وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة الدكتور مولاي الطاهر بسعيدة
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة بيداغوجية بعنوان

تمارين محلولة في الرياضيات لطلبة السنة الأولى ليسانس علوم اقتصادية

إعداد الدكتورة: بوعكة عائشة
أستاذة محاضرة "ب" بقسم العلوم الاقتصادية

السنة الجامعية:2023/2022

الفهرس العام

الصفحة	المحتوى
VI	**قائمة المختصرات**
أ	**مقدمة**
1	**الفصل الأول: التحليل التوفيقي**
2	تذكير بالدروس
5	تمارين
12	**الفصل الثاني: مفاهيم عامة حول المتتاليات العددية**
13	تذكير بالدروس
16	تمارين
22	**الفصل الثالث: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية**
23	تذكير بالدروس
26	تمارين
30	**الفصل الرابع: المشتقات**
31	تذكير بالدروس
35	تمارين
39	**الفصل الخامس: الدوال الأصلية وحساب التكامل**
40	تذكير بالدروس
45	تمارين
50	**الفصل السادس: المعادلات التفاضلية**
51	تذكير بالدروس
54	تمارين
62	**الفصل السابع: الدوال ذات متغيرين**
63	تذكير بالدروس
69	تمارين
81	**الفصل الثامن: مفاهيم عامة حول المصفوفات والعمليات عليها**
82	تذكير بالدروس
86	تمارين
94	**الفصل التاسع: المحددات وطرق حساب مقلوب مصفوفة**

تذكير بالدروس	95
تمارين	98
الفصل العاشر: جمل المعادلات الخطية	**113**
تذكير بالدروس	114
تمارين	117
قائمة المراجع	**125**

I) بالعربية

ط	الطبعة
ص	الصفحة
ص ص	من الصفحة إلى الصفحة

I) بالفرنسية

É	Édition
p	الصفحة
pp	من الصفحة إلى الصفحة
Op. Cit	المرجع السابق
Ibid	المرجع نفسه

I) بالانجليزية

E	Edition
Idem	المرجع السابق
Ibid	المرجع نفسه

مقدمة

الدراسات الاقتصادية الحديثة تهدف في معظمها إلى صياغة نظرياتها في إطار علاقات رياضية للانتقال بها من الجانب الوصفي إلى الكمي باستخدام فرضيات اقتصادية أساسية مما يساعد في عرض النظرية الاقتصادية بصورة واضحة وبالتالي سهولة استخلاص النتائج وكذا تحليلها.

هذا المطبوع البيداغوجي هو تتمة لسابقه الموسوم ب "*محاضرات في الرياضيات لطلبة السنة الأولى ليسانس علوم اقتصادية*"، حيث إضافة للتمارين المحلولة في هذا الأخير، ارتأينا التعمق أكثر في مضمون المحاضرات بإضافة تمارين مفصلة وأخرى تطبيقية في علم الاقتصاد. يمكن الاعتماد على هذا المُؤلَف –دون الرجوع للمطبوع البيداغوجي سالف الذكر– لكونه يحتوي في كل فصل على تذكير بالدروس وكذا تمارين محلولة.

المُؤلَف يحتوي على عشر فصول. في الفصل الأول، تطرقنا إلى التحليل التوفيقي، حيث تعرفنا على أهم الطرق المتبعة لتجميع عناصر مجموعة، أما الفصل الثاني فقد خصصناه لدراسة المتتاليات العددية مُركزين على تطبيقاتها الاقتصادية.

الفصل الثالث يهتم بدراسة الدوال الأسية واللوغاريتمية، أما اشتقاق دالة وتطبيقاتها في الاقتصاد فتطرقنا إليه في الفصل الرابع.

الفصل الخامس مخصص لدراسة الدوال الأصلية وحساب التكامل، مركزين على أنواعه، خواصه وكذا طرق حسابه وتطبيقاته الاقتصادية، كما تطرقنا في الفصل السادس إلى المعادلات التفاضلية من الرتبتين الأولى والثانية، بخصوص الفصل السابع، فتطرقنا إلى الدوال ذات متغيرين، حيث ركزنا على المشتقات الجزئية والقيم الحدية لهذه الدوال.

الفصل الثامن احتوى على مفاهيم عامة حول المصفوفات والعمليات عليها، أما المحددات وطرق حساب مقلوب مصفوفة فركزنا عليها في الفصل التاسع، بخصوص الفصل العاشر، تطرقنا إلى تطبيقات المصفوفات في حل جمل معادلات خطية.

الفصل الأول

التحليل التوفيقي

للتحليل التوفيقي دور محوري في نظرية الاحتمالات ويتمثل ذلك في عدد طرق تجميع عناصر مجموعة تبعا لوجود التكرار أو عدمه، مع الأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر من عدمه وتتمثل هذه الطرق في التبديلات، الترتيبات والتوفيقات التي تسمح بمعرفة التجميعات الممكنة دون الحاجة إلى كتابتها جميعا.

لتكن لدينا مجموعة مكونة من n عنصرا.

1- التبديلات (Permutations)

تعريف 1-1. *نسمي تبديلة ل n عنصرا، عدد الطرق التي يُوضع بها n عنصرا بتراتيب مختلفة.* [1]

وهنا نميز حالتين

1-1- التبديلات بدون تكرار (Permutations of n different things)

تعريف 1-2. *عدد الطرق التي يُرتب بها n عنصرا غير مكرر تسمى تبديلة بدون تكرار ونكتب " $n!$ " ونقرأ " n عاملي"*، بحيث

$n! = n(n-1)(n-2)...2.1$ مع $0! = 1$. [2]

1-2- التبديلات بتكرار (Permutations of n things all different)

تعريف 1-3. *نسمي تبديلة بتكرار، عدد الطرق التي يُرتب بها n عنصرا يحوي k عنصرا غير مكرر ونكتب*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

بحيث، $n_i,\ i=\overline{1,k}$ *عدد مرات تكرار العنصر i من n ،* مع $n_1+n_2+...+n_k=n$. [3]

خواص 1-1. *لدينا*

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)...3.2.1 \\ &= n(n-1)! \\ &= n(n-1)(n-2)! \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &= n(n-1)(n-2)...(n-p+1)(n-p)!; \qquad p<n \end{aligned}$$ [4]

لتكن لدينا مجموعة من n عنصرا ونختار منها p عنصرا، بحيث $n<p$، في هذه الحالة ينتج لنا إما ترتيبة أو توفيقة.

2- الترتيبات (Permutations of n different things taken p things)

تعريف 1-4. *نسمي ترتيبة، عدد الطرق التي يُرتب بها p عنصرا من n عنصرا.* [5]

وهنا نميز حالتين

---

(1) جاكلين فوراستييه. *الرياضيات التطبيقية على الاقتصاد*، ترجمة د. محمد الحجار. الكتاب للنشر والتوزيع، مصر، 1989، ص.73.

(2) S. M. Shahidul Islam. *Business mathematics*. Abir Publications, Dhaka, 2004., pp. 38-39.

(3) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص ص. 81-82.

(4) S. M. Shahidul Islam. Idem, p. 39.

(5) Ibid, p. 40.

2-1- الترتيبات بتكرار (Permutations of things which may be repeated)

تعريف 1-5. عدد الطرق التي يُرتب بها p عنصرا مكررا من n عنصرا، تسمى *ترتيبة بتكرار* ونكتب n^p.[1]

2-2- الترتيبات بدون تكرار (Permutations of n different things taken p at a time)

تعريف 1-6. نسمي *ترتيبة بدون تكرار*، عدد الطرق التي يُرتب بها p عنصرا غير مكرر من n عنصرا ونكتب " A_n^p " ونقرأ " A ، n ، p" وتعني عدد الترتيبات لـ n عنصرا في مجموعات جزئية بها p عنصرا، بحيث

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (2)$$

خواص 1-2

1) لدينا

$$\begin{aligned} A_n^p &= \frac{n!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} \\ &= n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \end{aligned}$$

2) بوضع $n=p$ في العلاقة السابقة، نجد

$$\begin{aligned} A_n^n &= n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1) \\ &= n(n-1)(n-2)\dots 2.1 \\ &= n! \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} A_n^n &= \frac{n!}{(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{0!} \quad (3) \\ &= n! \end{aligned}$$

3) $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$

4) $A_n^n = A_n^{n-1}$ (4)

3- التوفيقات (Combinations)

تعريف 1-7. عدد المجموعات الجزئية من p عنصرا غير مرتب التي يمكن تشكيلها من n عنصرا، تسمى *توفيقة*.(5)

ونميز حالتين

---

(1) The Institute of Cost Accountants of India. *Paper 4: Fundamentals of business mathematics and statistics (FMS)*. 2nd E. Repro India Limited, India, 2014., p. 2.40.

(2) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص. 74.

(3) S. M. Shahidul Islam. Idem, pp. 39-40.

(4) Ibid, pp. 48-50.

(5) The Institute of Cost Accountants of India. Idem, p. 2.45.

3-1- التوفيقات بدون تكرار (Combinations of things all different)

تعريف 1-8. *نسمي توفيقة بدون تكرار، عدد المجموعات الجزئية من p عنصرا غير مرتب وغير مكرر، التي يمكن تشكيلها من n عنصرا ونكتب " C_n^p " أو " $\binom{n}{p}$ " ونقرأ على التوالي " C ، n ، p" أو " n ، p"، بحيث*

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (1)$$

خواص 1-3

(1

$$\begin{aligned} C_n^p &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)(n-p)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!} \end{aligned} \quad (2)$$

(2

$$\begin{aligned} C_n^p &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{1}{p!}\frac{n!}{(n-p)!} \\ &= \frac{1}{p!}A_n^p \\ &= \frac{A_n^p}{p!} \end{aligned}$$

وعليه $A_n^p = C_n^p . p!$

(3 $C_n^1 = n, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^0 = 1$ *(3)*

(4 $C_n^p = C_n^{n-p}, \quad 0 \le p \le n$

(5 $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}, \quad 0 \le p \le n$ *(4)*

(6 $C_n^p + C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p-2} = C_{n+1}^p, \quad 0 \le p \le n$ *(5)*

(7 $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}, \quad 0 \le p \le n$ *(6)*

3-2- التوفيقات بتكرار (Combinations of things not all different)

تعريف 1-9. *نسمي توفيقة بتكرار، عدد المجموعات الجزئية من p عنصرا غير مرتب ومكرر، التي يمكن تشكيلها من n عنصرا ونكتب*

---

(1) S. M. Shahidul Islam. Idem, p. 44.

(2) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص. 77.

(3) The Institute of Cost Accountants of India. Idem, p. 2.45.

