrightarrow \begin{array}{c} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \\ R_3^{(1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 6 & 210 \\ 4 & 7 & 8 & 450 \\ 2 & 1 & 4 & 150 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} R_1^{(2)} = R_1^{(1)} + R_3^{(1)} \\ R_2^{(2)} = R_2^{(1)} - 2R_3^{(1)} \\ R_3^{(2)} = R_3^{(1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 10 & 360 \\ 0 & 5 & 0 & 150 \\ 2 & 1 & 4 & 150 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{c} R_1^{(3)} = \frac{1}{2} R_1^{(2)} \\ R_2^{(3)} = \frac{1}{5} R_2^{(2)} \\ R_3^{(3)} = R_1^{(2)} - R_3^{(2)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 180 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 5 & 6 & 210 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{c} R_1^{(4)} = R_1^{(3)} - 3R_2^{(3)} \\ R_2^{(4)} = R_2^{(3)} \\ R_3^{(4)} = R_3^{(3)} - 5R_2^{(3)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 6 & 60 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{c} R_1^{(5)} = R_1^{(4)} - \frac{5}{6} R_3^{(4)} \\ R_2^{(5)} = R_2^{(4)} \\ R_3^{(5)} = \frac{1}{6} R_3^{(4)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

ومنه

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$$

**تمرين 13–3.** أوجد السعر والكمية التوازنيين للنموذج التالي باستعمال طريقة كرامر.

$$(I)\begin{cases} Q_d + P = 50 \\ Q_s - P = -10 \end{cases}$$

**الحل.** لدينا في حالة التوازن $Q_d = Q_s = Q$ وعليه، يمكن كتابة النموذج السابق كما يلي

$$(I)\begin{cases} Q + P = 50 \\ Q - P = -10 \end{cases}$$

نكتب الجملة $(I)$ على شكل مصفوفات كالآتي

$$(I) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -10 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة $A$ مربعة، فالجملة $(I)$ لكرامر. نتأكد من وجود حل للجملة $(I)$ باستعمال محدد $A$، أي

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1.1) - (1.1) = -2 \neq 0$$

ومنه الجملة $(I)$ لها حل وحيد هو $X = (Q, P)^T$، بحيث

$$Q = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ -10 & -1 \end{vmatrix}}{-2}$$

$$= \frac{(-1.50) - (-10.1)}{-2} = 20$$

$$P=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 50\\ 1 & -10\end{vmatrix}}{-2}$$

$$=\frac{(-10.1)-(50.1)}{-2}=30$$

ومنه، كمية وسعر التوازن هما

$$P^*=30 \quad \text{و} \quad Q^*=20$$

**تمرين 13−4.** مدينة تحتوي على خطين للسكة الحديدية. في الخط الأول، القطارات تتكون من مقصورتين للدرجة الأولى وخمس مقصورات للدرجة الثانية وفي الخط الثاني، القطارات تتكون من ثلاث مقصورات للدرجة الأولى وأربع مقصورات للدرجة الثانية.

– باستعمال طريقة مقلوب مصفوفة، أوجد عدد القطارات التي يمكن صنعها في كلا الخطين باستخدام 510 مقصورة للدرجة الأولى و 960 مقصورة للدرجة الثانية.

**الحل.** المجاهيل هي

$x$ : عدد القطارات في الخط الأول.

$y$ : عدد القطارات في الخط الثاني.

يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلتين التاليتين

$$(J)\begin{cases}2x+3y=510\\ 5x+4y=960\end{cases}$$

نكتب الجملة $(J)$ على شكل مصفوفات كالآتي

$$(J)\Leftrightarrow AX=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}510\\ 960\end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة $A$ مربعة و $|A|=-7\neq 0$، فإن $A$ قابلة للقلب والجملة $(J)$ لها حل وحيد هو $X=A^{-1}B$، بحيث

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\text{adj}A$ مع $\text{adj}A=(\text{com}A)^T$، بحيث

$$\text{com}A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}|4| & (-1)^{1+2}|5|\\ (-1)^{2+1}|3| & (-1)^{2+2}|2|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\text{adj}A=(\text{com}A)^T=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

وعليه

$$A^{-1}=\frac{1}{-7}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$$

ومنه

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}510\\ 960\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120\\ 90\end{pmatrix}$$

إذا، يمكن صنع 120 قطارا في الخط الأول و 90 قطارا في الخط الثاني.

**تمرين 13−5.** مصنع ينتج سلعة معينة بطريقتين مختلفتين، دالة التكاليف الكلية لهذه السلعة هي

باستخدام الطريقة الأولى $TC = 200 + 20Q$

باستخدام الطريقة الثانية $TC = 700 + 10Q$

حيث $Q$ عدد الوحدات المنتجة.

- باستعمال طريقة غوص−جوردان، أوجد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة حتى تتساوى التكاليف الكلية للطريقتين.

**الحل.** يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلتين التاليتين

$$(K)\begin{cases} TC - 20Q = 200 \\ TC - 10Q = 700 \end{cases}$$

نكتب الجملة $(K)$ على شكل مصفوفات كالآتي

$$(K) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} TC \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 700 \end{pmatrix}$$

حسب طريقة غوص−جوردان، لدينا

$$(A|B)\underline{Gauss\text{-}Jordan}(I_2|C) \quad \text{بحيث} \quad X = C$$

لدينا

$$(A|B) \Leftrightarrow \begin{matrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -20 & 200 \\ 1 & -10 & 700 \end{array}\right) \to \begin{matrix} R_1^{(2)} = 2R_2^{(1)} - R_1^{(1)} \\ R_2^{(2)} = R_2^{(1)} - R_1^{(1)} \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1200 \\ 0 & 10 & 500 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{matrix} R_1^{(3)} = R_1^{(2)} \\ R_2^{(3)} = \frac{1}{10}R_2^{(2)} \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1200 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

ومنه

$$C = \begin{pmatrix} 1200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TC \\ Q \end{pmatrix}$$

إذا، حتى تتساوى التكاليف الكلية للطريقتين، يجب على المصنع إنتاج $Q = 50$ وحدة للحصول على تكلفة كلية $TC = 1200$ وحدة نقدية.

**تمرين 13−6.** مصنع للاجبان، يريد إنتاج نوع جديد يتكلف 1840 دج للكيلو غرام وذلك بخلط نوع كلفته 2000 دج للكيلو غرام مع نوع آخر كلفته 1600 دج للكيلو غرام. إذا علمت أن المصنع يريد إنتاج 100 كيلو غراما من النوع الجديد، أوجد عدد الكيلو غرامات من كلا النوعين الواجب خلطها وذلك بطريقة غوص.

**الحل.** المجاهيل هي

$x$ : عدد الكيلو غرامات من النوع الأول.

$y$ : عدد الكيلو غرامات من النوع الثاني.

يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلتين التاليتين

$$(L)\begin{cases} x + y = 100 \\ 2000x + 1600y = 1840(100) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 100 \\ 2000x + 1600y = 184000 \end{cases}$$

نكتب الجملة $(L)$ على شكل مصفوفات كالآتي

$$(L) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2000 & 1600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 184000 \end{pmatrix}$$

لدينا

$$\left(A^{(1)} \middle| B^{(1)}\right) = \left(A \middle| B\right) = \begin{matrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 2000 & 1600 & 184000 \end{array}\right)$$

نلاحظ أن العنصر المحوري $a_{11}^{(1)} = 1$ قيمته صغيرة جدا وعليه نقوم بتبديل السطرين الأول والثاني ومنه العنصر المحوري الجديد هو $a_{11}^{(1)} = 2000 \neq 0$.

$$\left(A^{(1)} \middle| B^{(1)}\right) = \begin{matrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 2000 & 1600 & 184000 \\ 1 & 1 & 100 \end{array}\right) \to \begin{matrix} R_1^{(2)} = R_1^{(1)} \\ R_2^{(2)} = R_1^{(1)} - 2000R_2^{(1)} \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 2000 & 1600 & 184000 \\ 0 & -400 & -16000 \end{array}\right) = \left(A^{(2)} \middle| B^{(2)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{22}^{(2)} = -400 \neq 0$ .

الجملة $A^{(2)}X = B^{(2)}$ مكافئة للجملة $AX = B$ ، بحيث

$$A^{(2)}X = B^{(2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2000x + 1600y = 184000 \\ -400y = -16000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 40 \end{cases}$$

إذا، على المصنع خلط 60 كيلو غراما من النوع الأول و40 كيلو غراما من النوع الثاني للحصول على 100 كيلو غرام من النوع الجديد.

**تمرين 13−7**. مصنع لإنتاج الأثاث، ينتج ثلاثة أنواع من المكاتب ويستخدم المزيج السلعي. تكلفة كل نوع من الخشب كانت على التوالي 125، 70 و 190 وحدة نقدية. إضافة إلى تكلفة الخشب، نجد أن النوع الأول يحتاج إلى 10% من إجمالي تكلفة النوع الثاني و 20% من إجمالي تكلفة النوع الثالث، النوع الثاني يحتاج إلى 25% من إجمالي تكلفة النوع الأول و 10% من إجمالي تكلفة النوع الثالث، أما النوع الثالث فيحتاج إلى 40% من إجمالي تكلفة النوع الأول و 20% من إجمالي تكلفة النوع الثاني.

- باستعمال طريقة رتبة مصفوفة، أحسب التكلفة الكلية لإنتاج 30 وحدة من النوع الأول، 20 وحدة من النوع الثاني و 10 وحدات من النوع الثالث.

**الحل**. المجاهيل هي

$x$ : التكلفة الإجمالية لإنتاج وحدة واحدة من النوع الأول.

$y$ : التكلفة الإجمالية لإنتاج وحدة واحدة من النوع الثاني.

$z$ : التكلفة الإجمالية لإنتاج وحدة واحدة من النوع الثالث.

يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلات التالية

$$(M)\begin{cases} x = 125 + 0.1y + 0.2z \\ y = 70 + 0.25x + 0.1z \\ z = 190 + 0.4x + 0.2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 3y - 6z = 3750 \\ -5x + 20y - 2z = 1400 \\ -4x - 2y + 10z = 1900 \end{cases}$$

نكتب الجملة $(M)$ على شكل مصفوفات كالآتي

$$(M) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 30 & -3 & -6 \\ -5 & 20 & -2 \\ -4 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3750 \\ 1400 \\ 1900 \end{pmatrix}$$

لإيجاد رتبة الجملة $(M)$ ، نطبق طريقة غوص على المصفوفة $(A|B)$ كما يلي

$$\left(A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right) = (A|B) = \begin{array}{c} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \\ R_3^{(1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & -3 & -6 & 3750 \\ -5 & 20 & -2 & 1400 \\ -4 & -2 & 10 & 1900 \end{array}\right)$$

العنصر المحوري $a_{11}^{(1)} = 30 \neq 0$ وعليه

$$\begin{array}{r} R_1^{(2)} = R_1^{(1)} \\ R_2^{(2)} = R_1^{(1)} + 6R_2^{(1)} \\ R_3^{(2)} = 2R_1^{(1)} + 15R_3^{(1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & -3 & -6 & 3750 \\ 0 & 117 & -18 & 12150 \\ 0 & -36 & 138 & 36000 \end{array}\right) = \left(A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{22}^{(2)} = 117 \neq 0$ وعليه

$$\begin{array}{r} R_1^{(3)} = R_1^{(2)} \\ R_2^{(3)} = R_2^{(2)} \\ R_3^{(3)} = 4R_2^{(2)} + 13R_3^{(2)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & -3 & -6 & 3750 \\ 0 & 117 & -18 & 12150 \\ 0 & 0 & 1722 & 516600 \end{array}\right) = \left(A^{(3)}\middle|B^{(3)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{33}^{(3)} = 1722$ .

بما أن عدد أسطر $A$ غير المعدومة بعد تحويلات غوص هو 3، فإن $\operatorname{rank}(A) = r = m = n = 3$ ، فإن للجملة $(M)$ حل وحيد.

الجملة $A^{(3)}X = B^{(3)}$ مكافئة للجملة $AX = B$ ، بحيث

$$A^{(3)}X = B^{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 3y - 6z = 3750 \\ 117y - 18z = 12150 \\ 1722z = 516600 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 150 \\ z = 300 \end{cases}$$

ومنه

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 30(200) \\ 20(150) \\ 10(300) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 3000 \\ 3000 \end{pmatrix} \right\}$$

إذا، التكلفة الكلية لإنتاج 30 وحدة من النوع الأول هي 6000 وحدة نقدية ولإنتاج 20 وحدة من النوع الثاني هي 3000 وحدة نقدية ولإنتاج 10 وحدات من النوع الثالث هي 3000 وحدة نقدية.

**تمرين 13-8.** مصنع القمصان بسعيدة، ينتج نوعين من الألبسة الجاهزة واحد للرجال وآخر للأطفال ويستخدم لذلك مواد أولية وساعات عمل. متطلبات إنتاج الوحدة الواحدة من النوعين وكذا المتاح من المواد الأولية وساعات العمل موضح في الجدول التالي.

| الطاقة المتاحة (وحدة) | أطفال | رجال | النوع / الاحتياجات |
|---|---|---|---|
| 200 | 4 | 3 | مواد أولية (وحدة) |
| 170 | 2 | 5 | ساعات عمل (وحدة) |

- إذا علمت أن سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية هو 3 وحدات نقدية وسعر الوحدة الواحدة من ساعات العمل هو 7 وحدات نقدية وأن المصنع يهدف إلى تحقيق ربح بنسبة 20% من التكلفة.
- استخدم طريقة مقلوب مصفوفة لإيجاد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كلا النوعين، تكلفة الوحدة الواحدة من كل نوع وكذا الربح الكلي للمصنع.

**الحل.** المجاهيل هي

$x$ : عدد الوحدات الواجب إنتاجها من القمصان للرجال.

$y$ : عدد الوحدات الواجب إنتاجها من القمصان للأطفال.

يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلتين التاليتين

$$(N)\begin{cases}3x+4y=200\\5x+2y=170\end{cases}$$

نكتب الجملة $(N)$ على شكل مصفوفات كالآتي

$$(N)\Leftrightarrow AX=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\170\end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة $A$ مربعة و $|A|=-14\neq 0$، فإن $A$ قابلة للقلب والجملة $(N)$ لها حل وحيد هو $X=A^{-1}B$، بحيث

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A$$ مع $\operatorname{adj}A=(\operatorname{com}A)^T$، بحيث

$$\operatorname{com}A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}|2| & (-1)^{1+2}|5|\\(-1)^{2+1}|4| & (-1)^{2+2}|3|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\-4&3\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\operatorname{adj}A=(\operatorname{com}A)^T=\begin{pmatrix}2&-4\\-5&3\end{pmatrix}$$

وعليه

$$A^{-1}=\frac{1}{-14}\begin{pmatrix}2&-4\\-5&3\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2&4\\5&-3\end{pmatrix}$$

ومنه

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2&4\\5&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\170\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\35\end{pmatrix}$$

إذا، على المصنع إنتاج 20 وحدة من قمصان الرجال و 35 وحدة من قمصان الأطفال.

- تكلفة الوحدة الواحدة من النوع الأول (رجال)$=3(3)+5(7)=44$ وحدة نقدية.

- تكلفة الوحدة الواحدة من النوع الثاني (أطفال)= $4(3)+2(7)=26$ وحدة نقدية.
- ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول (رجال)= $0.2(44)=8.8$ وحدة نقدية.
- ربح الوحدة الواحدة من النوع الثاني (أطفال)= $0.2(26)=5.2$ وحدة نقدية.
- الربح الكلي للمصنع= ربح الوحدة الواحدة $\times$عدد الوحدات

$= 8.8(20)+5.2(35)=358$ وحدة نقدية.

**تمرين 13−9.** أوجد السعر والكمية التوازنيين للنموذج التالي باستعمال طريقة كرامر.

$$(R)\begin{cases} Q_{d_1}+P_1-P_2=3 \\ Q_{s_1}-P_1=-12 \\ Q_{d_2}-P_1+P_2=15 \\ Q_{s_2}-P_1=-10 \end{cases}$$

**الحل.** لدينا في حالة التوازن $Q_{d_1}=Q_{s_1}=Q_1$ و $Q_{d_2}=Q_{s_2}=Q_2$ وعليه، يمكن كتابة النموذج السابق كما يلي

$$(R)\begin{cases} Q_1+P_1-P_2=3 \\ Q_1-P_1=-12 \\ Q_2-P_1+P_2=15 \\ Q_2-P_1=-10 \end{cases}$$

نكتب الجملة $(R)$ على شكل مصفوفات كالآتي

$$(R)\Leftrightarrow AX=B\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة $A$ مربعة، فالجملة $(R)$ لكرامر. نتأكد من وجود حل للجملة $(R)$ باستعمال محدد $A$، أي، باستعمال العمود الأول ل $A$، نجد

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}.1\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{4+1}.0\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=-2\neq 0$$

ومنه الجملة $(R)$ لها حل وحيد هو $X=(Q_1,Q_2,P_1,P_2)^T$، بحيث

$$Q_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -12 & 0 & -1 & 0 \\ 15 & 1 & -1 & 1 \\ -10 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2}$$
$$=-\frac{1}{2}\left[(-1)^{1+2}.0\begin{vmatrix} -12 & -1 & 0 \\ 15 & -1 & 1 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}.0\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 15 & -1 & 1 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}.1\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -12 & -1 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{4+2}.1\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -12 & -1 & 0 \\ 15 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$
$$=8$$

$$Q_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&3&1&-1\\1&-12&-1&0\\0&15&-1&1\\0&-10&-1&0\end{vmatrix}}{-2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix}-12&-1&0\\15&-1&1\\-10&-1&0\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}.1\begin{vmatrix}3&1&-1\\15&-1&1\\-10&-1&0\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix}3&1&-1\\-12&-1&0\\-10&-1&0\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}.0\begin{vmatrix}3&1&-1\\-12&-1&0\\15&-1&1\end{vmatrix}\right]$$

$$=10$$

$$P_1=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&0&3&-1\\1&0&-12&0\\0&1&15&1\\0&1&-10&0\end{vmatrix}}{-2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix}0&-12&0\\1&15&1\\1&-10&0\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}.1\begin{vmatrix}0&3&-1\\1&15&1\\1&-10&0\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix}0&3&-1\\0&-12&0\\1&-10&0\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}.0\begin{vmatrix}0&3&-1\\0&-12&0\\1&15&1\end{vmatrix}\right]$$

$$=20$$

$$P_2=\frac{|A_4|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&0&1&3\\1&0&-1&-12\\0&1&-1&15\\0&1&-1&-10\end{vmatrix}}{-2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix}0&-1&-12\\1&-1&15\\1&-1&-10\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}.1\begin{vmatrix}0&1&3\\1&-1&15\\1&-1&-10\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix}0&1&3\\0&-1&-12\\1&-1&-10\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}.0\begin{vmatrix}0&1&3\\0&-1&-12\\1&-1&15\end{vmatrix}\right]$$

$$=25$$

ومنه، كميات وأسعار التوازن هي

$Q_1^*=8 \quad P_1^*=20$ و $Q_2^*=10 \quad P_2^*=25$

**تمرين 13-10.** ليكن لدينا مصفوفة المعاملات الفنية وكذا مصفوفة الطلب النهائي لنموذج المنتج–المستخدم التالي

| المدخلات \ المخرجات | | القطاعات المستهلكة $X_1$ | $X_2$ | الطلب النهائي $(D_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| القطاعات | $X_1$ | 0.2 | 0.4 | 40 |
| المنتجة | $X_2$ | 0.3 | 0.5 | 20 |

1) أوجد حجم الإنتاج للقطاعين لتحقيق الطلب النهائي.

2) ما مستوى الإنتاج الكلي لكلا القطاعين، إذا زاد الطلب النهائي على القطاع $X_1$ بمقدار 30 وحدة وعلى

القطاع $X_2$ ب 10 وحدات ؟

3) ما مستوى الإنتاج الكلي لكلا القطاعين، إذا انخفض الطلب النهائي على القطاع $X_1$ بمقدار 10 وحدات وعلى القطاع $X_2$ ب 5 وحدات ؟

**الحل**. يمكن كتابة معطيات الجدول السابق على شكل مصفوفات كالأتي

- مصفوفة المعاملات الفنية

$$A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

- مصفوفة الطلب النهائي

$$D=\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$$

وعليه، حجم الإنتاج للقطاعين هو $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ ، بحيث

$$X=(I_2-A)^{-1}D$$

- إيجاد مصفوفة ليونتيف $(I_2-A)$. لدينا

$$\begin{aligned} I_2-A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- إيجاد $(I_2-A)^{-1}$. لدينا

$$\begin{aligned} \det(I_2-A) &= \begin{vmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.3 & 0.5 \end{vmatrix} \\ &= 0.28 \neq 0 \end{aligned}$$

بما أن $\det(I_2-A)\neq 0$، فان $(I_2-A)$ قابلة للقلب وعليه

$$\begin{aligned} \text{com}(I_2-A) &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|0.5| & (-1)^{1+2}|-0.3| \\ (-1)^{2+1}|-0.4| & (-1)^{2+2}|0.8| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \text{adj}(I_2-A) &= \left(\text{com}(I_2-A)\right)^T \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

إذا

$$\begin{aligned}(I_2-A)^{-1}&=\frac{1}{\det(I_2-A)}\operatorname{adj}(I_2-A)\\&=\frac{1}{0.28}\begin{pmatrix}0.5&0.4\\0.3&0.8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

إذا

$$\begin{aligned}X&=\frac{1}{0.28}\begin{pmatrix}0.5&0.4\\0.3&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\\20\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ومنه، على كلا القطاعين إنتاج 100 وحدة لتحقيق الطلب النهائي.

2) لتكن $X'$ مصفوفة الزيادة في إنتاج القطاعين بعد زيادة الطلب النهائي عليهما و $D'$ مصفوفة الزيادة في الطلب النهائي على القطاعين وعليه، $X'=(I_2-A)^{-1}D'$ أي

$$\begin{aligned}X'&=\frac{1}{0.28}\begin{pmatrix}0.5&0.4\\0.3&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}67.85\\60.71\end{pmatrix}\end{aligned}$$

وعليه، الزيادة في الإنتاج النهائي للقطاع $X_1$ هي 67.85 وحدة و 60.71 وحدة بالنسبة للقطاع $X_2$ ومنه، مستوى الإنتاج الكلي للقطاعين هو $X''$ ، بحيث

$$\begin{aligned}X''&=X+X'\\&=\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}67.85\\60.71\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}167.85\\160.71\end{pmatrix}\end{aligned}$$

أي، مستوى الإنتاج الكلي للقطاعين هو 167.85 وحدة للقطاع $X_1$ و 160.71 للقطاع $X_2$ .

3) لتكن $X''$ مصفوفة النقصان في إنتاج القطاعين بعد نقصان الطلب النهائي عليهما و $D''$ مصفوفة النقصان في الطلب النهائي على القطاعين وعليه، $X''=(I_2-A)^{-1}D''$ أي

$$\begin{aligned}X''&=\frac{1}{0.28}\begin{pmatrix}0.5&0.4\\0.3&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}25\\25\end{pmatrix}\end{aligned}$$

وعليه، النقصان في الإنتاج النهائي للقطاعين $X_1$ و $X_2$ هو 25 وحدة لكل منهما ومنه، مستوى الإنتاج الكلي للقطاعين هو $X'''$ ، بحيث

$$\begin{aligned}X'''&=X-X''\\&=\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}25\\25\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}75\\75\end{pmatrix}\end{aligned}$$

أي، مستوى الإنتاج الكلي للقطاعين هو 75 وحدة لكل منهما.

**تمرين 13-11.** الجدول التالي يوضح مصفوفة المعاملات الفنية وكذا مصفوفة الإنتاج الكلي لنموذج المنتج-المستخدم لاقتصاد بسيط مكون من ثلاثة قطاعات هي الزراعة $(X_1)$، الصناعة $(X_2)$ والخدمات $(X_3)$.

| المدخلات \ المخرجات | | القطاعات المستهلكة $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | الإنتاج الكلي $(X_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| القطاعات المنتجة | $X_1$ | 0.1 | 0.2 | 0.2 | 190 |
| | $X_2$ | 0.15 | 0.25 | 0.08 | 200 |
| | $X_3$ | 0.36 | 0.15 | 0.25 | 240 |

1) أوجد مستوى الطلب النهائي $(D)$ على منتجات كل قطاع.

2) أعد كتابة نموذج المنتج-المستخدم للاقتصاد السابق موضحا عدد الوحدات المنتجة في القطاع $X_i,\ i=\overline{1,3}$ والمستهلكة في القطاع $X_j,\ j=\overline{1,3}$ وكذا القيمة المضافة $(V_j)$ لكل قطاع.

**الحل**

1) إيجاد مستوى الطلب النهائي $(D)$ على منتجات كل قطاع

يمكن كتابة معطيات الجدول السابق على شكل مصفوفات كالأتي

- مصفوفة المعاملات الفنية

$$A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.25 & 0.08 \\ 0.36 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix}$$

- مصفوفة الإنتاج الكلي

$$X=\begin{pmatrix} 190 \\ 200 \\ 240 \end{pmatrix}$$

وعليه، مستوى الطلب النهائي على منتجات كل قطاع هو $D=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$ ، بحيث

$$(I_3-A)X=D$$

- إيجاد مصفوفة ليونتيف $(I_3-A)$. لدينا

$$I_3-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.25 & 0.08 \\ 0.36 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 \\ -0.15 & 0.75 & -0.08 \\ -0.36 & -0.15 & 0.75 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$\begin{aligned} D &= \left(I_3 - A\right) X \\ &= \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 \\ -0.15 & 0.75 & -0.08 \\ -0.36 & -0.15 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190 \\ 200 \\ 240 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 83 \\ 102.3 \\ 81.6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

إذا، مستوى الطلب النهائي على قطاعات الزراعة، الصناعة والخدمات هو على التوالي 83 وحدة، 102.3 وحدة و 81.6 وحدة.

2) إعادة كتابة نموذج المنتج–المستخدم. لدينا

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{X_{11}}{X_1} & \frac{X_{12}}{X_2} & \frac{X_{13}}{X_3} \\ \frac{X_{21}}{X_1} & \frac{X_{22}}{X_2} & \frac{X_{23}}{X_3} \\ \frac{X_{31}}{X_1} & \frac{X_{32}}{X_2} & \frac{X_{33}}{X_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{X_{11}}{190} & \frac{X_{12}}{200} & \frac{X_{13}}{240} \\ \frac{X_{21}}{190} & \frac{X_{22}}{200} & \frac{X_{23}}{240} \\ \frac{X_{31}}{190} & \frac{X_{32}}{200} & \frac{X_{33}}{240} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.25 & 0.08 \\ 0.36 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 40 & 48 \\ 28.5 & 50 & 19.2 \\ 68.4 & 30 & 60 \end{pmatrix}$$

إيجاد القيمة المضافة $\left(V_j\right)$ لكل قطاع. لدينا

$$V_j = X_j - \sum_{i=1}^{3} X_{ij}$$

ومنه

$$\begin{aligned} V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{11} + X_{12} + X_{13} \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 190 \\ 200 \\ 240 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 + 28.5 + 68.4 \\ 40 + 50 + 30 \\ 48 + 19.2 + 60 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 74.1 \\ 80 \\ 112.8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

إذا، يمكن إعادة كتابة نموذج المنتج–المستخدم للاقتصاد السابق كما يلي

| المخرجات / المدخلات | | القطاعات المستهلكة | | | الطلب النهائي $(D_i)$ | الإنتاج الكلي $(X_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | | |
| القطاعات المنتجة | $X_1$ | 19 | 40 | 48 | 83 | 190 |
| | $X_2$ | 28.5 | 50 | 19.2 | 102.3 | 200 |
| | $X_3$ | 68.4 | 30 | 60 | 81.6 | 240 |
| القيمة المضافة | $(V_j)$ | 74.1 | 80 | 112.8 | 266.9 | – |
| الإنتاج الكلي | $(X_j)$ | 190 | 200 | 240 | – | 630 |

### 4–2– تمارين للحل

**تمرين 13–12.** يقوم مصنع القمصان بسعيدة بإنتاج ثلاثة أنواع من القمصان: قمصان للرجال، النساء والأطفال ويحتاج لذلك إلى ثلاث آلات. الزمن المطلوب بالساعة لإنتاج وحدة واحدة من قمصان الرجال هو 2، 6 و1 بالنسبة للآلة الأولى، الثانية والثالثة على الترتيب وإنتاج وحدة واحدة من قمصان النساء يحتاج إلى 4، 3 و7 ساعات بالنسبة للآلات الأولى، الثانية والثالثة على التوالي، أما إنتاج وحدة واحدة من قمصان الأطفال فيحتاج 5، 2 و8 ساعات بالنسبة للآلة الأولى، الثانية والثالثة على الترتيب.

إذا علمت أن الطاقة المتاحة للآلة الأولى هو 240 ساعة وللآلة الثانية 249 ساعة و361 ساعة للآلة الثالثة، فما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجها من الأنواع الثلاثة لاستغلال الطاقة المتاحة للآلات الثلاث بطريقتي كرامر ومقلوب مصفوفة ؟

**تمرين 13–13.** ينتج أحد مصانع الأدوات المدرسية ثلاثة أنواع من الأقلام: قلم حبر، قلم جاف وقلم رصاص ويحتاج لذلك مواد خام، ساعات عمل وأعباء متغيرة. إذا علمت أن إنتاج وحدة واحدة من قلم الحبر يحتاج إلى 5، 3 و6 وحدات من المواد الخام، ساعات العمل والأعباء المتغيرة على الترتيب ووحدة واحدة من القلم الجاف تحتاج إلى 4، 2 و2 وحدة من المواد الخام، ساعات العمل والأعباء المتغيرة على التوالي، أما إنتاج وحدة واحدة من قلم الرصاص يحتاج إلى 9، 6 و10 وحدات من المواد الخام، ساعات العمل والأعباء المتغيرة على الترتيب. الطاقة المتاحة من المواد الخام هي 543 وحدة ومن ساعات العمل 343 وحدة و572 وحدة من الأعباء المتغيرة.

- أحسب باستعمال طريقتي غوص وغوص– جوردان، عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل منتج لاستغلال الموارد المتاحة.

**تمرين 13-14.** باستعمال رتبة مصفوفة، حل الجمل التالية

$$(K)\begin{cases}7x-2y+4z+5=0\\3x+y+z-2=0\\x-3y+2z-4=0\end{cases}\qquad(J)\begin{cases}x-2y+z=1\\5x-3y+z=5\\-2x+y=-2\end{cases}\qquad(I)\begin{cases}-x+5y+3z=-14\\x-3y+z=10\\3x+y-2z=10\end{cases}$$

$$(N)\begin{cases}-2x+y-z=1\\3x-y+z=0\end{cases}\qquad(M)\begin{cases}6x-y+7=0\\5x+2y-14=0\\3x+y-6=0\end{cases}\qquad(L)\begin{cases}x-5y-22=0\\4x+y-4=0\\3x+2y+2=0\end{cases}$$

# الفصل الرابع عشر

# القيم الذاتية

# والأشعة الذاتية

للقيم الذاتية والأشعة الذاتية دور أساسي في قابلية تقطير مصفوفة (أي جعلها مشابهة لمصفوفة قطرية) وللمصفوفات القابلة للتقطير تطبيقات عدة، منها دراسة الظواهر التراجعية على المدى الطويل.