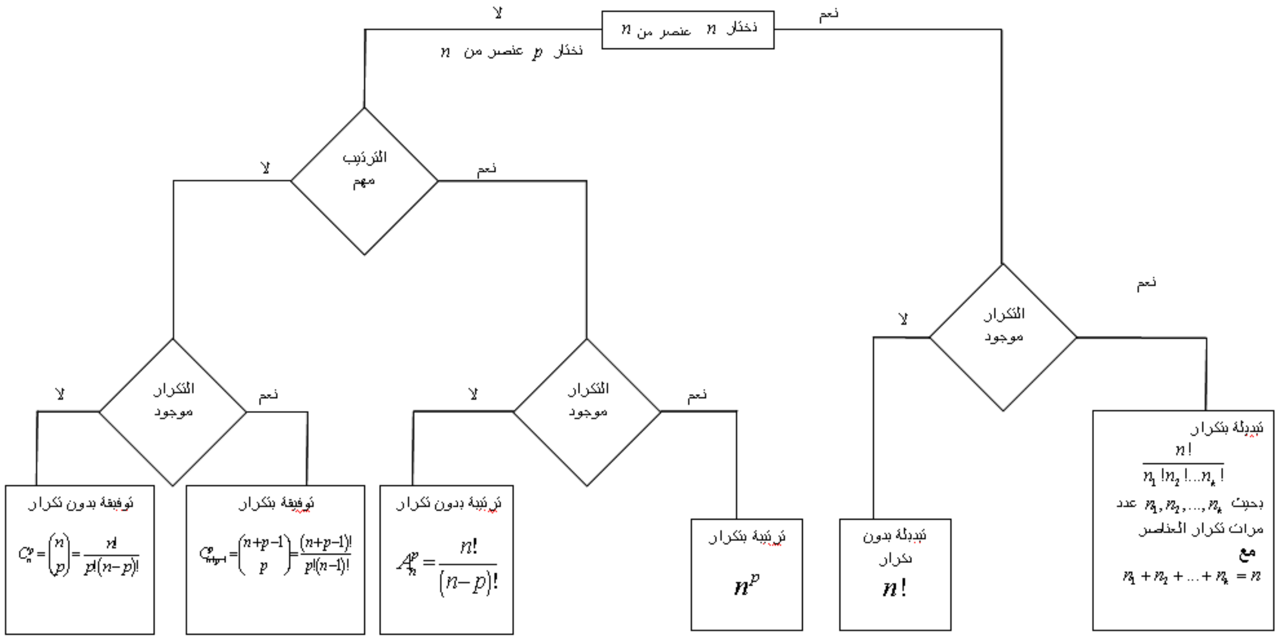
(4) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص. 78.

(5) S. M. Shahidul Islam. Idem, p. 51.

(6) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. *Essential mathematics for economics analysis. 4th E.* Pearson Education Limited, London, 2012, p. 58.

$$C_{n+p-1}^{p}=\binom{n+p-1}{p}=\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

يمكن جمع حالات التحليل التوفيقي السابقة في المخطط التالي



شكل 1-1- مخطط يوضح التحليل التوفيقي

4- تمارين

تمرين 1-1. كم كلمة مرور من 28 حرفا يمكن تشكيلها من حروف الأبجدية العربية ؟

الحل. عدد حروف الأبجدية العربية هو 28 حرفا ومنه $n=28$ ولا يوجد تكرار في الحروف وعليه، عدد كلمات المرور هو $n!=28!$.

تمرين 1-2. بكم طريقة يمكن وضع جنبا إلى جنب سبعة كتب مختلفة على رف مكتبة ؟

الحل. لدينا سبعة كتب مختلفة، أي $n=7$ دون تكرار الكتب (الكتب مختلفة) ومنه، عدد الطرق لصف هذه الكتب هي

$$n!=7!=7.6.5.4.3.2.1=5040 \quad \text{طريقة}$$

تمرين 1-3. كم عددا من عشرة أرقام يمكن تشكيله من الأرقام من 0 إلى 9 ؟

الحل. لدينا عشرة أرقام من 0 إلى 9، أي $n=10$ دون تكرار لأي رقم وعليه عدد الأعداد من عشرة أرقام هو

$$n!=10!=10.9.8.7.6.5.4.3.2.1=3628800 \quad \text{عددا}$$

تمرين 1-4. كم كلمة -بمعنى أو بدون معنى- يمكن تشكيلها من حروف كلمة "رياضيات" ؟

الحل. كلمة "رياضيات" تتألف من سبعة حروف مكررة هي { ر، ي، أ، ض، ي، أ، ت}، أي $n=7$، بحيث الحرف "ر" مكتوب مرة واحدة، أي $n_1=1$، الحرف "ي" مكرر مرتين، أي $n_2=2$ والحرف "أ" مكرر مرتين، أي

$n_3=2$، أما الحرفان "ت" و "ض" فمكتوبان مرة واحدة، أي $n_4=1$ و $n_5=1$ على التوالي، مع

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=1+2+2+1+1=7=n$$

وعليه، عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من حروف كلمة " رياضيات" هي

$$\frac{7!}{1!2!2!1!1!}=1260 \quad \text{كلمة}$$

تمرين 1−5. صندوق به ثلاث كريات صفراء وأربع كريات خضراء وخمس كريات حمراء، لا نميز بينها باللمس.

- نسحب عشوائيا كريتين على التوالي وبإرجاع. أوجد عدد الحالات الممكنة.
- ما هو عدد الحالات الممكنة فيما يلي
- الكرية الأولى خضراء ؟
- الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون ؟
- الكريتان المسحوبتان لهما اللون نفسه ؟

الحل

- الصندوق به 12 كرية، أي $n=12$، نسحب كريتين، أي $p=2$. السحب على التوالي وبإرجاع، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p وعليه، عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين هو

$$n^p=12^2=144 \ \text{حالة}$$

- سحب الكرية الأولى خضراء، معناه 4^1 حالة ممكنة ونعيد الكرية المسحوبة إلى الصندوق ونسحب كرية واحدة مرة أخرى من 12 كرية، أي 12^1 ومنه، عدد الحالات الممكنة لسحب الكرية الأولى خضراء هو

$$4^1.12^1=48 \ \text{حالة}$$

- الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون، معناه أن تكون الكرية الأولى صفراء والثانية خضراء أو العكس، أي $2\left(3^1.4^1\right)$ حالة، أو الكرية الأولى صفراء والثانية حمراء أو العكس، أي $2\left(3^1.5^1\right)$ حالة، أو الكرية الأولى خضراء والثانية حمراء أو العكس، أي $2\left(4^1.5^1\right)$ حالة وعليه، مجموع الحالات الممكنة لسحب كريتين مختلفتين في اللون هو

$$2\left(3^1.4^1\right)+2\left(3^1.5^1\right)+2\left(4^1.5^1\right)=2\left(3.4+3.5+4.5\right)=94 \ \text{حالة}$$

- الكريتان المسحوبتان لهما اللون نفسه، معناه إما أن تكون الكريتان صفراوين، أي 3^2 حالة، أو خضراوين، أي 4^2 حالة، أو حمراوين، أي 5^2 حالة وعليه، مجموع الحالات الممكنة لسحب كريتين لهما اللون نفسه هو

$$3^2+4^2+5^2=50 \ \text{حالة}$$

تمرين 1−6. استخدم معطيات وأسئلة التمرين 1−5، لكن في حالة سحب كريتين على التوالي وبدون إرجاع.

الحل

- الصندوق به 12 كرية، أي $n=12$، نسحب كريتين، أي $p=2$. السحب على التوالي وبدون إرجاع، أي لدينا حالة ترتيبية بدون تكرار A_n^p وعليه، عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين هو

$$\begin{aligned} A_n^p = A_{12}^2 &= \frac{12!}{(12-2)!} \\ &= \frac{12!}{10!} = \frac{12.11.10!}{10!} \\ &= 12.11 = 132 \end{aligned}$$

- سحب الكرية الأولى خضراء دون إرجاع، معناه A_4^1 حالة ممكنة فيتبقى في الصندوق 11 كرية، نسحب منها الكرية الثانية المتبقية، أي A_{11}^1 ومنه، عدد الحالات الممكنة لسحب الكرية الأولى خضراء هو

$$\begin{aligned} A_4^1.A_{11}^1 &= \frac{4!}{(4-1)!}.\frac{11!}{(11-1)!} \\ &= \frac{4!}{3!}.\frac{11!}{10!} \\ &= \frac{4.3!}{3!}.\frac{11.10!}{10!} \\ &= 4.11 = 44 \end{aligned}$$

- الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون، معناه أن تكون الكرية الأولى صفراء والثانية خضراء أو العكس، أي $2\left(A_3^1.A_4^1\right)$ حالة، أو الكرية الأولى صفراء والثانية حمراء أو العكس، أي $2\left(A_3^1.A_5^1\right)$ حالة، أو الكرية الأولى خضراء والثانية حمراء أو العكس، أي $2\left(A_4^1.A_5^1\right)$ حالة وعليه، مجموع الحالات الممكنة لسحب كريتين مختلفتين في اللون هو

$$\begin{aligned} 2\left(A_3^1.A_4^1\right)+2\left(A_3^1.A_5^1\right)+2\left(A_4^1.A_5^1\right) &= 2\left(A_3^1.A_4^1+A_3^1.A_5^1+A_4^1.A_5^1\right) \\ &= 2\left[\frac{3!}{(3-1)!}.\frac{4!}{(4-1)!}+\frac{3!}{(3-1)!}.\frac{5!}{(5-1)!}+\frac{4!}{(4-1)!}.\frac{5!}{(5-1)!}\right] \\ &= 2\left[\frac{3!}{2!}.\frac{4!}{3!}+\frac{3!}{2!}.\frac{5!}{4!}+\frac{4!}{3!}.\frac{5!}{4!}\right] \\ &= 2\left[\frac{4.3.2!}{2!}+\frac{3.2!}{2!}.\frac{5.4!}{4!}+\frac{5.4.3!}{3!}\right] \\ &= 2\left(4.3+3.5+54\right) = 94 \end{aligned}$$

- الكريتان المسحوبتان لهما اللون نفسه، معناه إما أن تكون الكريتان صفراوين، أي A_3^2 حالة، أو خضراوين، أي A_4^2 حالة، أو حمراوين، أي A_5^2 حالة وعليه، مجموع الحالات الممكنة لسحب كريتين لهما اللون نفسه هو

$$\begin{aligned} A_3^2+A_4^2+A_5^2 &= \frac{3!}{(3-2)!}+\frac{4!}{(4-2)!}+\frac{5!}{(5-2)!} \\ &= \frac{3!}{1!}+\frac{4!}{2!}+\frac{5!}{3!} \\ &= 3!+\frac{4.3.2!}{2!}+\frac{5.4.3!}{3!} \\ &= 3.2.1+4.3+5.4 = 38 \end{aligned}$$

تمرين 1-7. كم عددا من رقمين يمكن تشكيله من الأرقام التالية 2، 1، 5، 7 ؟

الحل. عدد الأرقام هو أربعة، أي $n=4$، نختار منها اثنين لتشكيل عدد من رقمين، أي $p=2$. في تشكيل الأعداد الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p وعليه، عدد الأعداد من رقمين هو

$4^2=16$ عددا

تمرين 1−8. في سباق للخيول، يتنافس عشرون مشتركا. ما هو عدد التشكيلات الممكنة للفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى ؟

الحل. لدينا 20 مشتركا، أي $n=20$، عدد الفائزين هو 3، أي $p=3$. في السباق، الترتيب مهم والتكرار غير موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بدون تكرار A_n^p وعليه، عدد التشكيلات الممكنة للفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى هو

$$\begin{aligned} A_n^p &= A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} \\ &= \frac{20!}{17!} = \frac{20.19.18.17!}{17!} \\ &= 20.19.18 = 6840 \end{aligned}$$

تمرين 1−9

1) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة " تذبذب" ؟

2) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة السابقة شرط أن يُكتب حرفا "ذ" متتابعين ؟

الحل

1) كلمة "تذبذب" تتألف من خمسة حروف مكررة هي { ت، ذ، ب، ذ، ب}، أي $n=5$، بحيث الحرف "ت" مكتوب مرة واحدة، أي $n_1=1$، الحرف "ذ" مكرر مرتين، أي $n_2=2$ والحرف "ب" مكرر مرتين، أي $n_3=2$، مع $n_1+n_2+n_3=1+2+2=5=n$ وعليه، يمكن ترتيب حروف كلمة " تذبذب" ب

$$\frac{5!}{1!2!2!} = \frac{5.4.3.2!}{1.2.1.2!} = 5.2.3 = 30 \quad \text{طريقة}$$

2) عند كتابة حرفي "ذ" متتابعين، فإن كلمة " تذبذب" يتبقى منها ثلاثة حروف مكررة هي { ت، ب، ب}، أي $n=3$، بحيث الحرف "ت" مكتوب مرة واحدة، أي $n_1=1$، الحرف والحرف "ب" مكرر مرتين، أي $n_2=2$، مع $n_1+n_2=1+2=3=n$ وعليه، يمكن ترتيب حروف كلمة " تذبذب" شرط أن يُكتب حرفا "ذ" متتابعين ب

$$\frac{3!}{1!2!} = \frac{3.2!}{1.2!} = 3 \quad \text{طُرق}$$

تمرين 1−10. كم كلمة من أربعة حروف تبدأ بحرف "م" يمكن تشكيلها من الحروف التالية "س، ل، م، أ، ه، و" ؟