## 1- القيمة الذاتية والشعاع الذاتي (Eigenvalue and Eigenvector)

**تعريف 14-1.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$. نقول عن عدد حقيقي $\lambda$ أنه قيمة ذاتية(eigenvalue) ل $A$، إذا تحقق أحد الشرطين المتكافئين التاليين*

*1)* $\det(A-\lambda I_n)=0$

*2) إذا وجد شعاع غير معدوم $v$ من $R^n$ حل للمعادلة*

$$(A-\lambda I_n)v=0 \quad \text{أو} \quad Av=\lambda v$$ [1]

*الشعاع $v$ الذي يحقق الشرط (2) يسمى شعاعا ذاتيا(eigenvector) ل $A$ مرافقا للقيمة الذاتية $\lambda$.*[2]

**ملاحظة 14-1.** في بعض المسائل، قد نحتاج لاستعمال طريقة غوص لحل جملة المعادلات الخطية $Av=\lambda v$ لإيجاد الشعاع الذاتي $v$.[3]

**نظرية 14-1.** *عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة قطرية $D$ تمثل قيمها الذاتية.*[4]

**نظرية 14-2.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$ ولتكن $\lambda$ قيمة ذاتية ل $A$. مجموعة الأشعة الذاتية المرافقة ل $\lambda$*

$$E_\lambda=\left\{v\in R^n \,/\, Av=\lambda v\right\}$$

*تشكل فضاء شعاعيا جزئيا من $R^n$. بُعد $E_\lambda$ يسمى الدرجة الهندسية ل $\lambda$ ويُرمز لها بالرمز $\text{mult}_{\text{geo}}(\lambda)$ ونكتب $\dim E_\lambda=\text{mult}_{\text{geo}}(\lambda)$ (بتصرف).*[5]

**نظرية 14-3.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$ ولتكن $\lambda$ قيمة ذاتية ل $A$.*

- *الدالة $\lambda\mapsto P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$ دالة من الدرجة $n$ تسمى كثير الحدود المميز( characteristic polynomial) ل $A$ يقبل على الأكثر $n$ جذرا وبالتالي المصفوفة $A$ تقبل على الأكثر $n$ قيمة ذاتية.*
- *يكون العدد الحقيقي $\lambda_i$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$، إذا وفقط إذا كان $\lambda_i$ جذرا لكثير حدودها المميز $P_A$*[6]*، بحيث*

$$P_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda-\lambda_p)^{n_p}$$
$$=\prod_{i=1}^{p}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$$

*بحيث $\lambda_i,\ i=\overline{1,p}$ تمثل القيم الذاتية ل $A$ و $n_i,\ i=\overline{1,p}$ تمثل درجاتها الجبرية على الترتيب ويرمز لها بالرمز $\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_i)$ ونكتب $n_i=\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_i)$، مع*

---

(1) Laurent Smoch. *Diagonalisation*. Université du Littoral, France, 2013. Théorème 3.1.3, p. 32.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 10.1, p. 268.
(3) Laurent Smoch. Op. Cit. Remarque 3.1.2, p. 33.
(4) Ibid. Théorème 3.1.1, p. 31.
(5) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 10.1, p. 268.
(6) Ibid, p. 270.

(1) $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$

- إذا كان

$n_i = 1$ فإن $\lambda_i$ قيمة ذاتية بسيطة (أو من الدرجة الأولى)،

$n_i = 2$ فإن $\lambda_i$ قيمة ذاتية مضاعفة (أو من الدرجة الثانية)،

$n_i = 3$ فإن $\lambda_i$ قيمة ذاتية من الدرجة الثالثة،

$n_i = k$ فإن $\lambda_i$ قيمة ذاتية من الدرجة $k$. (2)

- وعليه، فإن

$$\det(A) = \lambda_1^{n_1}.\lambda_2^{n_2}...\lambda_p^{n_p} = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{n_i}$$

(3) (بتصرف) $tr(A) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + ... + n_p\lambda_p = \sum_{i=1}^{p} n_i\lambda_i$

- ولدينا، من أجل كل قيمة ذاتية $\lambda$ ل $A$، $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) \le \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$. (4)

**أمثلة 14-1.** لنجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}، \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1) لدينا

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$A$ مصفوفة قطرية من الدرجة $n = 3$، بحيث

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11}.a_{22}.a_{33}$$
$$= -3.6.6 = -108$$

و

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$
$$= -3 + 6 + 6 = 9$$

القيم الذاتية ل $A$ هي عناصر قطرها الرئيسي، أي $\lambda_1 = -3$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 6$ قيمة ذاتية مضاعفة وأشعتها الذاتية هي $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ من أجل $\lambda_1 = -3$ و $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$، $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ من أجل $\lambda_2 = 6$، لأن

(1) G. Kreweras. *Premiers éléments du calcul matriciel.* Cahiers de bureau universitaire de recherche opérationnelle, Série Recherche, tome 8, pp. 3-41, Numdam, 1966, pp. 29-30.
(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 275.
(3) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 288-289.
(4) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 275.

- القيم الذاتية ل $A$ . لدينا

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 6-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(-3-\lambda)(6-\lambda)^2$$

ومنه

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow (-3-\lambda)(6-\lambda)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-3-\lambda=0\\ 6-\lambda=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-3\\ \lambda=6\end{cases}$$

وعليه $\lambda_1=-3$ قيمة ذاتية بسيطة (من الدرجة الأولى) ومنه $n_1=\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_1)=1$ و $\lambda_2=6$ قيمة ذاتية مضاعفة (من الدرجة الثانية) وعليه $n_2=\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_2)=2$ ونلاحظ أن $n_1+n_2=n$ أي $1+2=3$ و $\det(A)=\lambda_1^{n_1}.\lambda_2^{n_2}=(-3)^1.(6)^2=-108$ ، $tr(A)=n_1\lambda_1+n_2\lambda_2=(1.-3)+(2.6)=9$ .

- الأشعة الذاتية ل $A$
- من أجل $\lambda_1=-3$ . ليكن

$$v=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in R^3:$$

$$v\in E_{\lambda_1}(A)\Leftrightarrow Av=\lambda_1 v$$
$$\Leftrightarrow Av=-3v$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3x\\ 6y\\ 6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\ -3y\\ -3z\end{pmatrix}$$

أي

$$\begin{cases}-3x=-3x\\ 6y=-3y\\ 6z=-3z\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}0=0 \ (\text{قضية صحيحة})\\ 9y=0\\ 9z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\in R\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_1}(A)=E_{-3}(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}/\, x\in R\right\}$$

إذا

$$E_{-3}(A)=vect\left(v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

ومنه $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ شعاع ذاتي لـ $A$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1=-3$ وعليه $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_1)=\dim E_{-3}(A)=1$ .

- من أجل $\lambda_2=6$ . ليكن

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3:$$

$$\begin{aligned}v\in E_{\lambda_2}(A) &\Leftrightarrow Av=\lambda_2 v\\ &\Leftrightarrow Av=6v\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3x\\6y\\6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x\\6y\\6z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

أي

$$\begin{cases}-3x=6x\\6y=6y\\6z=6z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x=0\\0=0\ (\text{قضية صحيحة})\\0=0\ (\text{قضية صحيحة})\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y\in R\\z\in R\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{aligned}E_{\lambda_2}(A)=E_6(A)&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}/\,y,z\in R\right\}\\ &=\left\{y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}/\,y,z\in R\right\}\end{aligned}$$

إذا

$$E_6(A)=vect\left(v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

ومنه $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ شعاعان ذاتيان ل $A$ مرافقان للقيمة الذاتية $\lambda_2=6$ وعليه $\text{mult}_{\text{geo}}(\lambda_2)=\dim E_6(A)=2$.

2) لدينا

$$B=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$$

$B$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n=2$، بحيث

$$tr(B)=b_{11}+b_{22}=4+1=5 \quad \text{و} \quad \det(B)=(4.1)-(-2.1)=6$$

– القيم الذاتية ل $B$. لدينا

$$\begin{aligned}P_B(\lambda)=\det(B-\lambda I_2)&=\begin{vmatrix}4-\lambda&-2\\1&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(4-\lambda)(1-\lambda)-(-2.1)\\&=\lambda^2-5\lambda+6\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}P_B(\lambda)=0&\Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0\\&\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda-3)=0\\&\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda-2=0\\\lambda-3=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\\lambda=3\end{cases}\end{aligned}$$

وعليه $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=3$ قيمتان ذاتيتان بسيطتان (من الدرجة الأولى) ل $B$ ومنه $n_1=\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_1)=1$ و $n_2=\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_2)=1$ ونلاحظ أن $n_1+n_2=n$ أي $1+1=2$ و $\det(B)=\lambda_1^{n_1}.\lambda_2^{n_2}=(2)^1.(3)^1=6$، $tr(B)=n_1\lambda_1+n_2\lambda_2=(1.2)+(1.3)=5$.

– الأشعة الذاتية ل $B$

– من أجل $\lambda_1=2$. ليكن

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2:$$

$$\begin{aligned}v\in E_{\lambda_1}(B)&\Leftrightarrow Bv=\lambda_1 v\\&\Leftrightarrow Bv=2v\\&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4x-2y\\x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

أي

$$\begin{cases} 4x-2y=2x \\ x+y=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x-y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x=y \end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_1}(B)=E_2(B)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / x\in R\right\}$$

إذا

$$E_2(B)=vect\left(v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ومنه $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي ل $B$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1=2$ وعليه $\text{mult}_{\text{geo}}(\lambda_1)=\dim E_2(B)=1$ .

- من أجل $\lambda_2=3$ . ليكن

$$v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in R^2 :$$
$$v\in E_{\lambda_2}(B)\Leftrightarrow Bv=\lambda_2 v$$
$$\Leftrightarrow Bv=3v$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x-2y \\ x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

أي

$$\begin{cases} 4x-2y=3x \\ x+y=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ y\in R \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y\in R \end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_2}(B)=E_3(B)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} / y\in R\right\}$$
$$=\left\{y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} / y\in R\right\}$$

إذا

$$E_3(B)=vect\left(v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

ومنه $v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ شعاع ذاتي ل $B$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2=3$ وعليه $\mathrm{mult}_{geo}(\lambda_2)=\dim E_3(B)=1$ .

3) لدينا

$$C=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$$

$C$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n=3$ .