الحل. لدينا ستة حروف، أي $n=6$، نختار منها ثلاثة حروف (لأننا نريد تشكيل كلمة من أربعة حروف تبدأ بحرف "م")، أي $p=3$. في تشكيل الكلمات، الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p وعليه، عدد الكلمات من أربعة حروف تبدأ بحرف "م" يمكن تشكيلها من الحروف السابقة هو

$6^3=216$ كلمة

تمرين 1−11. كم عددا طبيعيا محصورا بين 2000 و4000 (أي $2000<x<4000$) يمكن تشكيله من الأرقام التالية 0، 3، 5، 2، 4 ؟

الحل. لدينا خمسة أرقام، أي $n=5$، نختار منها أربعة أرقام لأن $2000<x<4000$ وعليه رقم الآلاف هو أحد الرقمين 2 أو 3، إذا تبقى أن نختار ثلاثة أرقام من خمسة، أي $p=3$ ونستثني العدد 2000 لأن $2000<x$، في تشكيل الأعداد، الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p ومنه، عدد الأعداد الطبيعية

المحصورة بين 2000 و 4000 التي يمكن تشكيلها من الأرقام السابقة هو

$$2.5^3 - 1 = 249 \quad \text{عددا}$$

تمرين 1−12. كم عددا طبيعيا من أربعة أرقام وأكبر من 6000 يمكن تشكيله من الأرقام التالية 6، 3، 8، 5، 1 ؟

الحل. لدينا خمسة أرقام، أي $n = 5$، نختار منها أربعة أرقام وحسب الأرقام المتاحة فإن رقم الآلاف هو أحد الرقمين 6 أو 8، إذا تبقى أن نختار ثلاثة أرقام من خمسة، أي $p = 3$، في تشكيل الأعداد، الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p ومنه، عدد الأعداد الطبيعية من أربعة أرقام والأكبر من 6000 التي يمكن تشكيلها من الأرقام السابقة هو

$$2.5^3 = 250 \quad \text{عددا}$$

تمرين 1−13. فوج به 30 طالبا منهم 10 طالبات، نريد تشكيل فوج جزئي من 8 طلاب. ما هو عدد الحالات الممكنة ؟

ما عدد الأفواج الجزئية الممكنة في كل حالة مما يلي

- أن يضم الفوج الجزئي طالبتين ؟
- ألا يضم الفوج الجزئي أي طالب ذكر ؟
- أن يضم الفوج الجزئي ست طالبات على الأقل ؟
- أن يضم الفوج الجزئي طالبتين على الأكثر ؟

الحل

- الفوج به 30 طالبا، أي $n = 30$ ونختار منه 8 طلاب، أي $p = 8$. بما أنه لا يوجد تكرار أو ترتيب فإنها حالة توفيقة بدون تكرار، أي $C_n^p = \binom{n}{p}$ ومنه عدد الأفواج الجزئية الممكنة هو

$$\begin{aligned} C_{30}^8 = \binom{30}{8} &= \frac{30!}{8!(30-8)!} \\ &= \frac{30!}{8!22!} \\ &= \frac{30.29.28.27.26.25.24.23.22!}{8.7.6.5.4.3.2.1.22!} \\ &= 29.27.13.25.23 = 5852925 \end{aligned}$$

أي، يمكن تشكيل 5852925 فوجا جزئيا من 8 طلاب من مجموع 30 طالبا.

- أن يضم الفوج الجزئي طالبتين، معناه $C_{10}^2 = \binom{10}{2}$ وست طلبة المتبقيين نختارهم من 20 طالبا، أي $C_{20}^6 = \binom{20}{6}$ وعليه عدد الأفواج الجزئية الممكنة هو

$$\binom{10}{2}.\binom{20}{6}=\frac{10!}{2!(10-2)!}.\frac{20!}{6!(20-6)!}$$
$$=\frac{10!}{2!8!}.\frac{20!}{6!14!}$$
$$=\frac{10.9.8!}{2.1.8!}.\frac{20.19.18.17.16.15.14!}{6.5.4.3.2.1.14!}$$
$$=5.9.19.17.8.15=1744200$$

أي، يمكن تشكيل 1744200 فوجا جزئيا يضم طالبتين.

– ألا يضم الفوج الجزئي أي طالب ذكر، معناه أنها تضم فقط الطالبات، أي

$$\binom{10}{8}=\frac{10!}{8!(10-8)!}$$
$$=\frac{10!}{8!2!}$$
$$=\frac{10.9.8!}{2.1.8!}$$
$$=5.9=45$$

وعليه يمكن تشكيل 45 فوجا جزئيا لا يضم أي طالب ذكر.

– أن يضم الفوج الجزئي ست طالبات على الأقل، معناه ست طالبات، أي $\binom{10}{6}$ وطالبين، أي $\binom{20}{2}$ أو سبع طالبات، أي $\binom{10}{7}$ وطالب واحد، أي $\binom{20}{1}$ أو ثماني طالبات، أي $\binom{10}{8}$ وعليه عدد الأفواج الجزئية الممكنة هو

$$\binom{10}{6}.\binom{20}{2}+\binom{10}{7}.\binom{20}{1}+\binom{10}{8}$$
$$=\frac{10!}{6!4!}.\frac{20!}{2!18!}+\frac{10!}{7!3!}.\frac{20!}{1!19!}+45$$
$$=\frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!}.\frac{20.19.18!}{2.1.18!}+\frac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!}.\frac{20.19!}{1.19!}+45$$
$$=10.3.7.10.19+10.3.4.20+45=42345$$

وعليه يمكن تشكيل 42345 فوجا جزئيا يضم ست طالبات على الأقل.

– أن يضم الفوج الجزئي طالبتين على الأكثر، معناه طالبتين، أي $\binom{10}{2}$ وست طلبة، أي $\binom{20}{6}$ أو طالبة واحدة، أي $\binom{10}{1}$ وسبع طلبة، أي $\binom{20}{7}$ أو لا يوجد أي طالبة، أي $\binom{10}{0}$ ويوجد ثماني طلبة، أي $\binom{20}{8}$ ومنه عدد الأفواج الجزئية الممكنة هو

$$\binom{10}{2}.\binom{20}{6}+\binom{10}{1}.\binom{20}{7}+\binom{20}{8}=1744200+\frac{10!}{1!9!}.\frac{20!}{7!13!}+\frac{20!}{8!12!}$$

$$=1744200+\frac{10.9!}{1.9!}.\frac{20.19.18.17.16.15.14.13!}{7.6.5.4.3.2.1.13!}$$

$$+\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12!}{8.7.6.5.4.3.2.1.12!}$$

$$=1744200+10.19.17.16.15+19.17.15.7.13$$

$$=2960295$$

وعليه يمكن تشكيل 2960295 فوجا جزئيا يضم طالبتين على الأكثر.

الفصل الثاني

مفاهيم عامة حول

المتتاليات العددية

للمتتاليات والسلاسل دور مهم في نمذجة بعض الظواهر المتقطعة، كملاحظة –على فترات زمنية منتظمة– الإنتاج السنوي لشركة معينة، الراتب الشهري لموظف، النمو الديمغرافي لدولة معينة.

تعريف 2-1. *نسمي متتالية عددية كل تطبيق u لـ $\mathbb{N}$ (أو جزء I لانهائي من $\mathbb{N}$) في $\mathbb{R}$، نرمز عادة ب u_n لصورة العدد الطبيعي n وفق التطبيق u ونكتب*

$$u : \mathrm{N} \to R$$
$$n \to u(n) = u_n$$

ونرمز المتتالية بأحد الرموز التالية $(u_n)_n$، $(u_n)_{n\in N}$، (u_n) ، $n \to u_n$ أو $u_0, u_1, u_2, \ldots$. ندعو المقادير u_n (حيث $n \in N$) حدود المتتالية (u_n) ونقول عن العدد u_n أنه الحد من الرتبة n. [1]

1- اتجاه تغير متتالية عددية

تعريف 2-2

- *نقول عن متتالية عددية (u_n) أنها متزايدة (متناقصة، على التوالي)، إذا كان $u_n \le u_{n+1}$ ($u_n \ge u_{n+1}$، على التوالي)، مهما كان $n \in N$. نقول أن (u_n) متزايدة (متناقصة، على التوالي) تماما، إذا كان $u_n < u_{n+1}$ ($u_n > u_{n+1}$ ، على التوالي) ، من أجل كل $n \in N$.*
- *نقول عن متتالية أنها رتيبة (رتيبة تماما، على التوالي) إذا كانت متزايدة أو متناقصة (متزايدة تماما أو متناقصة تماما، على التوالي).* [2]

تعريف 2-3. *نقول عن متتالية (u_n) أنها ثابتة، إذا كان $\forall n \in N : u_n = a \,/\, a \in R$.* [3]

2- تقارب أو تباعد متتالية عددية

تعريف 2-4

- *نقول عن متتالية (u_n) أنها تنتهي إلى l أو تتقارب نحو l (حيث $l \in R$) عندما يؤول n إلى ما لا نهاية ونكتب*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l$$

- *نقول عن (u_n) أنها متباعدة إن لم تكن متقاربة.* [4]

نظرية 2-1. *لكل متتالية متقاربة نهاية وحيدة.* [5]

---

[1] غوثي بوكلي حسن. *الوجيز في الرياضيات*. *ط 2*. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004، ص. 143، ينظر أيضا
Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. *Mathématiques pour l'économie. Analyse-Algèbre. 5e É*. Dunod. Paris, 2015. Définition 1, p. 57.

[2] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 1، ص ص. 143 -144.

[3] نفسه. تعريف 2، ص. 144.

[4] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 61-63.

[5] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. قضية 1، ص. 146.

3- متتاليات خاصة

3-1- المتتالية الحسابية

تعريف 2-5. نسمي *متتالية حسابية* ذات *الأساس* r، المتتالية (u_n) التي يكون الفرق بين حدين متتالين منها ثابتا r، أي

$$\forall n \in N:\ u_{n+1} - u_n = r \quad (\text{مع } u_0 \text{ معطاة})$$

بحيث u_n الحد ذو الدليل n. تعطى عبارة الحد العام بالعلاقات التالية

- *إذا كان الحد الأول هو u_0 ، فان* $\forall n \in N: u_n = u_0 + nr$
- *إذا كان الحد الأول هو u_1، فان* $\forall n \in N: u_n = u_1 + (n-1)r$ *(بتصرف).* (1)

ملاحظة 2-1. من التعريف 2-5، إذا كان u_m و u_n حدين من متتالية حسابية (u_n)، فان $u_m = u_n + (m-n)r$ (بتصرف). (2)

3-1-1- رتابة، تقارب أو تباعد متتالية حسابية

تعريف 2-6. *لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r.*

- *إذا كان $r > 0$ ، فان (u_n) متزايدة ومتباعدة تؤول إلى $+\infty$.*
- *إذا كان $r < 0$، فان (u_n) متناقصة ومتباعدة تؤول إلى $-\infty$.*
- *إذا كان $r = 0$، فان $\forall n \in N: u_n = u_0$، أي (u_n) ثابتة ومتقاربة نحو u_0 (بتصرف).* (3)

3-1-2- عبارة مجموع n حد من حدود متتالية حسابية

تعريف 2-7. *يرمز لمجموع n حد من حدود متتالية حسابية $(u_n)_n$ حدها الأول u_1 وأساسها r ب* $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ *أو اختصارا ب* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ *ويعطى بالعلاقة التالية*

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحد الاول} + \text{الحد الاخير}\right)$$

بحيث: عدد الحدود= دليل الحد الأخير من المجموع – دليل الحد الأول من المجموع +1، أي

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$ (4)

3-2- المتتالية الهندسية

تعريف 2-8. *المتتالية الهندسية* هي *التي تكون فيها النسبة بين أي حدين متتالين ثابتة وتسمى أساس المتتالية ويرمز لها بالرمز q، أي إذا كانت (u_n) متتالية هندسية، فان* $\forall n \in N: \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ (5)

تعطى عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بالعلاقات التالية

---

(1) فتحي خليل حمدان. *الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية. ط 4.* دار وائل للنشر، عمان– الأردن، 2014، ص.68، ينظر أيضا
Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 10 ,p .74.
(2) Ibid. Définition 10, p. 74.
(3) Ibid.p . 74.
(4) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص .73، ينظر أيضا
Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. p. 75.
(5) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص .75.