لنحسب محدد $C$ باستخدام العمود الأول، أي

$$\begin{aligned}\det(C)=\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{vmatrix}&=(-1)^{1+1}.2\begin{vmatrix}1&-1\\2&4\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}.0\begin{vmatrix}1&0\\2&4\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}\\&=2\begin{vmatrix}1&-1\\2&4\end{vmatrix}\\&=2\left[(1.4)-(-1.2)\right]\\&=12\end{aligned}$$

و

$$tr(C)=c_{11}+c_{22}+c_{33}=2+1+4=7$$

- القيم الذاتية ل $C$ . لدينا

$$\begin{aligned}P_C(\lambda)=\det(C-\lambda I_3)&=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\0&1-\lambda&-1\\0&2&4-\lambda\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\2&4-\lambda\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)-(-1.2)\right]\\&=(2-\lambda)\left(\lambda^2-5\lambda+6\right)\\&=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)\\&=-(2-\lambda)^2(\lambda-3)\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}P_C(\lambda)=0&\Leftrightarrow-(2-\lambda)^2(\lambda-3)=0\\&\Leftrightarrow\begin{cases}2-\lambda=0\\\lambda-3=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\\lambda=3\end{cases}\end{aligned}$$

وعليه $\lambda_1 = 2$ قيمة ذاتية مضاعفة (من الدرجة الثانية) ل $C$ وعليه $n_1 = \text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_1) = 2$ و $\lambda_2 = 3$ قيمة ذاتية بسيطة (من الدرجة الأولى) ل $C$ ومنه $n_2 = \text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_2) = 1$ ونلاحظ أن $n_1 + n_2 = n$ أي $2+1=3$ و $\det(C) = \lambda_1^{n_1}.\lambda_2^{n_2} = (2)^2.(3)^1 = 12$ ، $tr(C) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 = (2.2)+(1.3) = 7$ .

- الأشعة الذاتية ل $C$
- من أجل $\lambda_1 = 2$ . ليكن

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 :$$

$$\begin{aligned}
v \in E_{\lambda_1}(C) &\Leftrightarrow Cv = \lambda_1 v \\
&\Leftrightarrow Cv = 2v \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ y-z \\ 2y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

أي

$$\begin{cases} 2x+y=2x \\ y-z=2y \\ 2y+4z=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ y=0 \\ y+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_1}(C) = E_2(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / x \in R \right\}$$

إذا

$$E_2(C) = vect\left( v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ومنه $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي ل $C$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ وعليه $\text{mult}_{\text{geo}}(\lambda_1) = \dim E_2(C) = 1$ .

– من أجل $\lambda_2 = 3$. ليكن

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 :$$

$$\begin{aligned} v \in E_{\lambda_2}(C) &\Leftrightarrow Cv = \lambda_2 v \\ &\Leftrightarrow Cv = 3v \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

أي

$$\begin{cases} 2x + y = 3x \\ y - z = 3y \\ 2y + 4z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \\ y \in R \end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_2}(C) = E_3(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} / y \in R \right\}$$

$$= \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} / y \in R \right\}$$

إذا

$$E_3(C) = vect\left( v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

ومنه $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي لـ $C$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 3$ وعليه $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_2) = \dim E_3(C) = 1$.

## 2– قابلية تقطير مصفوفة

**تعريف 2-14.** *نقول عن مصفوفة مربعة $A$ أنها* *قابلة للتقطير**، إذا وجدت مصفوفة قابلة للقلب $P$، بحيث $D = P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية.* [1]

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 10.3, p. 269.

**نظرية 14−4.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$ ولتكن $\lambda_1$، $\lambda_2$، ....، $\lambda_n$ قيمها الذاتية و $v_1$، $v_2$، ....، $v_n$ أشعتها الذاتية المرافقة لقيمها الذاتية على الترتيب. لتكن $P=[v_1v_2...v_n]$ المصفوفة التي أعمدتها تمثل الأشعة الذاتية ل $A$، تسمى هذه المصفوفة، مصفوفة العبور من الأساس القانوني ل $R^n$ إلى الأساس المكون من الأشعة الذاتية ل $A$. إذا كانت $P$ قابلة للقلب، فإن*

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}=D$$

*وبالعكس، إذا كانت $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية $D$، فإن أعمدة $P$ تمثل الأشعة الذاتية ل $A$ وعناصر القطر الرئيسي ل $D$ تمثل القيم الذاتية ل $A$.* [1]

**ملاحظة 14−2.** يتضح من النظرية 14−4 أن قابلية قلب المصفوفة $P$ يعتمد على الاستقلال الخطي للأشعة الذاتية للمصفوفة $A$ ، بحيث هذه الأشعة تشكل أساسا ل $R^n$. [2]

**نظرية 14−5.** *تكون مصفوفة مربعة $A$ من الدرجة $n$ قابلة للتقطير، إذا وفقط إذا وجد أساس ل $R^n$ مكون من الأشعة الذاتية ل $A$.* [3]

**أمثلة 14−2.** من الأمثلة 14−1، لدينا، $A$ مصفوفة قطرية، بحيث

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

مع $\lambda_1=-3$ قيمة ذاتية بسيطة ل $A$ و $\lambda_2=6$ قيمة ذاتية مضاعفة ل $A$ والأشعة الذاتية ل $A$ المرافقة ل $\lambda_1$ و $\lambda_2$ هي على الترتيب $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ وعليه

$$P=[v_1v_2v_3]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

ومنه $P^{-1}=I_3^{-1}=I_3=P$ وعليه $D=P^{-1}AP=I_3AI_3=A$ والجملة $\{v_1,v_2,v_3\}$ تشكل أساسا ل $R^3$.

**نظرية 14−6.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$.*

*1) إذا كانت ل $A$، $n$ قيمة ذاتية متمايزة، فإن $P$ قابلة للقلب وعليه $A$ قابلة للتقطير.* [4]

*2) إذا كانت $A$ مصفوفة تناظرية (أي $A^T=A$)، فإن $A$ قابلة للتقطير وفي هذه الحالة، توجد مصفوفة $P$، بحيث*

$$P^{-1}=P^T \quad \text{و} \quad A=PDP^T \ (\text{أي } P^TAP=D)$$ [5]

---

[1] Laurent Smoch. Op. Cit. Théorème 3.3.1, p. 35.
[2] Ibid. Remarque 3.3.1, p. 35.
[3] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 10.2, p. 269.
[4] Laurent Smoch. Op. Cit. Corollaire 3.3.1, p. 35.
[5] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Proposition 18, p. 278.

**نظرية 14–7.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$. إذا كانت كل جذور كثير الحدود المميز $P_A$ لـ $A$ بسيطة (أي من الدرجة الأولى)، فإن $A$ قابلة للتقطير.* [1]

**أمثلة 14–3.** من الأمثلة 14–1، لدينا، المصفوفة

$$B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

لـ $B$ قيمتان ذاتيتان بسيطتان هما $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=3$ وحسب النظرية 14–7، فإن $B$ قابلة للتقطير، أي توجد مصفوفة قابلة للقلب $P$، بحيث $D=P^{-1}BP$ مصفوفة قطرية (حسب التعريف 14–2).

مصفوفة العبور $P$ مكونة من الأشعة الذاتية $v_1$ و $v_2$ المرافقة للقيم الذاتية $\lambda_1$ و $\lambda_2$ على الترتيب، بحيث $v_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ و $v_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ وعليه

$$P=[v_1v_2]=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

لإيجاد المصفوفة القطرية $D=P^{-1}BP$، نحسب الجُداء $P^{-1}BP$، لكن علينا أولا، إيجاد مقلوب المصفوفة $P$ (أي إيجاد $P^{-1}$).

- إيجاد $P^{-1}$. لدينا

$$\det(P)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(1.1)-(2.1)=-1\neq 0$$

ومنه $P$ قابلة للقلب و $P^{-1}=\dfrac{1}{\det(P)}\mathrm{adj}P=\dfrac{1}{\det(P)}(\mathrm{com}P)^T$، بحيث

$$\mathrm{com}P=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}|1| & (-1)^{1+2}|1|\\ (-1)^{2+1}|2| & (-1)^{2+2}|1|\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\mathrm{adj}P=(\mathrm{com}P)^T=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

وعليه

$$P^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

[1] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 10.6, p. 271.

إذا

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=D$$

**نظرية 14-8.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$. تكون $A$ قابلة للتقطير، إذا وفقط إذا كان، في كثير الحدود المميز $P_A$ ل $A$، من أجل كل قيمة ذاتية $\lambda$ ل $A$*

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda)=\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda)$$ (1)

**أمثلة 14-4.** من الأمثلة 14-1، لدينا

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$C$ غير قابلة للتقطير، لأن ل $C$ قيمتان ذاتيتان هما $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=3$، بحيث $\lambda_1=2$ قيمة ذاتية مضاعفة، أي $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_1)=2$ وشعاعها الذاتي المرافق $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، أي $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_1)=1$.

نلاحظ أن $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_1)\neq\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_1)$ وعليه، حسب النظرية 14-8، المصفوفة $C$ غير قابلة للتقطير.

## 3- تطبيقات قابلية تقطير مصفوفة

### -حساب قوة مصفوفة

### أ) حساب قوة مصفوفة باستعمال المصفوفة القطرية $D$

**نظرية 14-9.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$. نفرض أن $A$ قابلة للتقطير، أي توجد مصفوفة عبور $P$ ومصفوفة قطرية $D$، بحيث*

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}=D$$

*أي* $A=PDP^{-1}$

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Proposition 17, p. 275.

وعليه

$$\begin{aligned} A^k &= \left(PDP^{-1}\right)^k \\ &= \underbrace{\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)...\left(PDP^{-1}\right)}_{k \text{ مرة}} \\ &= PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1} \\ &= PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)D...\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} \\ &= P\underbrace{DD...D}_{k \text{ مرة}}P^{-1} \end{aligned}$$

أي

$$(1)\quad \forall k \geq 0 : A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}P^{-1}$$

**أمثلة 14−5.** من الأمثلة 14−3، لدينا

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B$ قابلة للتقطير، بحيث $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$، $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ و $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

وعليه يمكن حساب $B^k$ كما يلي $B^k = PD^kP^{-1}$، بحيث

$$D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\begin{aligned} B^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 2.3^k \\ 2^k & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^k + 2.3^k & 2^{k+1} - 2.3^k \\ -2^k + 3^k & 2^{k+1} - 3^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**ب) حساب قوة مصفوفة باستعمال طريقة كايلي−هاملتون (Cayley-Hamilton's Method )**

**نظرية 14−10 (كايلي−هاملتون).** *كل مصفوفة مربعة $A$ من الدرجة $n$ هي جذر لكثير حدودها المميز $P_A$،* أي

$$\text{(2) (بتصرف)}\quad \begin{aligned} P_A(A) &= \left(A - \lambda_1 I_n\right)^{n_1}\left(A - \lambda_2 I_n\right)^{n_2}...\left(A - \lambda_p I_n\right)^{n_p} \\ &= a_nA^n + ... + a_1A + a_0I_n = 0 \end{aligned}$$

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 289.

(2) G. Kreweras. Op. Cit, p. 32.

**نظرية 14-11.** *لتكن $A$ مصفوفة مربعة قابلة للتقطير من الدرجة $n$، قيمها الذاتية $\lambda_i$ ذات الدرجة الجبرية $n_i$ على الترتيب، بحيث $\sum_i n_i = n$. لإيجاد قوة المصفوفة $A$ (أي $A^k$)، نقوم بالقسمة الإقليدية ل $\lambda^k$على كثير الحدود المميز $P_A$ ل $A$، أي*

$$\lambda^k = P_A(\lambda) Q_n(\lambda) + R_n(\lambda)$$

*بحيث درجة كثير الحدود $R_n(\lambda)$ أقل بدرجة واحدة من درجة كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ (أي $\deg(R_n(\lambda)) = \deg(P_A(\lambda)) - 1$) وعليه*

$$A^k = P_A(A) Q_n(A) + R_n(A)$$

*وحسب نظرية كايلي-هاملتون (النظرية 14-10)، $P_A(A) = 0$ ومنه*

$$A^k = R_n(A) \ldots (1)$$ [1]

*فإذا كان $\deg(P_A(\lambda)) = m+1$، فإن $\deg(R_n(\lambda)) = m$، أي*

$$R_n(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = \lambda^k$$

*وعليه، نحتاج $(m+1)$ معادلة لإيجاد معاملات كثير الحدود $R_n(\lambda)$، أي*

$$\left(\lambda_i^k\right)^{(n_i - j)} = R_n(\lambda_i)^{(n_i - j)}, \quad j = \overline{1, n_i}$$ [*]

*وأخيرا، نعوض قيم معاملات كثير الحدود $R_n(\lambda)$ في المعادلة (1)، لنجد*

$$A^k = R_n(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n$$ *(بتصرف)* [2]

**أمثلة 14-6.** في الأمثلة 14-5، قمنا بحساب $B^k$ بطريقة المصفوفة القطرية $D$، لنجد النتيجة نفسها (أي $B^k$) بطريقة كايلي-هاملتون.

من الأمثلة 14-1، لدينا $\deg(P_B(\lambda)) = 2$ ومنه $\deg(R_n(\lambda)) = 1$، أي

$$R_n(\lambda) = a_1 \lambda + a_0 = \lambda^k$$

لكن $B^k = R_n(B)$ ومنه

$$B^k = a_1 B + a_0 I_2$$

- إيجاد المعاملين $a_0$ و $a_1$. لدينا

$$\lambda^k = a_1 \lambda + a_0$$

ل $B$ قيمتان ذاتيتان بسيطتان هما $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$، بحيث $n_1 = n_2 = 1$

وعليه

$$\begin{cases} \left(\lambda_1^k\right)^{(n_1 - j)} = R_n(\lambda_1)^{(n_1 - j)} = (a_1 \lambda_1 + a_0)^{(n_1 - j)} & , j = \overline{1, n_1} \\ \left(\lambda_2^k\right)^{(n_2 - j)} = R_n(\lambda_2)^{(n_2 - j)} = (a_1 \lambda_2 + a_0)^{(n_2 - j)} & , j = \overline{1, n_2} \end{cases}$$

---

[1] G. Kreweras. Op. Cit, p. 32.

[*] الكتابة " $f^{(l)}$ " تعني اشتقاق $f$ من الدرجة $l$ (أي اشتقاق $f$، $l$ مرة) مع $f^{(0)} = f$.

[2] G. Kreweras. Op. Cit, pp. 37-38.

أي

$$\begin{cases} \left(2^k\right)^{(1-j)} = \left(2a_1 + a_0\right)^{(1-j)} & , j = \overline{1,1} = 1 \\ \left(3^k\right)^{(1-j)} = \left(3a_1 + a_0\right)^{(1-j)} & , j = \overline{1,1} = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} \left(2^k\right)^{(1-1)} = \left(2a_1 + a_0\right)^{(1-1)} \\ \left(3^k\right)^{(1-1)} = \left(3a_1 + a_0\right)^{(1-1)} \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} \left(2^k\right)^{(0)} = \left(2a_1 + a_0\right)^{(0)} \\ \left(3^k\right)^{(0)} = \left(3a_1 + a_0\right)^{(0)} \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} 2^k = 2a_1 + a_0 ......(1) \\ 3^k = 3a_1 + a_0 ......(2) \end{cases}$$

ومنه

$$(2)-(1) \Leftrightarrow a_1 = 3^k - 2^k$$

بالتعويض عن قيمة $a_1$ في المعادلة $(1)$، نجد

$$a_0 = 3.2^k - 2.3^k$$

وعليه

$$\begin{aligned} B^k &= a_1 B + a_0 I_2 \\ &= \left(3^k - 2^k\right) B + \left(3.2^k - 2.3^k\right) I_2 \\ &= \left(3^k - 2^k\right)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \left(3.2^k - 2.3^k\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\left(3^k - 2^k\right) & -2\left(3^k - 2^k\right) \\ 3^k - 2^k & 3^k - 2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.2^k - 2.3^k & 0 \\ 0 & 3.2^k - 2.3^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^k + 2.3^k & 2^{k+1} - 2.3^k \\ -2^k + 3^k & 2^{k+1} - 3^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# 4- تمارين

## 4-1- تمارين محلولة

**تمرين 14-1.** لتكن $A$ مصفوفة، بحيث

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- هل $A$ قابلة للتقطير؟

**الحل.** لدراسة قابلية تقطير المصفوفة $A$ ، نحسب قيمها وأشعتها الذاتية.

- إيجاد القيم الذاتية ل $A$ . لدينا

$$\begin{aligned}P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)&=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & -4\\ 1 & 4-\lambda & -3\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}\\ &=(4-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1 & 4-\lambda\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ &=(\lambda-3)^2(\lambda-2)\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}P_A(\lambda)=0&\Leftrightarrow(\lambda-3)^2(\lambda-2)=0\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda-3=0\\ \lambda-2=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=3\\ \lambda=2\end{cases}\end{aligned}$$

وعليه $\lambda_1=3$ قيمة ذاتية مضاعفة (من الدرجة الثانية) ل $A$ وعليه $\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_1)=2$ و $\lambda_2=2$ قيمة ذاتية بسيطة (من الدرجة الأولى) ل $A$ ومنه $\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_2)=1$

- إيجاد الأشعة الذاتية ل $A$ . لدينا

- من أجل $\lambda_1=3$ . ليكن

$$v=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in R^3:$$

$$\begin{aligned}v\in E_{\lambda_1}(A)&\Leftrightarrow Av=\lambda_1 v\\ &\Leftrightarrow Av=3v\\ &\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4 & 2 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4x+2y-4z\\ x+4y-3z\\ x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\ 3y\\ 3z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

أي

$$\begin{cases} 4x+2y-4z=3x \\ x+4y-3z=3y \\ x+y=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-4z=0......(1) \\ x+y-3z=0........(2) \\ x+y-3z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-4z=0................(1) \\ (1)-(2) \Leftrightarrow y-z=0........(2') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2') \Leftrightarrow y=z \\ (1) \Leftrightarrow x-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x=2z \\ z \in R \end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_1}(A)=E_3(A)=\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / z \in R \right\}$$

إذا

$$E_3(A)=vect\left( v_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ومنه $v_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي لـ $A$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1=3$ وعليه $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_1)=\dim E_3(A)=1$ .

نلاحظ أن $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_1)\neq \mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_1)$ وعليه $A$ غير قابلة للتقطير.

**تمرين 2-14.** في اقتصاد مغلق مؤلف من ثلاث قطاعات: الطاقة، الكيماويات والصناعة. لتكن $x_n$ ، $y_n$ و $z_n$ دخل قطاع الطاقة، الكيماويات والصناعة في نهاية الفترة $n$ على الترتيب. نفرض أنه في الفترة التالية $(n+1)$ ، 30 % من دخل قطاع الطاقة يوجَه للكيماويات و50 % للصناعة ويحتفظ القطاع بالباقي لنفسه ويحتفظ قطاع الكيماويات ب 60 % من دخله لنفسه والباقي يوجَه لقطاع الصناعة، أما دخل قطاع الصناعة فيوجَه للقطاع نفسه.

- إذا علمت أنه في سنة 2018، أعطت إحصائيات هذا الاقتصاد المعطيات التالية: 50 مليون وحدة نقدية هو دخل قطاع الطاقة و20 مليون وحدة نقدية دخل قطاع الكيماويات، أما دخل قطاع الصناعة فبلغ 30 مليون وحدة نقدية.
- أحسب دخل القطاعات الثلاث سنة 2040، بطريقة المصفوفة القطرية $D$ .

**الحل.** يمكن تلخيص معطيات التمرين في الجدول التالي

| يحصل على دخله من / القطاع | الطاقة | الكيماويات | الصناعة |
|---|---|---|---|
| الطاقة $x$ | $0.2$ | $0$ | $0$ |
| الكيماويات $y$ | $0.3$ | $0.6$ | $0$ |
| الصناعة $z$ | $0.5$ | $0.4$ | $1$ |

يمكن تلخيص تبادل دخل هذه القطاعات في الفترة $(n+1)$ في جملة المعادلات التالية

$$(I)\begin{cases} x_{n+1}=0.2x_n \\ y_{n+1}=0.3x_n+0.6y_n \qquad ,n\geq 0 \\ z_{n+1}=0.5x_n+0.4y_n+z_n \end{cases}$$

ويمكن كتابة الجملة $(I)$على شكل مصفوفات كما يلي

$$(I)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_{n+1}=AX_n,\ n\geq 0$$

لدينا، إنتاج القطاعات الثلاث سنة $2018$ يمثل $X_0$، أي

$$X_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5.10^7 \\ 2.10^7 \\ 3.10^7 \end{pmatrix}$$

وعليه، دخل القطاعات نفسها سنة $2040$ يمثل $X_{22}$ وحسب العلاقة التراجعية $(I)$، لدينا

$$X_{22}=AX_{21}=A(AX_{20})=A^2X_{20}=...=A^{22}X_0$$

إذا، علينا حساب $A^{22}$ وعليه نحسب بشكل عام $A^k$ من أجل $k\geq 0$.