- إذا كان الحد الأول هو u_0، فان $\forall n \in N : u_n = u_0 q^n$
- إذا كان الحد الأول هو u_1، فان $\forall n \in N : u_n = u_1 q^{n-1}$

وعليه، إذا كان u_m و u_n حدين من المتتالية (u_n)، فان $u_m = u_n q^{m-n}$ (بتصرف) [1]

3-2-1- رتابة، تقارب أو تباعد متتالية هندسية

يمكن تلخيص اتجاه تغير وتقارب متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq 1}$ تبعا لقيم أساسها q وحدها الأول u_1 في الجدول التالي.

	$u_1 > 0$	$u_1 < 0$
$q < -1$	(u_n) متناوبة ومتباعدة بحيث $\lvert u_n \rvert \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$	(u_n) متناوبة ومتباعدة بحيث $\lvert u_n \rvert \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$
$q = -1$	(u_n) متناوبة ومتباعدة (لا تقبل نهاية)	(u_n) متناوبة ومتباعدة (لا تقبل نهاية)
$-1 < q < 0$	(u_n) متناوبة ومتقاربة بحيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$	(u_n) متناوبة ومتقاربة بحيث [2] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
$q = 0$	(u_n) متتالية معدومة	(u_n) متتالية معدومة
$0 < q < 1$	(u_n) متناقصة ومتقاربة بحيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$	(u_n) متزايدة ومتقاربة بحيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
$q = 1$	(u_n) متتالية ثابتة بحيث $\forall n \in N : u_n = u_1$	(u_n) متتالية ثابتة بحيث $\forall n \in N : u_n = u_1$
$q > 1$	(u_n) متزايدة ومتباعدة بحيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	(u_n) متناقصة ومتباعدة بحيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

جدول 2-1- رتابة، تقارب أو تباعد متتالية هندسية تبعا لقيم أساسها وحدها الأول (بتصرف) [3]

3-2-2- عبارة مجموع n حد من حدود متتالية هندسية

تعريف 2-9. مجموع أول n حد من المتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الأول u_1 وأساسها q هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

نميز حالتين

- إذا كان $q = 1$، فان

$$S_n = u_1 + u_1 + \ldots + u_1$$

وعليه

$$S_n = n u_1$$

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 77، ينظر أيضا

Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Définition 11, p. 76.

[2] Ibid, p. 77.

[3] Ibid, p. 76.

– *إذا كان $q \neq 1$، فان*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$
$$= \text{الحـد الاول} \frac{1-\text{الاســاس}^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الاســاس}}$$

أي

$$(1) \quad S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

وعليه يمكن جمع الحالتين السابقتين بالعلاقة التالية

$$(2) \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \begin{cases} nu_1; & q=1 \\ u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}; & q \neq 1 \end{cases}$$

4- تمارين

تمرين 2-1. مبيعات شركة ما، تزداد كل سنة مرة ونصف عن السنة التي سبقتها، فإذا بلغت مبيعاتها في السنة السابعة 3797 وحدة، فكم بلغت مبيعاتها في السنة الثانية ؟

الحل. مبيعات الشركة تمثل متتالية هندسية (u_n) حدها الأول u_1 هو مبيعات السنة الأولى وأساسها $q = 1{,}5$ وعليه مبيعات السنة السابعة هو $u_7 = 3797$ وحدة.

– لنجد مبيعات الشركة في السنة الثانية، أي u_2

لدينا $u_m = u_n q^{m-n}$ وعليه $u_7 = u_2 q^5$ ومنه $u_2 = \dfrac{u_7}{q^5} = \dfrac{3797}{(1{,}5)^5} = 500$

إذا مبيعات الشركة في السنة الثانية، بلغت 500 وحدة.

تمرين 2-2. أودع شخص مبلغ 3000 دج لدى بنك، إذا علمت أن هذا المبلغ يزداد سنويا بنسبة 5%. ما هي مدة إيداع المبلغ إذا تحصل في نهاية المدة على 4654 دج ؟

الحل. المبلغ المحصل عليه في نهاية كل سنة يمثل حدا من حدود متتالية هندسية (u_n) حدها الأول $u_0 = 3000\ DA$ المبلغ المودع في بداية المدة وأساسها $q = 1{,}05$، لأن

– المبلغ المودع في بداية المدة $u_0 = 3000\ DA$

– المبلغ المحصل عليه بعد سنة واحدة هو u_1، بحيث

$$u_1 = u_0 + 0.05u_0 = (1.05)u_0 \quad \text{مع} \quad 5\% = 0.05$$

– المبلغ المحصل عليه بعد سنتين هو u_2، بحيث

$$u_2 = u_1 + 0.05u_1 = (1.05)u_1$$
$$= (1.05)\left[(1.05)u_0\right] = (1.05)^2 u_0$$

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit, p. 77, see also

فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 81

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit, p. 77.

وعليه المبالغ المحصل عليها في نهاية كل سنة تمثل حدود متتالية هندسية (u_n) حدها الأول $u_0=3000$ وأساسها $q=1,05$.

وعليه عبارة الحد العام لهذه المتتالية هي $u_n=u_0q^n$ أي $u_n=3000(1.05)^n$.

- إيجاد مدة إيداع المبلغ إذا تحصل في نهاية المدة على 4654 دج.

لدينا $u_n=4654$ وعليه $4654=3000(1.05)^n \Leftrightarrow (1.05)^n=\frac{4654}{3000}=1.55$

ومنه

$$\ln\left[(1.05)^n\right]=\ln(1.55)\Leftrightarrow n\ln(1.05)=\ln(1.55)$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{\ln(1.55)}{\ln(1.05)}$$
$$\Leftrightarrow n=8.98\approx 9$$

إذا مدة إيداع المبلغ هي 9 سنوات.

تمرين 2-3. في محطة وقود، خزان به 1023 لترا من الوقود، يتسرب منه في أول يوم لتر واحد وفي اليوم الثاني لتران وفي اليوم الثالث أربعة لترات وهكذا، فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغا ؟

الحل. لدينا

- كمية الوقود المتسرب في اليوم الأول هي $u_1=1L$
- كمية الوقود المتسرب في اليوم الثاني هي $u_2=2L$، أي $u_2=2(1)=2u_1$
- كمية الوقود المتسرب في اليوم الثالث هي $u_3=4L$، أي $u_3=2(2)=2u_2=2(2u_1)=2^2u_1$
- وهكذا، كمية الوقود المتسرب في اليوم n هي u_n، بحيث $u_n=2^{n-1}u_1$

وعليه، كمية الوقود المتسرب في كل يوم تمثل حدا من حدود متتالية هندسية (u_n) حدها الأول $u_1=1$ وأساسها $q=2$.

ومنه مجموع ما تسرب من الخزان من اليوم الأول إلى غاية اليوم n هو

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n$$

أي

$$S_n=u_1\frac{1-q^n}{1-q}$$
$$=1.\frac{1-2^n}{1-2}$$
$$=2^n-1$$

إذا، كي يصبح الخزان فارغا، يجب أن يكون مجموع ما تسرب منه 1023 لترا، أي $S_n=1023$ ومنه

$$2^n-1=1023\Leftrightarrow 2^n=1024$$
$$\Leftrightarrow \ln(2^n)=\ln(1024)$$
$$\Leftrightarrow n\ln(2)=\ln(1024)$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{\ln(1024)}{\ln(2)}=10$$

أي، بعد 10 أيام يصبح الخزان فارغا.

تمرين 2−4. طفل يدخر يوميا 20 دينارا، فإذا فتح حصالته بعد 15 يوما ووجد فيها 400 دينارا، فكم كان في حصالته قبل أن يبدأ الادخار ؟

الحل. المبلغ المدخر لدى الطفل يمثل متتالية حسابية (u_n) حدها الأول u_0 المبلغ قبل الادخار وأساسها $r=20$ دينارا وعليه $u_{15}=400$ دينار ومنه عبارة الحد العام هي $u_n=u_0+nr$ أي $u_n=u_0+20n$

ومنه $u_{15}=u_0+20(15)=u_0+300$ أي $400=u_0+300 \Leftrightarrow u_0=100$

إذا، كان في حصالة الطفل قبل الادخار 100 دينار.

تمرين 2−5. سيارة من النوع x، طُرحت للبيع سنة 2010 بمبلغ ابتدائي يتناقص سنويا بقيمة ثابتة، إذا كان سعرها سنة 2015 هو 5.000.000 دينارا جزائريا وسنة 2020 هو 4.000.000 دينارا جزائريا.

1) ما هو سعر السيارة الابتدائي سنة 2010 ؟

2) ابتداء من أي سنة يمكن الحصول على السيارة بسعر أقل من 3.600.000 دينارا جزائريا ؟

3) سنويا، يقوم وكيل معتمد بشراء ست سيارات من النوع x. أوجد إجمالي المبلغ الذي دفعه هذا الوكيل من بداية 2013 إلى نهاية 2020.

الحل

1) إيجاد سعر السيارة الابتدائي سنة 2010

بما أن سعر السيارة يتناقص سنويا بقيمة ثابتة، فهو يمثل متتالية حسابية (u_n) حدها الأول u_0 يمثل سعر السيارة الابتدائي سنة 2010 وأساسها r يمثل القيمة التي يتناقص بها سعر السيارة سنويا وعليه $u_5=5.000.000 \quad DA$ هو سعر السيارة سنة 2015 و $u_{10}=4.000.000 \quad DA$ سعرها سنة 2020.

لدينا $u_m=u_n+(m-n)r$ وعليه $u_{10}=u_5+(10-5)r$ ومنه

$$r=\frac{u_{10}-u_5}{10-5}=\frac{4.000.000-5.000.000}{5}=-200.000 \quad DA$$

أي، سعر السيارة يتناقص سنويا بمبلغ 200.000 دينارا جزائريا وعليه $u_0=u_5+(0-5)r$، أي

$$u_0=5.000.000-5(-200.000)=6.000.000 \quad DA$$

إذا، سعر السيارة الابتدائي سنة 2010 هو 6.000.000 دينارا جزائريا.

2) إيجاد السنة التي انطلاقا منها يمكن الحصول على السيارة بسعر أقل من 3.600.000 دينارا جزائريا

لدينا عبارة الحد العام $u_n=u_0+nr=6.000.000-200.000n$ وعليه

$$\begin{aligned}u_n<3.600.000 &\Leftrightarrow 6.000.000-200.000n<3.600.000\\ &\Leftrightarrow n>12\end{aligned}$$

أي، ابتداء من سنة 2023 يمكن الحصول على السيارة بسعر أقل من 3.600.000 دينارا جزائريا.

3) إيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه الوكيل من بداية 2013 إلى نهاية 2020

لدينا، سنة 2013 تقابل u_3 وسنة 2020 تقابل u_{10} وبما أن الوكيل يشتري سنويا ست سيارات، فان مجموع المبلغ الذي دفعه من بداية 2013 إلى نهاية 2020 هو

$$\begin{aligned} S &= 6\left(u_3+u_4+...+u_{10}\right) \\ &= 6\left[\frac{8}{2}\left(u_3+u_{10}\right)\right] \\ &= 24\left(5.400.000+4.000.000\right) \\ &= 225.600.000 \quad DA \end{aligned}$$

بحيث

$$\begin{aligned} u_3 &= u_0+3r \\ &= 6.000.000+3\left(-200.000\right) \\ &= 5.400.000 \quad DA \end{aligned}$$

تمرين 2–6. أودع شخص الآن مبلغ 30000 دج لدى بنك، بحيث مجموع المبلغ المحصل عليه سنويا يزداد بنسبة 5%، بعد أربع سنوات عَلِمَ أن البنك رفع نسبة الزيادة إلى 6%؛ فقام الشخص بإضافة 60000 دج إلى حسابه.

– أحسب جملة المبلغ المتجمع في حسابه بعد مرور أربع سنوات ثم سبع سنوات من الآن.

الحل

1) إيجاد جملة المبلغ المتجمع في حساب الشخص بعد أربع سنوات من الآن

لدينا، جملة المبلغ المتجمع تمثل متتالية هندسية $\left(u_n\right)$ حدها الأول $u_0=30000\ DA$ وأساسها $q=1.05$.

لدينا، عبارة الحد العام $u_n=u_0q^n$ وعليه

$$\begin{aligned} u_4 &= u_0q^4 \\ &= 30000\left(1.05\right)^4 \\ &= 36465.18 \quad DA \end{aligned}$$

إذا، جملة المبلغ المتجمع في حساب الشخص بعد أربع سنوات من الآن هي 36465.18 دج.

2) إيجاد جملة المبلغ المتجمع في حساب الشخص بعد سبع سنوات من الآن

بما أن البنك رفع نسبة الزيادة إلى 6%، فإن $q'=1.06$ وعليه، جملة المبلغ المتجمع بعد زيادة النسبة تمثل متتالية هندسية $\left(v_n\right)$ أساسها $q'=1.06$ وحدها الأول

$$\begin{aligned} v_0 &= u_4+60000 \\ &= 36465.18+60000 \\ &= 96465.18\ DA \end{aligned}$$

لدينا، عبارة الحد العام $v_n=v_0q'^n$ وعليه

$$\begin{aligned} v_3 &= v_0q'^3 \\ &= 96465.18\left(1.06\right)^3 \\ &= 114891.58 \quad DA \end{aligned}$$

إذا، جملة المبلغ المتجمع في حساب الشخص بعد سبع سنوات من الآن هي 114891.58 دج.

تمرين 2–7. إنتاج شركة يتناقص سنويا ب 500 وحدة، إذا كان إنتاجها في السنة الثانية هو 40.000 وحدة، فما هو إنتاجها في السنة الثامنة ؟

الحل. إنتاج الشركة يمثل متتالية حسابية $\left(u_n\right)$ حدها الأول u_1 هو إنتاج السنة الأولى وأساسها $r=-500$ وعليه إنتاج السنة الثانية هو $u_2=40000$ وحدة.

- لنجد إنتاج الشركة في السنة الثامنة، أي u_8

لدينا $u_m = u_n + (m-n)r$ وعليه $u_8 = u_2 + 6r$ ومنه $u_8 = 40000 + 6(-500) = 37000$

إذا إنتاج الشركة في السنة الثامنة، بلغ 37000 وحدة.

تمرين 2-8. مبيعات شركة تزداد سنويا بنسبة 3%، عليها أن تبيع سنويا على الأقل 10.000 وحدة للحصول على الأرباح. إذا علمت أن مبيعاتها في السنة الأولى بلغت 8.000 وحدة، انطلاقا من أي سنة يمكن للشركة الحصول على الأرباح ؟

الحل. مبيعات الشركة تمثل متتالية هندسية (u_n) حدها الأول $u_1 = 8000$ وحدة وأساسها $q = 1.03$.

إيجاد السنة التي انطلاقا منها يمكن الحصول على الأرباح

لدينا عبارة الحد العام $u_n = u_1 q^{n-1} = 8000(1.03)^{n-1}$ وعليه

$$u_n \geq 10000 \Leftrightarrow 8000(1.03)^{n-1} \geq 10000$$
$$\Leftrightarrow (1.03)^{n-1} \geq \frac{5}{4}$$
$$\Leftrightarrow (n-1)\ln(1.03) \geq \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\ln(1.03)} + 1 \simeq 8.54$$

أي، يمكن للشركة الحصول على الأرباح انطلاقا من السنة التاسعة.

تمرين 2-9. أوجد عدد السنوات اللازمة لإيداع مبلغ ما من المال لتصبح جملة المبلغ المستحق ضعف المبلغ المودع، إذا علمت أن هذا الأخير يزداد سنويا بنسبة 5%.

الحل. لدينا، جملة المبلغ المستحق تمثل متتالية هندسية (u_n) حدها الأول u_0 وأساسها $q = 1.05$.

لدينا، عبارة الحد العام $u_n = u_0 q^n = u_0(1.05)^n$ وعليه

$$u_n = 2u_0 \Leftrightarrow u_0(1.05)^n = 2u_0$$
$$\Leftrightarrow u_0(1.05)^n - 2u_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow u_0\left[(1.05)^n - 2\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow (1.05)^n - 2 = 0 \qquad (\text{لان } u_0 \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow (1.05)^n = 2$$
$$\Leftrightarrow \ln\left[(1.05)^n\right] = \ln(2)$$
$$\Leftrightarrow n\ln(1.05) = \ln(2)$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(2)}{\ln(1.05)} \simeq 14.2$$

وعليه، يجب إيداع المبلغ لمدة 15 سنة تقريبا حتى يتضاعف.

تمرين 2-10. آلة ثمنها وقت الشراء 1000 وحدة نقدية، تُستهلك في أول كل سنة بنسبة 15% عن السنة التي سبقتها. ما هي قيمة هذه الآلة في أول السنة السابعة ؟

الحل. قيمة الآلة في أول كل سنة تمثل متتالية هندسية (u_n) حدها الأول $u_0 = 1000$ ثمن الآلة وقت الشراء وأساسها $q = 1 - 0.15 = 0.85$.

لدينا، عبارة الحد العام $u_n = u_0 q^n = 1000(0.85)^n$ وعليه، قيمة الآلة في أول السنة السابعة هي

$$u_7 = 1000(0.85)^7 = 320.577 \quad \text{وحـــدة نقديـــة}$$

الفصل الثالث

الدوال الأسية

والدوال اللوغاريتمية

للدوال الأسية واللوغاريتمية تطبيقات عدة في الاقتصاد، فهي تستخدم لنمذجة بعض الظواهر التي تدرس حالات النمو والانكماش لمتغير اقتصادي، فإذا كان النمو بطيئا، نستخدم الدالة اللوغاريتمية، أما إن كان سريعا جدا فنلجأ للدالة الأسية. كلا الدالتين لهما قوانين وقواعد بسيطة ومتشابهة فيما بينها.

1- الدالة الأسية

تعريف 3-1. *تسمى الدالة التي تكتب بالصيغة*

$$y = f(x) = a^x = \exp_a(x)$$

بالدالة الأسية، حيث الأساس الثابت a عدد حقيقي، $a>0$ و $a \neq 1$ والأس x متغير.[1]

تتميز الدوال الأسية بالخصائص التالية

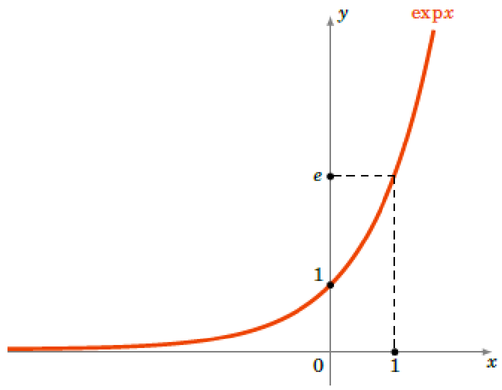
- *مجموعة تعريف f هي R وتأخذ صورها في R_+^*.*
- *إذا كان $a>1$ فان الدالة متزايدة وإذا كان $0<a<1$ فان الدالة متناقصة.*
- *عند $x=0$ فان $f(x)=1$ مستقلة عن الأساس.*[2]

- الدالة الأسية الطبيعية

تعريف 3-2. *الدوال الأسية التي أساسها العدد غير النسبي $e \simeq 2,71828...$ تسمى الدوال الأسية الطبيعية وتكتب*

$$f(x) = e^x = \exp_e(x) \quad [3]$$

وهي دوال مستمرة، موجبة تماما ومتزايدة تماما على R، بحيث $e^0 = 1$ و $e^1 = e$ والشكل التالي يوضح ذلك



شكل 3-1- منحنى الدالة الأسية الطبيعية [4]

-خواص الدالة الأسية الطبيعية

نظرية 3-1

1) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

---

(1) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. *الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية.* ط 2. دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2010. تعريف 5-1، ص. 217.

(2) Edward T Dowling. *Introduction to mathematical economics. 3rd E.* The McGraw-Hill Companies, New York, 2001, p. 146.

(3) Ibid, p. 149.

(4) Stéphane Rossignol. *Mathématiques en économie- gestion.* Dunod, Paris, 2015. Propositions 5.12 et 5.13, p. 125.

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty,\quad \alpha\in Q_+^*$

5) $\lim_{x\to-\infty}x^\alpha e^x=0,\quad \alpha\in Q_+^*$

6) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (1)

نظرية 3-2. ليكن a و b عددين حقيقيين، لدينا

1) $e^{a+b}=e^a.e^b$

2) $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$

3) $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$

4) $e^{qa}=\left(e^a\right)^q,\quad q\in Q$ (2)

نظرية 3-3

1) $\forall x\in R:\left(e^x\right)'=e^x$ (3)

2) u قابلة للاشتقاق، $\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$ (4)

2- الدالة اللوغاريتمية

تعريف 3-3. تسمى الدالة العكسية للدالة الأسية $y=a^x$ التي تأخذ الصورة $x=a^y$ *بالدالة اللوغاريتمية* ونكتب

$$y=f(x)=\log_a x,\quad a>0,\quad a\neq1$$

ونقرأ " لوغاريتم x في الأساس a يساوي y"

- إذا كانت قيمة الأساس $a=10$ فالدالة تسمى بدالة *اللوغاريتم العشري* ونرمز لها ب $f(x)=\log_{10}x$ أو اختصارا ب $f(x)=\log x$.
- أما إذا كانت قيمة الأساس $a=e$ فتسمى الدالة *باللوغاريتم الطبيعي* أو *النيبيري* ونرمز لها ب $f(x)=\log_e x$ أو اختصارا ب $f(x)=\ln x$.(5)

وتتميز الدوال اللوغاريتمية بالخصائص التالية

- مجموعة تعريف f هي R_+^* وتأخذ صورها في R.
- إذا كان $a>1$ فان الدالة متزايدة وإذا كان $0<a<1$ فان الدالة متناقصة.
- عند $x=1$ فان $f(x)=0$ مستقلة عن الأساس. (6)

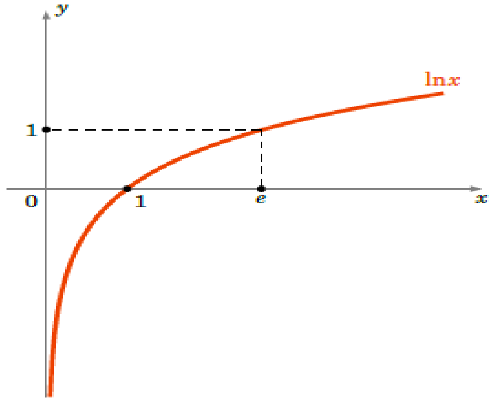
(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Propositions 5.16 et 5.17, Théorème, pp. 128-129.
(2) Ibid. Proposition 5.14, p. 126.
(3) Ibid. Proposition 5.16, p. 128.
(4) Ibid. Proposition 5.18, p. 129.
(5) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق. تعريفان 5-2 و 5-3، ص ص. 228-229.
(6) Edward T Dowling. Idem, p. 147.

–الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

تعريف 3–4. *الدوال اللوغاريتمية التي أساسها العدد غير النسبي* $e \simeq 2.71828...$ *تسمى الدوال اللوغاريتمية الطبيعية وتكتب*

$$f(x) = \log_e x = \ln x$$ [1]

وهي دوال مستمرة متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ *بحيث* $\ln(1)=0$ *و* $\ln(e)=1$ *والشكل التالي يوضح ذلك.*



شكل 3–2– منحنى الدالة اللوغاريتمية الطبيعية [2]

–خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

نظرية 3–4

(1 $\lim_{x \geq 0} \ln x = -\infty$ *و* $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

(2 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(3 $\lim_{x \geq 0} x \ln x = 0$

(4 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^\alpha\right)}{x^\beta} = 0, \quad \alpha, \beta \in Q_+^*$

(5 $\lim_{x \geq 0} x^\beta \ln\left(x^\alpha\right) = 0, \quad \alpha, \beta \in Q_+^*$ [3]

نظرية 3–5. *ليكن* a *و* b *عددين حقيقيين موجبين تماما، لدينا*

(1 $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

(2 $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

(3 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

(4 $\ln\left(a^n\right) = n \ln a, \quad n \in Z$

(5 $\ln\left(a^q\right) = q \ln a, \quad q \in Q$ [4]

---

[1] Edward T Dowling. Idem, p. 149.
[2] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 5.8, p. 121.
[3] Ibid. Proposition 5.8, Théorème, pp. 121-123.
[4] Ibid. Proposition 5.7, p. 120.

نظرية 3−6

1) $\forall x\in \left]0,+\infty\right[: (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ *(1)*

2) u *قابلة للاشتقاق*، $\left[\ln\left(u(x)\right)\right]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ *(2)*

3− حل معادلات الدوال الأسية واللوغاريتمية

لحل معادلات الدوال الأسية واللوغاريتمية، نستخدم خواص الدالتين إضافة لكون إحداهما معاكسة للأخرى، أي

$$e^{\ln x} = x,\quad \forall x>0 \quad \text{و} \quad \ln\left(e^x\right) = x,\quad \forall x\in R$$ *(3)*

وكذا الخاصية

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},\quad x>0,\ a>0,\ a\neq 1$$ *(4)*

4− تمارين

تمرين 3−1. أوجد مشتقات الدوال التالية

x^2e^x	$\ln\left(x^4+1\right)$	e^{4x-1}
$\dfrac{1}{e^{-7x}}$	$\sqrt{e^{2x}}$	$\dfrac{x}{\ln x}$

الحل. حساب مشتقات الدوال التالية

$$\left(e^{4x-1}\right)' = 4e^{4x-1}$$

$$\left(\ln\left(x^4+1\right)\right)' = \frac{4x^3}{x^4+1}$$

$$\left(x^2e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x = \left(x^2+2x\right)e^x$$

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$\left(\sqrt{e^{2x}}\right)' = \left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(\frac{1}{e^{-7x}}\right)' = \left(e^{7x}\right)' = 7e^{7x}$$

تمرين 3−2. أحسب النهايات التالية

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-e^{2x}}{4x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{3x}$
$\lim\limits_{x\geq 0} x^2\ln x$	$\lim\limits_{x\geq 0} x+\ln x$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{5x}}{\sqrt{x}}$

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 5.6, p. 119.
(2) Ibid. Proposition 5.11, p. 124.
(3) Ibid. Proposition 5.13, p. 125.
(4) Ibid. Définition 5.3, p. 124.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(3-x)}{3-x}\qquad \lim_{x\geq 0}\sqrt{x^3}\ln\left(x^7\right)\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x^4}$$

الحل. حساب النهايات التالية

1) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to-\infty} xe^{3x}=-\infty.0$. لكن نعلم أن $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{3x}=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}\left(xe^{x}\right)=0.0=0$$

2) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}}{4x}=\frac{-\infty}{+\infty}$. لكن نعلم أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}}{4x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{e^{x}}{4}\left(\frac{e^{x}}{x}\right)=-\infty.+\infty=-\infty$$

3) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x^3}=\frac{0}{0}$. لكن نعلم أن $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ ومنه

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}.\frac{e^{x}-1}{x}=+\infty.1=+\infty$$

4) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{\sqrt{x}}=\frac{+\infty}{+\infty}$. لكن نعلم أن $\alpha\in Q_+^*,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\alpha}}=+\infty,$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{4x}\left(\frac{e^{x}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=+\infty.+\infty=+\infty$$

5) $\lim_{x\geq0}x+\ln x=0-\infty=-\infty$

6) حالة عدم التعيين $\lim_{x\geq0}x^2\ln x=0.-\infty$. لكن نعلم أن $\lim_{x\geq0}x\ln x=0$ ومنه

$$\lim_{x\geq0}x^2\ln x=\lim_{x\geq0}x\left(x\ln x\right)=0.0=0$$

7) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(3-x)}{3-x}=\frac{+\infty}{+\infty}$. بوضع $y=3-x$ ونعلم أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(3-x)}{3-x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0$$

8) حالة عدم التعيين $\lim_{x\geq0}\sqrt{x^3}\ln\left(x^7\right)=0.-\infty$. لكن نعلم أن $\alpha,\beta\in Q_+^*,\quad \lim_{x\geq0}x^{\beta}\ln\left(x^{\alpha}\right)=0,$ ومنه

$$\lim_{x\geq0}\sqrt{x^3}\ln\left(x^7\right)=\lim_{x\geq0}x^{\frac{1}{3}}\ln\left(x^7\right)=0$$

9) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x^4}=\frac{+\infty}{+\infty}$. لكن نعلم أن $\alpha,\beta\in Q_+^*,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}}=0,$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{x^4}=0$$

تمرين 3-3. حل في R المعادلات والمتراجحات التالية

$$e^{x+1}+5=0\qquad e^{2x}+2e^{x}=3\qquad \ln x+\ln(2x-1)=0$$

$$e^{x-4}\geq3\qquad \ln x+\ln(2x-1)<0$$

الحل. حل المعادلات والمتراجحات التالية في R

1) $e^{x+1}+5=0\Leftrightarrow e^{x+1}=-5$ بما أن $\forall x\in R: e^{x}>0$ ، فان $S=\varnothing$.

2) $e^{2x}+2e^{x}=3 \Leftrightarrow e^{2x}+2e^{x}-3=0......(1)$

نضع $y=e^{x}$ ومنه

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow y^2+2y-3=0\\ &\Leftrightarrow (y-1)(y+3)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0\\ y+3=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=1\\ y=-3\end{cases}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{cases} e^{x}=1\\ e^{x}=-3(\forall x\in R: e^{x}>0 \text{ حل مرفوض لان})\end{cases} \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=\ln(1)=0$$

إذا $S=\{0\}$.

3) $\ln x+\ln(2x-1)=0..........(2)$

الدالة $\ln x$ معرفة على $]0,+\infty[$ والدالة $\ln(2x-1)$ معرفة على $]\frac{1}{2},+\infty[$ (لأن $\ln(2x-1)$ معرفة $\Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$) وعليه نحل المعادلة (2) في تقاطع مجموعتي تعريف الدالتين السابقتين، أي $]0,+\infty[\cap]\frac{1}{2},+\infty[=]\frac{1}{2},+\infty[$

وعليه نحل المعادلة (2) في المجال $]\frac{1}{2},+\infty[$ ومنه

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \ln\left[x(2x-1)\right]=0\\ &\Leftrightarrow x(2x-1)=1\\ &\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0\\ x+\frac{1}{2}=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\\ x=-\frac{1}{2}\notin\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\end{cases}\end{aligned}$$

وعليه $S=\{1\}$.

4) $e^{x-4}\geq 3$ بما أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية متزايدة تماما، فان

$$\begin{aligned}e^{x-4}\geq 3 &\Leftrightarrow \ln\left(e^{x-4}\right)\geq \ln(3)\\ &\Leftrightarrow x-4\geq \ln(3)\\ &\Leftrightarrow x\geq \ln(3)+4\end{aligned}$$

إذا $S=\left[\ln(3)+4,+\infty\right[$.

5) $\ln x+\ln(2x-1)<0........(3)$

لحل المتراجحة (3)، نحل أولا المعادلة $\ln x+\ln(2x-1)=0......(4)$

حسب المثال (3) السابق، المعادلة (4) تُحل في المجال $]\frac{1}{2},+\infty[$ ولها حلان هما $x=1$ (حل مقبول) و $x=-\frac{1}{2}$ (حل مرفوض) وحسب إشارة الدالة $2x^2-x-1$، فان $\ln x+\ln(2x-1)\geq 0$، إذا كان $x\in[1,+\infty[$ و $\ln x+\ln(2x-1)<0$، إذا كان $x\in]\frac{1}{2};1[$.

إذا $S=]\frac{1}{2};1[$.

الفصل الرابع

المشتقات

الحساب التفاضلي أو الاشتقاق من المفاهيم الرياضية الهامة التي تستخدم بشكل واسع في كثير من المجالات منها الإدارية والاقتصادية. يعرف تطبيق الاشتقاق في الاقتصاد بالحساب الحدي ومثال ذلك، أن مشتق التكلفة الكلية يسمى التكلفة الحدية.

1- قابلية اشتقاق دالة

1-1- قابلية اشتقاق دالة عند نقطة

تعريف 4-1. *لتكن f دالة معرفة على جوار نقطة $a \in R$. نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق عند a، إذا كانت*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

موجودة ومنتهية وتسمى العدد المشتق لـ f عند a[1] *ويرمز له بأحد الرموز*

$$f'(a) \qquad \frac{df}{dx}(a) \qquad \frac{d}{dx}[f(a)]$$

ونكتب

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

أو بعبارة أخرى

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad ^{(2)}$$

تعريف 4-2

- *لتكن f دالة معرفة على مجال $]a-\alpha, a]$ بحيث $\alpha > 0$. نقول أن قابلة للاشتقاق عن يسار a إذا كان*

$$\lim_{x \leq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \beta$$

ويسمى العدد الحقيقي β بالعدد المشتق لـ f عن يسار a ونرمز له بـ $f'_g(a)$ أو $f'_-(a)$.

- *ومن أجل f معرفة على مجال $[a, a+\alpha[$ بحيث $\alpha > 0$. نقول أن قابلة للاشتقاق عن يمين a إذا كان*

$$\lim_{x \geq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \gamma$$

ويسمى العدد الحقيقي γ بالعدد المشتق لـ f عن يمين a ونرمز له بـ $f'_d(a)$ أو $f'_+(a)$.[3]

نظرية 4-1. *نقول أن f قابلة للاشتقاق عند النقطة a، إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عن يمين وعن يسار a وكان*

$$f'_d(a) = f'_g(a) \quad ^{(4)}$$

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 1, pp. 111-112.
(2) Edward T Dowling. Idem, p. 36.

(3) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 3, pp. 113-114.
(4) Ibid. Proposition 2, p. 114.

1-2- قابلية اشتقاق دالة على مجال

1-2-1- قابلية اشتقاق دالة على مجال مفتوح

تعريف 4-3. *لتكن f دالة معرفة على مجال (أو اتحاد مجالات) مفتوح I من R. نقول أن f قابلة للاشتقاق على I، إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من I.*[1]

1-2-2- قابلية اشتقاق دالة على مجال مغلق

تعريف 4-4

- *نقول عن دالة f أنها قابلة للاشتقاق على $[a,b]$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ وقابلة للاشتقاق عن يمين a وعن يسار b.*
- *نقول عن دالة f أنها قابلة للاشتقاق على $[a,+\infty[$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a,+\infty[$ وقابلة للاشتقاق عن يمين a.*
- *نقول عن دالة f أنها قابلة للاشتقاق على $]-\infty,b]$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]-\infty,b[$ وقابلة للاشتقاق عن يسار b.*[2]

2- الدالة المشتقة

تعريف 4-5. *إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، نعرف دالتها المشتقة f' ب*

$$\begin{aligned} f' : I &\to R \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

ونسميها اختصارا مشتقة f عوضا عن الدالة المشتقة ل f ويرمز لها بأحد الرموز

$$f' \qquad \frac{df}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[f(x)] \qquad D_x[f(x)]$$ [3]

تعريف 4-6

- *إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R وكانت دالتها المشتقة f' قابلة للاشتقاق هي الأخرى على I، فإننا نقول أن f قابلة للاشتقاق مرتين على I ونرمز ب f'' للمشتقة الثانية أو مشتقة f من الرتبة 2.* [4]
- *وتعرف بصفة عامة مشتقة f من الرتبة n إذا كانت موجودة ونرمز لها ب $f^{(n)}$ أو $\frac{d^n f}{dx^n}$، بعلاقة تراجعية*

$$f^{(1)} = f', \; f^{(2)} = f'', \; f^{(3)} = f''', \dots, f^{(n)} = \left[f^{(n-1)} \right]', \quad n \in N^*$$

مع $f^{(0)} = f$.[5]

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 1، ص. 231.

[2] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 5, p. 115.

[3] Ibid. Définition 6, p. 115.

[4] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 2، ص ص. 234-235.

[5] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 8, p. 116.

2-1- عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق

نظرية 4-2. *لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند نقطة a. الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند a ومشتقاتها كالآتي.*

1) $\forall \alpha, \beta \in R : (\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$

2) $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$

3) $(f(a) \neq 0)$ $\quad \left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{[f(a)]^2}$

4) $(g(a) \neq 0)$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{[g(a)]^2}$

5) $[f^n(a)]' = nf^{n-1}(a).f'(a)$

6) $(f^{n+1}(a) \neq 0,\ f^n(a) \neq 0)$ $\quad \left(\frac{1}{f^n}\right)'(a) = -\frac{nf'(a)}{f^{n+1}(a)}$ *(بتصرف).* [1]

7) $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$

8) $(b = f(a))$ $\quad (f^{-1})'(a) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$ [2]

2-2- مشتقات الدوال المألوفة

الجدول التالي يمثل مشتقات بعض الدوال المألوفة.

$f(x)$	$f'(x)$
$k / k \in R$	0
x	1
kx	k
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

---

(1) Edward T Dowling. Idem, pp. 38-39.

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Propositions 5 et 6, pp. 117-118.

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

جدول 4-1- مشتقات الدوال المألوفة [1]

3- تطبيقات الاشتقاق

3-1- قاعدة لوبيتال (L'Hôpital's Rule)

نظرية 4-3. *لتكن f و g دالتين مستمرتين وقابلتين للاشتقاق على مجال مفتوح $I \subset R$، $a \in I$ و $g(x) \neq 0$ من أجل $x \neq a$.*

إذا كان $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ *أو* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ *وكان* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$ *فان*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$$ [2]

ملاحظة 4-1. يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال في الحالات التالية: $a=\pm\infty$ و $\lambda=\pm\infty$، كما يمكن تطبيقها أكثر من مرة لإزالة حالة عدم التعيين.[3]

3-2- القيم الحدية لدالة (Extreme values of function)

نظرية 4-4. *لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I من R و $a \in I$.*

- *إذا كان $f'(a)=0$ و $f''(a)>0$ فان f تقبل قيمة حدية محلية صغرى $f(a)$ عند a.*
- *إذا كان $f'(a)=0$ و $f''(a)<0$ فان f تقبل قيمة حدية محلية عظمى $f(a)$ عند a.*
- *إذا كان $f'(a)=0$ و $f''(a)=0$ فلا يمكن استنتاج قيم حدية ل f.* [4]

3-3- الحساب الحدي في الاقتصاد

الحساب الحدي في الاقتصاد هو نسبة التغير في متغير بالنسبة لتغير طفيف في متغير آخر، فمثلا، تعرف التكلفة الحدية على أنها التغير في التكلفة الكلية الناجم عن إنتاج وحدة واحدة إضافية وللتعرف أكثر على تطبيقات الاشتقاق في الاقتصاد، نلخص بعض المصطلحات والقوانين الاقتصادية في الجدول التالي.

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 119.
(2) Ibid. Proposition 9, p. 125.
(3) Ibid, pp. 125-126.
(4) Edward T Dowling. Idem, p. 60.

القانون	الرمز	المصطلح
$-$	TC	التكلفة الكلية (Total Cost)
$TR = PQ$ حيث P السعر و Q الكمية	TR	الإيراد الكلي (Total Revenue)
$TP = TR - TC$	TP	الربح الكلي (Total Profit)
$MC = \dfrac{dTC}{dQ}$	MC	التكلفة الحدية (Marginal Cost)
$MR = \dfrac{dTR}{dQ}$	MR	الإيراد الحدي (Marginal Revenue)
$MP = \dfrac{dTP}{dQ}$ أو $MP = MR - MC$	MP	الربح الحدي (Marginal Profit)

جدول 4-2- رموز وقوانين الحساب الحدي في الاقتصاد (بتصرف) [1]

4- تمارين

تمرين 4-1. أوجد مشتقات الدوال التالية

$$2x^3 + x^4 - 5 \qquad \frac{3}{5x+1} + \frac{1}{x} - 6\sqrt{x} \qquad (4x-1)(x^2+7)$$

$$\frac{x^2}{x^3-7} \qquad (5x+2)^4 \qquad \frac{1}{(x^2+3)^5}$$

$$\sqrt{5x^3 - x} \qquad \ln(x^2-6) \qquad e^{3x-4}$$

الحل. إيجاد مشتقات الدوال التالية

$$\left(2x^3 + x^4 - 5\right)' = 6x^2 + 4x^3$$

$$\left(\frac{3}{5x+1} + \frac{1}{x} - 6\sqrt{x}\right)' = 3\frac{-5}{(5x+1)^2} - \frac{1}{x^2} - 6\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-15}{(5x+1)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\left[(4x-1)(x^2+7)\right]' = 4(x^2+7) + (2x)(4x-1) = 12x^2 - 2x + 28$$

$$\left(\frac{x^2}{x^3-7}\right)' = \frac{2x(x^3-7) - 3x^2(x^2)}{(x^3-7)^2} = \frac{-x^4 - 14x}{(x^3-7)^2}$$

$$\left((5x+2)^4\right)' = 4(5)(5x+2)^3 = 20(5x+2)^3$$

$$\left(\frac{1}{(x^2+3)^5}\right)' = -\frac{5(2x)}{(x^2+3)^6} = \frac{-10x}{(x^2+3)^6}$$

$$\left(\sqrt{5x^3 - x}\right)' = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3 - x}}$$

---

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص.195.

$$\left(\ln\left(x^2-6\right)\right)' = \frac{2x}{x^2-6}$$

$$\left(e^{3x-4}\right)' = 3e^{3x-4}$$

تمرين 4−2. أوجد المشتقات المتتابعة من الرتبة n للدوال التالية

$$f(x) = 3x^5 - 2x + 7 \qquad g(x) = \frac{1}{x};\quad x \neq 0$$

$$h(x) = \left(2x-1\right)^4 \qquad j(x) = e^x$$

الحل. إيجاد المشتقات المتتابعة من الرتبة n للدوال التالية

1) $f(x) = 3x^5 - 2x + 7$

$$f^{(0)}(x) = f(x) \qquad f^{(1)}(x) = 15x^4 - 2$$

$$f^{(2)}(x) = 60x^3 \qquad f^{(3)}(x) = 180x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 360x \qquad f^{(5)}(x) = 360$$

$$f^{(6)}(x) = 0 \qquad \forall n \geq 6: f^{(n)}(x) = 0$$

2) $g(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1};\quad x \neq 0$

$$g^{(0)}(x) = g(x)$$

$$g^{(1)}(x) = -x^{-2} = \left(-1\right)^1 .1!x^{-(1+1)}$$

$$g^{(2)}(x) = 2x^{-3} = \left(-1\right)^2 .2!x^{-(2+1)}$$

$$g^{(3)}(x) = -6x^{-4} = \left(-1\right)^3 .3!x^{-(3+1)}$$

$$g^{(4)}(x) = 24x^{-5} = \left(-1\right)^4 .4!x^{-(4+1)}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(x) = \left(-1\right)^n .n!x^{-(n+1)}$$

إذا $\forall n \geq 1: g^{(n)}(x) = \dfrac{n!\left(-1\right)^n}{x^{n+1}}$

3) $h(x) = \left(2x-1\right)^4$

$$h^{(0)}(x) = h(x) \qquad h^{(1)}(x) = 8\left(2x-1\right)^3$$

$$h^{(2)}(x) = 24\left(2x-1\right)^2 \qquad h^{(3)}(x) = 48\left(2x-1\right)$$

$$h^{(4)}(x) = 96 \qquad h^{(5)}(x) = 0$$

$$\forall n \geq 5: h^{(n)}(x) = 0$$

4) $j(x) = e^x$

$$j^{(0)}(x) = j(x)$$

$$j^{(1)}(x) = e^x = j^{(2)}(x) = \ldots = j^{(n)}(x)$$

إذا $\forall n \geq 0: j^{(n)}(x) = e^x$

تمرين 4−3. باستعمال قاعدة لوبيتال، أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^5-1} \qquad \lim_{x \gtrsim 0} x\ln x \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x$$

الحل. حساب النهايات التالية باستعمال قاعدة لوبيتال

1) حالة عدم التعيين $\frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+x}{x^2}$. بتطبيق قاعدة لوبيتال مرتين، نجد

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+x}{x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}+1}{2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}2e^{2x} = +\infty\end{aligned}$$

2) حالة عدم التعيين $\frac{0}{0} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^5-1}$. بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^5-1} = \lim_{x\to1}\frac{1}{5x^4} = \frac{1}{5}$$

3) حالة عدم التعيين $0.-\infty = \lim_{x\gneqq0}x\ln x$. بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\begin{aligned}\lim_{x\gneqq0}x\ln x &= \lim_{x\gneqq0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\gneqq0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\gneqq0}-x = 0\end{aligned}$$

4) حالة عدم التعيين $-\infty.0 = \lim_{x\to-\infty}xe^x$. بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}xe^x &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}-e^x = 0\end{aligned}$$

تمرين 4−4. تعطى دالة الإيراد الكلي لشركة ما بالعلاقة التالية

وحدة نقدية $TR(Q) = -Q^3 - 30Q^2 + 7200Q - 400$

− أوجد عدد الوحدات الواجب بيعها حتى يكون الإيراد الكلي أكبر ما يمكن.

الحل. لإيجاد الكمية Q التي من أجلها يكون الإيراد الكلي أكبر ما يمكن، علينا إيجاد القيم الحدية للدالة TR.

لنجد دالة الإيراد الحدي MR. لدينا

$$MR(Q) = \frac{dTR(Q)}{dQ} = -3Q^2 - 60Q + 7200$$

نحل المعادلة

$$\begin{aligned}MR(Q) = 0 &\Leftrightarrow -3Q^2 - 60Q + 7200 = 0\\ &\Leftrightarrow -3(Q-40)(Q+60) = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}Q-40=0\\ Q+60=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}Q=40\\ Q=-60\end{cases}\end{aligned}$$

ومنه القيم الحرجة ل TR هي $Q=40$ و $Q=-60$ (مرفوضة، لأن $Q \geq 0$) ولدينا

$$\frac{dMR}{dQ}(Q)=-6Q-60$$

وعليه

$$\frac{dMR}{dQ}(40)=-300<0$$

ومنه دالة الإيراد الكلي TR تقبل قيمة حدية عظمى $TR(40)=175600$ من أجل $Q=40$، أي، على الشركة بيع 40 وحدة للحصول على أعلى إيراد كلي وهو 175600 وحدة نقدية.