- حساب $A^k$ بطريقة المصفوفة القطرية $D$

قبل حساب $A^k$، نتأكد أن المصفوفة $A$ قابلة للتقطير، أي يمكن كتابتها على الشكل $A=PDP^{-1}$ وعليه $A^k=PD^kP^{-1}$ بحيث $D$ مصفوفة قطرية و $P$ مصفوفة العبور.

- إيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية ل $A$
- القيم الذاتية ل $A$. لدينا

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 0.2-\lambda & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.6-\lambda & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(0.2-\lambda)(0.6-\lambda)(1-\lambda)$$

ومنه

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow (0.2-\lambda)(0.6-\lambda)(1-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.2-\lambda=0 \\ 0.6-\lambda=0 \\ 1-\lambda=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0.2 \\ \lambda=0.6 \\ \lambda=1 \end{cases}$$

وعليه $\lambda_1=0.2$ ، $\lambda_2=0.6$ و $\lambda_3=1$ قيم ذاتية بسيطة ل $A$ ومنه $A$ قابلة للتقطير.

- إيجاد الأشعة الذاتية ل $A$. لدينا
- من أجل $\lambda_1=0.2$. ليكن

$$v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in R^3:$$

$$v\in E_{\lambda_1}(A) \Leftrightarrow Av=\lambda_1 v$$

$$\Leftrightarrow Av=0.2v$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0.2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.2x \\ 0.3x+0.6y \\ 0.5x+0.4y+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.2x \\ 0.2y \\ 0.2z \end{pmatrix}$$

أي

$$\begin{cases} 0.2x=0.2x \\ 0.3x+0.6y=0.2y \\ 0.5x+0.4y+z=0.2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \text{ (قضية صحيحة)} \\ 0.3x+0.4y=0 \\ 0.5x+0.4y+0.8z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ y=-0.75x \\ z=-0.25x \end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_1}(A)=E_{0.2}(A)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -0.75x \\ -0.25x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ -0.75 \\ -0.25 \end{pmatrix} / x\in R\right\}$$

إذا

$$E_{0.2}(A)=vect\left(v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -0.75 \\ -0.25 \end{pmatrix}\right)$$

ومنه $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.75 \\ -0.25 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي ل $A$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 0.2$ .

- من أجل $\lambda_2 = 0.6$ . ليكن

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 :$$

$$\begin{aligned} v \in E_{\lambda_2}(A) &\Leftrightarrow Av = \lambda_2 v \\ &\Leftrightarrow Av = 0.6v \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.2x \\ 0.3x + 0.6y \\ 0.5x + 0.4y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6x \\ 0.6y \\ 0.6z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

أي

$$\begin{cases} 0.2x = 0.6x \\ 0.3x + 0.6y = 0.6y \\ 0.5x + 0.4y + z = 0.6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.4x = 0 \\ 0.3x = 0 \\ 0.5x + 0.4y + 0.4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ y \in R \end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_2}(A) = E_{0.6}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} / y \in R \right\}$$

إذا

$$E_{0.6}(A) = vect\left( v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

ومنه $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي ل $A$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 0.6$ .

- من أجل $\lambda_3 = 1$. ليكن

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 :$$

$$\begin{aligned} v \in E_{\lambda_3}(A) &\Leftrightarrow Av = \lambda_3 v \\ &\Leftrightarrow Av = v \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.2x \\ 0.3x + 0.6y \\ 0.5x + 0.4y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

أي

$$\begin{cases} 0.2x = x \\ 0.3x + 0.6y = y \\ 0.5x + 0.4y + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.8x = 0 \\ 0.3x - 0.4y = 0 \\ 0.5x + 0.4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in R \end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_3}(A) = E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / z \in R \right\}$$

إذا

$$E_1(A) = vect\left( v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ومنه $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي لـ $A$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 1$.

- تقطير المصفوفة $A$.

لدينا $A = PDP^{-1}$، بحيث $P = [v_1 v_2 v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0 \\ -0.25 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ و $D = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- حساب $P^{-1}$. لدينا

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0 \\ -0.25 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.1.1 = 1 \neq 0$$

ومنه $P$ قابلة للقلب و $P^{-1}=\dfrac{1}{\det(P)}\text{adj}P=\dfrac{1}{\det(P)}(\text{com}P)^{T}$ ، بحيث

$$\text{com}P=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-0.75&0\\-0.25&1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-0.75&1\\-0.25&-1\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&0\\-1&1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\-0.25&1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0\\-0.25&-1\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\-0.75&0\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\-0.75&1\end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0.75&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\text{adj}P=(\text{com}P)^{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0.75&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

وعليه

$$P^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0.75&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0.75&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

- حساب $A^{k}$

لدينا $A^{k}=PD^{k}P^{-1}$ ، بحيث $D^{k}=\begin{pmatrix}(0.2)^{k}&0&0\\0&(0.6)^{k}&0\\0&0&1^{k}\end{pmatrix}$ وعليه

$$A^{k}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-0.75&1&0\\-0.25&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(0.2)^{k}&0&0\\0&(0.6)^{k}&0\\0&0&1^{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0.75&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(0.2)^{k}&0&0\\-0.75.(0.2)^{k}&(0.6)^{k}&0\\-0.25.(0.2)^{k}&-(0.6)^{k}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0.75&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(0.2)^{k}&0&0\\0.75\left[(0.6)^{k}-(0.2)^{k}\right]&(0.6)^{k}&0\\-0.25\left[(0.2)^{k}+3(0.6)^{k}\right]+1&-(0.6)^{k}+1&1\end{pmatrix}$$

وعليه

$$A^{22}\approx\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

أي، على المدى البعيد، سيوجَه دخل القطاعات الثلاث بالكامل لقطاع الصناعة.

- حساب دخل القطاعات الثلاث سنة 2040. لدينا

$$X_{22} = A^{22} X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.10^7 \\ 2.10^7 \\ 3.10^7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^8 \end{pmatrix}$$

أي، سنة 2040، سيكون دخل قطاع الصناعة 100 مليون وحدة نقدية، بينما ينعدم دخلي كل من قطاعي الطاقة والكيماويات.

**تمرين 14-3.** في اقتصاد يعاني من ركود، نعتبر نموذج العَمالة التالي: كل فرد من المجتمع (العَمالة) هو إما عامل بعمل ثابت، بدون عمل (بطال) أو عامل بعمل مؤقت. ليكن $x_n$ ، $y_n$ و $z_n$ عدد العمال بعمل ثابت، بدون عمل وبعمل مؤقت في نهاية الفترة $n$ على الترتيب. نفرض أنه في الفترة التالية $(n+1)$، احتمال أن يحافظ العامل على عمله 50 % واحتمال أن يفقده 25 % واحتمال أن يحصل على عمل مؤقت 25 %، أما احتمال أن يحصل بطال على عمل دائم هو 25 % وأن يبقى دون عمل 50 % و25 % هو احتمال أن يجد عملا مؤقتا، أما صاحب العمل المؤقت فلديه احتمال 25 % للحصول على عمل دائم و25 % أن يفقد عمله و50 % أن يبقى في عمله المؤقت.

- إذا علمت أنه في سنة 2010، أعطت إحصائيات هذا الاقتصاد ما يلي: 2 مليون عامل بعمل دائم و500.000 بطال و400.000 عامل مؤقت.

- أحسب نسبة البطالة سنة 2030 بطريقة كايلي- هاملتون.

**الحل.** يمكن تلخيص معطيات التمرين في الجدول التالي

| احتمال أن يبقى ب / العامل ب | عمل ثابت | بدون عمل | بعمل مؤقت |
|---|---|---|---|
| عمل ثابت $x$ | 0.5 | 0.25 | 0.25 |
| بدون عمل $y$ | 0.25 | 0.5 | 0.25 |
| بعمل مؤقت $z$ | 0.25 | 0.25 | 0.5 |

يمكن تلخيص عمالة هذا الاقتصاد في الفترة $(n+1)$ في جملة المعادلات التالية

$$(I)\begin{cases} x_{n+1} = 0.5x_n + 0.25y_n + 0.25z_n \\ y_{n+1} = 0.25x_n + 0.5y_n + 0.25z_n, \quad n \geq 0 \\ z_{n+1} = 0.25x_n + 0.25y_n + 0.5z_n \end{cases}$$

ويمكن كتابة الجملة $(I)$ على شكل مصفوفات كما يلي

$$(I)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\\z_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5&0.25&0.25\\0.25&0.5&0.25\\0.25&0.25&0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X_{n+1}=AX_n,\ n\geq 0$$

لدينا، عمالة هذا الاقتصاد سنة 2010 يمثل $X_0$، أي

$$X_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.10^6\\5.10^5\\4.10^5\end{pmatrix}$$

وعليه، عمالة هذا الاقتصاد سنة 2030 تمثل $X_{20}$ وحسب العلاقة التراجعية $(I)$، لدينا

$$X_{20}=AX_{19}=A(AX_{18})=A^2X_{18}=...=A^{20}X_0$$

إذا، علينا حساب $A^{20}$ وعليه نحسب بشكل عام $A^k$ من أجل $k\geq 0$.

- حساب $A^k$ بطريقة كايلي–هاملتون. قبل حساب $A^k$، نتأكد أن المصفوفة $A$ قابلة للتقطير.
- إيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية ل $A$
- القيم الذاتية ل $A$. لدينا

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}0.5-\lambda&0.25&0.25\\0.25&0.5-\lambda&0.25\\0.25&0.25&0.5-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{1+1}(0.5-\lambda)\begin{vmatrix}0.5-\lambda&0.25\\0.25&0.5-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.0.25\begin{vmatrix}0.25&0.25\\0.25&0.5-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}.025\begin{vmatrix}0.25&0.5-\lambda\\0.25&0.25\end{vmatrix}$$
$$=-\lambda^3+1.5\lambda^2-0.5625\lambda+0.0625$$
$$=(1-\lambda)(\lambda-0.25)^2$$

ومنه

$$P_A(\lambda)=0\Leftrightarrow(1-\lambda)(\lambda-0.25)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-\lambda=0\\\lambda-0.25=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\\lambda=0.25\end{cases}$$

وعليه $\lambda_1=1$ قيمة ذاتية بسيطة (من الدرجة الأولى) ل $A$ ومنه $\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_1)=1$ و $\lambda_2=0.25$ قيمة ذاتية مضاعفة (من الدرجة الثانية) ل $A$ وعليه $\text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_2)=2$.

- إيجاد الأشعة الذاتية ل $A$ . لدينا
- من أجل $\lambda_1 = 1$ . ليكن

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 :$$

$$\begin{aligned} v \in E_{\lambda_1}(A) &\Leftrightarrow Av = \lambda_1 v \\ &\Leftrightarrow Av = v \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.5x + 0.25y + 0.25z \\ 0.25x + 0.5y + 0.25z \\ 0.25x + 0.25y + 0.5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

أي

$$\begin{cases} 0.5x + 0.25y + 0.25z = x \\ 0.25x + 0.5y + 0.25z = y \\ 0.25x + 0.25y + 0.5z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.5x + 0.25y + 0.25z = 0 .......(1) \\ 0.25x - 0.5y + 0.25z = 0 .........(2) \\ 0.25x + 0.25y - 0.5z = 0 .........(3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) - (2) \Leftrightarrow -0.75x + 0.75y = 0 \\ (2) - (3) \Leftrightarrow -0.75y + 0.75z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \\ y \in R \end{cases}$$

ومنه

$$E_{\lambda_1}(A) = E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / y \in R \right\}$$

إذا

$$E_1(A) = vect\left( v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ومنه $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي ل $A$ مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ وعليه $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_1) = \dim E_1 = 1$ .

- من أجل $\lambda_2 = 0.25$ . ليكن

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 :$$

$$\begin{aligned} v \in E_{\lambda_2}(A) &\Leftrightarrow Av = \lambda_2 v \\ &\Leftrightarrow Av = 0.25v \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.25\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.5x+0.25y+0.25z \\ 0.25x+0.5y+0.25z \\ 0.25x+0.25y+0.5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25x \\ 0.25y \\ 0.25z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

أي

$$\begin{cases} 0.5x+0.25y+0.25z = 0.25x \\ 0.25x+0.5y+0.25z = 0.25y \\ 0.25x+0.25y+0.5z = 0.25z \end{cases} \Leftrightarrow 0.25x+0.25y+0.25z = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x+y+z = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y-z \\ y, z \in R \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه

$$E_{\lambda_2}(A) = E_{0.25}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / y, z \in R \right\}$$

إذا

$$E_{0.25}(A) = vect\left( v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ومنه $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاعان ذاتيان لـ $A$ مرافقان للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 0.25$ وعليه $\text{mult}_{\text{geo}}(\lambda_2) = \dim E_{0.25} = 2$ . نلاحظ أن $\forall \lambda_i, i \in \{1,2\} : \text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_i) = \text{mult}_{\text{geo}}(\lambda_i)$ وعليه $A$ قابلة للتقطير.

- حساب $A^k$ بطريقة كايلي-هاملتون

لدينا $\deg(P_A(\lambda)) = 3$ ومنه $\deg(R_n(\lambda)) = 2$ ، أي

$$R_n(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \lambda^k$$

لكن $A^k = R_n(A)$ ومنه

$$A^k = a_2A^2 + a_1A + a_0I_3$$

- إيجاد المعاملات $a_0$، $a_1$ و $a_2$. لدينا

$$\lambda^k = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

ل $A$ قيمتان ذاتيتان إحداهما بسيطة هي $\lambda_1 = 1$ والأخرى مضاعفة هي $\lambda_2 = 0.25$، بحيث $n_1 = 1$ و $n_2 = 2$ وعليه

$$\begin{cases} \left(\lambda_1^k\right)^{(n_1-j)} = R_n\left(\lambda_1\right)^{(n_1-j)} = \left(a_2\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0\right)^{(n_1-j)} & , j = \overline{1,n_1} \\ \left(\lambda_2^k\right)^{(n_2-j)} = R_n\left(\lambda_2\right)^{(n_2-j)} = \left(a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0\right)^{(n_2-j)} & , j = \overline{1,n_2} \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} \left(1^k\right)^{(1-j)} = \left(a_2 + a_1 + a_0\right)^{(1-j)} & , j = \overline{1,1} = 1 \\ \left(\lambda_2{}^k\right)^{(2-j)} = \left(a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0\right)^{(2-j)} & , j = \overline{1,2} \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} (1)^{(1-1)} = \left(a_2 + a_1 + a_0\right)^{(1-1)} \\ \left(\lambda_2{}^k\right)^{(2-1)} = \left(a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0\right)^{(2-1)} & , j = 1 \\ \left(\lambda_2{}^k\right)^{(2-2)} = \left(a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0\right)^{(2-2)} & , j = 2 \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} (1)^{(0)} = \left(a_2 + a_1 + a_0\right)^{(0)} \\ \left(\lambda_2{}^k\right)^{(1)} = \left(a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0\right)^{(1)} \\ \left(\lambda_2{}^k\right)^{(0)} = \left(a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0\right)^{(0)} \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} 1 = a_2 + a_1 + a_0 \\ k\lambda_2{}^{k-1} = 2a_2\lambda_2 + a_1 \\ \lambda_2{}^k = a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0 \end{cases}$$

ومنه، نحصل على جملة المعادلات التالية

$$\begin{cases} 1 = a_2 + a_1 + a_0 \\ k\left(0.25\right)^{k-1} = \dfrac{1}{2}a_2 + a_1 \\ \left(0.25\right)^k = \dfrac{1}{16}a_2 + \dfrac{1}{4}a_1 + a_0 \end{cases}$$

بحل الجملة الأخيرة، نجد

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2-3k}{9}\left(0.25\right)^{k-1} + \dfrac{1}{9} \\ a_1 = \dfrac{15k+2}{9}\left(0.25\right)^{k-1} - \dfrac{8}{9} \\ a_2 = \dfrac{16}{9} - \dfrac{16\left(3k+1\right)}{9}\left(0.25\right)^k \end{cases}$$

لكن $A^k = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_3$

- حساب $A^2$ . لدينا

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$A^k = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_3$$
$$= \left[\frac{16}{9} - \frac{16(3k+1)}{9}(0.25)^k\right]\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \left[\frac{15k+2}{9}(0.25)^{k-1} - \frac{8}{9}\right]\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$+ \left[\frac{2-3k}{9}(0.25)^{k-1} + \frac{1}{9}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{(0.25)^{k-1}}{6} + \frac{1}{3} & -\frac{(0.25)^{k-1}}{12} + \frac{1}{3} & -\frac{(0.25)^{k-1}}{12} + \frac{1}{3} \\ -\frac{(0.25)^{k-1}}{12} + \frac{1}{3} & \frac{(0.25)^{k-1}}{6} + \frac{1}{3} & -\frac{(0.25)^{k-1}}{12} + \frac{1}{3} \\ -\frac{(0.25)^{k-1}}{12} + \frac{1}{3} & -\frac{(0.25)^{k-1}}{12} + \frac{1}{3} & \frac{(0.25)^{k-1}}{6} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- حساب عمالة هذا الاقتصاد سنة 2030 (أي $X_{20}$). لدينا

$$X_{20} = A^{20} X_0 \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.10^6 \\ 5.10^5 \\ 4.10^5 \end{pmatrix}$$
$$\approx \begin{pmatrix} 966667 \\ 966667 \\ 966667 \end{pmatrix}$$

وعليه، تكون نسبة البطالة سنة 2030، $\frac{1}{3} \simeq 34\%$ ونلاحظ أن

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

وعليه، على المدى البعيد، ستثبُت نسب كل من البطالة، العاملين والعاملين بعمل مؤقت على $34\%$ .

## 4−2− تمارين للحل

**تمرين 14−4.** هل المصفوفات التالية قابلة للتقطير؟

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-4&0\\0&5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

**تمرين 14−5.** لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(w_n)_{n\geq 0}$ ثلاث متتاليات معرفة بالعلاقة التراجعية التالية

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1}+w_{n-1}, & n\geq 1\\ v_n = v_{n-1}+w_{n-1}, & n\geq 1\\ w_n = 2w_{n-1}, & n\geq 1\end{cases}$$

– أكتب كلا من المتتاليات الثلاث السابقة بدلالة $n$ و $w_0, v_0, u_0$ .

# قائمة

# المراجع

## I) بالعربية

1- غوثي بوكلي حسن. *الوجيز في الرياضيات. ط 2.* ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004.
2- فتحي خليل حمدان. *الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية. ط 4.* دار وائل للنشر، عمان- الأردن، 2014.
3- حسن ياسين طعمة. *الرياضيات للاقتصاد والعلوم الإدارية والمالية*. دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2010.
4- سلطان محمد عبد الحميد. *رياضيات الأعمال للتجاريين.* المكتبة العصرية، مصر، 2007.
5- عقيل جاسم عبد الله، إبراهيم غبريال. *مقدمة في الاقتصاد الرياضي. ط 2.* دار مجدلاوي للنشر، عمان- الأردن، 1999.
6- جاكلين فوراستييه. *الرياضيات التطبيقية على الاقتصاد*، ترجمة د. محمد الحجار. الكتاب للنشر والتوزيع، مصر، 1989.
7- عمر صخري. *مبادئ الاقتصاد الرياضي*. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1984.
8- ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. *الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية. ط 2.* دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2010.

## II) بالأجنبية

1- Yadolah Dodge. *Mathématiques de base pour économistes.* Springer, Paris, 2007.
2- Edward T Dowling. *Introduction to mathematical economics. 3rd E.* The McGraw-Hill Companies, New York, 2001.
3- Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. *Mathématiques pour l'économie. Analyse-Algèbre. 5e É.* Dunod, Paris, 2015.
4- The Institute of Cost Accountants of India. *Paper 4: Fundamentals of business mathematics and statistics (FMS). 2nd E.* Repro India Limited, India, 2014.
5- G. Kreweras. *Premiers éléments du calcul matriciel.* Cahiers de bureau universitaire de recherche opérationnelle, Série Recherche, tome 8, pp. 3-41, Numdam, 1966.
6- Guillaume Legendre. *Méthodes numériques.* PSL Research University, 2013.
7- Stéphane Rossignol. *Mathématiques en économie- gestion.* Dunod, Paris, 2015.
8- Géraud Sarrebourse de La Guillonnière. *Ensembles.* Licence. Ensembles, 2012. <cel-00765690>.
9- S. M. Shahidul Islam. *Business mathematics*. Abir Publications, Dhaka, 2004.
10- Laurent Smoch. *Diagonalisation.* Université du Littoral, France, 2013.
11- Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. *Essential mathematics for economics analysis. 4th E.* Pearson Education Limited, London, 2012.
12- Viatcheslav Vinogradov. *A Cook-book of mathematics.* CERGE-EI Lecture Notes, Prague, 1999.