تمرين 4-5. في مصنع ما، تعطى دالة التكاليف الكلية بالعلاقة التالية

$$TC(Q)=Q^3+105Q^2-2400Q+800 \quad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد التكلفة الحدية عند إنتاج $Q=20$ وحدة.

الحل

- إيجاد دالة التكلفة الحدية MC

$$MC(Q)=\frac{dTC}{dQ}(Q)=3Q^2+210Q-2400$$

ومنه التكلفة الحدية عند $Q=20$

$$MC(20)=3(20)^2+210(20)-2400=3000 \quad \text{وحدة نقدية}$$

ومنه التكلفة الحدية عند إنتاج 20 وحدة هي 3000 وحدة نقدية، أي الوحدة الإضافية (الوحدة رقم 21) تكلف المصنع 3000 وحدة نقدية.

تمرين 4-6. تعطى دالة التكاليف الكلية لشركة ما بالعلاقة التالية

$$TC(Q)=Q^2-40Q+400 \quad \text{وحدة نقدية}$$

- ما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجها للحصول على أقل تكلفة كلية ؟

الحل. لإيجاد الكمية Q التي من أجلها تكون التكلفة الكلية أقل ما يمكن، علينا إيجاد القيم الحدية للدالة TC.

لنجد دالة التكلفة الحدية MC. لدينا

$$MC(Q)=\frac{dTC(Q)}{dQ}=2Q-40$$

نحل المعادلة

$$MC(Q)=0 \Leftrightarrow 2Q-40=0$$
$$\Leftrightarrow Q=20$$

ومنه $Q=20$ قيمة حرجة ل TC ولدينا

$$\frac{dMC}{dQ}(Q)=2>0$$

ومنه، دالة التكلفة الكلية TC تقبل قيمة حدية صغرى $TC(20)=0$ من أجل $Q=20$، أي، على الشركة إنتاج 20 وحدة للحصول على أقل تكلفة كلية وهي 0 وحدة نقدية.

الفصل الخامس

الدوال الأصلية

وحساب التكامل

في الفصل الرابع، تطرقنا إلى المشتقات، أي إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ ، فما هي دالتها المشتقة $f'(x)$ ؟

في هذا الفصل سنجيب على السؤال العكسي، أي إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ ، فما هي الدالة الأصلية $F(x)$ ل $f(x)$ ، بحيث $F'(x)=f(x)$ ؟

للتكامل دور مهم في الاقتصاد، فهو يستعمل لإيجاد الدوال الاقتصادية انطلاقا من دوالها الحدية، كأن نجد دالة التكلفة الكلية انطلاقا من دالة التكلفة الحدية، أو دالة الإيراد الكلي باعتباره المساحة المحصورة بين منحنى دالة الإيراد الحدي ومحوري الإحداثيات.

1- التكامل غير المحدود

تعريف 5-1. *لتكن f دالة مستمرة على مجال I من R. نقول أن $F(x)+c$ تكامل غير محدود للدالة $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان $F'(x)=f(x)$ ونكتب*

$$\int f(x)dx = F(x)+c,\quad c\in R$$

ونقرأ " تكامل $f(x)$ تفاضل x" وتسمى $F(x)$ دالة أصلية ل $f(x)$ و c ثابت التكامل. [1]

ملاحظة 5-1

1) إن المتغير x في الترميز $\int f(x)dx$ متغير "أصم"، أي يمكن تعويض الحرف x بأي حرف آخر

$$\int f(x)dx = \int f(u)du = \int f(t)dt = \dots$$ [2]

2) يوجد تكامل غير محدود وحيد $F(x)+c$ ل f يأخذ القيمة λ عند x_0 ، أي

$$F(x_0)+c=\lambda$$ [3]

1-1- التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة

الجدول التالي يوضح التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة.

الدالة $f(x)$	*التكامل غير المحدود* $\int f(x)dx$
0	$c,\quad c\in R$
1	$x+c$
$k,\quad k\in R$	$kx+c$
$x^n,\quad n\neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$u'u^n,\quad n\neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + c$ *(بتصرف)* [4]

(1) Yadolah Dodge. *Mathématiques de base pour économistes.* Springer, Paris, 2007, p. 122.

(2) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 298.

(3) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Proposition 2, p. 149.

(4) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 307.

$\int f(x)dx$ التكامل غير المحدود	$f(x)$ الدالة
$2\sqrt{x}+c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$2\sqrt{u}+c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$\frac{1}{x^n},\ n\neq 1$
$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	$\frac{u'}{u^n},\ n\neq 1$
e^x+c	e^x
e^u+c	$u'e^u$
$-\cos x+c$	$\sin x$
$\sin x+c$	$\cos x$

جدول 5-1- التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة (بتصرف) [1]

ملاحظة 5-2. نعلم أن مشتق الدالة المركبة $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ هو $(f\circ g)'(x)=f'(g(x)).g'(x)$ وعليه يجب مراعاة عبارة $g'(x)$ عند إيجاد التكامل غير المحدود للدالة $(f\circ g)'(x)$.

1-2- خواص التكامل غير المحدود

نظرية 5-1. *لتكن f و g دالتين مستمرتين على مجال I من R و $\alpha\in R$. لدينا*

1) $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

2) $\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx$ [2]

وبتعميم الخاصيتين السابقتين، نجد

3) $\int[\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+...+\alpha_n f_n(x)]dx=\alpha_1\int f_1(x)dx+\alpha_2\int f_2(x)dx+...+\alpha_n\int f_n(x)dx$

بحيث $\alpha_i\in R,\ i=\overline{1,n}$ و $f_i,\ i=\overline{1,n}$ دوال مستمرة على مجال I من R.

4) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ و $\int f'(x)dx=f(x)+c$ [3]

2- التكامل المحدود

تعريف 5-2. *لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$. نسمي التكامل المحدود لـ f على $[a,b]$، التكامل الذي يرمز له بـ*

$$\int_a^b f(x)dx$$

ونقرأ " تكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x"[4]*، المعرف كما يلي*

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 123.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 7.8, p. 173.
(3) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, pp. 294-296.
(4) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 132.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

بحيث F دالة أصلية ل f ويسمى a الحد الأدنى للتكامل المحدود و b حده الأعلى. (1)

ملاحظة 5-3

1) المتغير x في الترميز $\int_a^b f(x)dx$ متغير "أصم"، أي يمكن تعويض الحرف x بأي حرف آخر

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(\mu)d\mu = ... \quad (2)$$

2) يجب التفرقة بين التكامل غير المحدود $\int f(x)dx$ والتكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$، حيث الأول يمثل الدوال الأصلية $F(x)+c$ للدالة $f(x)$ ، في حين الثاني يمثل عددا حقيقيا $F(b)-F(a)$. (3)

3) يمثل التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ هندسيا، المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f ، محور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$. بما أن المساحة دائما موجبة (أو معدومة) فانه يكفي أخذ القيمة $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$، إن كانت قيمة التكامل $\int_a^b f(x)dx$ سالبة (بتصرف). (4)

- **خواص التكامل المحدود**

نظرية 5-2. *لتكن f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a,b]$ و $\alpha \in R$. لدينا*

1) *(الخاصية الخطية للتكامل)* $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

2) *(علاقة شال)* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \quad a \le c \le b$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (5)

5) *إذا كان* $a<b$ و $\forall x \in [a,b]: f(x) \ge 0$، فان $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

6) *إذا كان* $a<b$ و $\forall x \in [a,b]: f(x) \le g(x)$، فان $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

7) *إذا كان* $a<b$، فان $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ (6)

---

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 302.
(2) Ibid, p. 302.
(3) Ibid, p. 303.
(4) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 132-135.
(5) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 298.
(6) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit, pp. 154-155.

3- طرق التكامل

لإيجاد الدوال الأصلية في التكامل سواء كان محدودا أو غير محدود، نلجأ أولا إلى جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة (الجدول 5-1) مع الاستعانة ببعض خواص التكاملين. أما إن كان التكامل معقدا، فنستخدم طرقا لتبسيطه وللرجوع في النهاية إلى الجدول 5-1. فيما يلي بعض أشهر طرق التكامل.

3-1- طريقة تغيير المتغير

نظرية 5-3. *لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$، g دالة قابلة للاشتقاق ومشتقتها الأولى مستمرة على مجال $[\alpha,\beta]$ و g تأخذ قيمها في $[a,b]$ بحيث $g(\alpha)=a$ و $g(\beta)=b$، لدينا إذا*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx \quad (1)$$

ملاحظة 5-4. بالنسبة للتكامل غير المحدود، لدينا

$$\int f(u)du=\int f(g(x))g'(x)dx,\quad u=g(x) \quad (2)$$

3-2- طريقة التكامل بالتجزئة

تستخدم طريقة التكامل بالتجزئة في حالة جداء دالتين، بحيث يمكن إيجاد الدالة الأصلية لإحديهما بسهولة.

يمكن استنتاج عبارة التكامل بالتجزئة من مشتق جداء دالتين كما يلي

$$(f.g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

ومنه

$$f(x)g'(x)=(f.g)'(x)-f'(x)g(x)$$

وعليه

$$\begin{aligned}(3)\int f(x)g'(x)dx&=\int (f.g)'(x)dx-\int f'(x)g(x)dx\\&=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

وبالنسبة للتكامل المحدود، نحصل على العلاقة التالية

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

بحيث f و g دالتان قابلتان للاشتقاق ومشتقتاهما مستمرتان على مجال $[a,b]$ من R.[4]

3-3- طريقة التفريق إلى كسور بسيطة

لتكن لدينا الدالة الناطقة $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $Q(x)\neq 0$ ودرجة البسط $P(x)$ أقل من درجة المقام $Q(x)$ ونكتب $\deg P(x)<\deg Q(x)$ (إن كان $\deg P(x)\geq \deg Q(x)$، نلجأ للقسمة الإقليدية، فنحصل على

---

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. قضية 7، ص. 309.

(2) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 320.

(3) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 163.

(4) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 7.11, p. 177.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{حاصل قسمة } P \text{ على } Q + \frac{\text{باقي قسمة } P \text{ على } Q}{Q(x)}$$

بحيث درجة باقي قسمة P على Q أقل من درجة Q).

إن كانت هناك صعوبة في إيجاد دالة أصلية للدالة f ، نلجأ إلى طريقة تفريق الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ إلى كسور بسيطة يسهل مكاملتها. فيما يلي أهم الحالات التي تستخدم فيها هذه الطريقة. [1]

3-3-1- تحليل المقام إلى عدة عوامل غير متكررة

إن أمكن تحليل المقام $Q(x)$ إلى عدة عوامل (من الدرجة الأولى، أو الثانية أو الثالثة أو أكثر، لا يمكن تحليلها إلى جداء عوامل أقل درجة) غير متكررة، فإنه ينتج لنا عدة كسور جزئية على النحو التالي

$$(*).......f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha}{a_1x+b_1} + \frac{\beta}{a_2x+b_2} + \frac{\gamma x+\lambda}{a_3x^2+b_3x+c_1} + \frac{\vartheta x^2+\tau x+\sigma}{a_4x^3+b_4x^2+c_2x+d_1} + ...$$

بحيث $a_1,..,a_4,b_1,...,b_4,c_1,c_2,d_1,\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\vartheta,\tau,\sigma,...$ أعداد حقيقية ودرجة البسط في الكسور الجزئية أقل بدرجة واحدة من درجة المقام (بتصرف). [2]

3-3-2- تحليل المقام إلى عدة عوامل بعضها متكرر

لتكن لدينا الدالة $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ بحيث $Q(x) \neq 0$ و $\deg P(x) < \deg Q(x)$. إن أمكن تحويل المقام $Q(x)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى بعضها متكرر، فان العوامل المتكررة تنتج لنا العبارة التالية

$$(**)............\frac{g(x)}{(x+k)^n} = \frac{a}{x+k} + \frac{b}{(x+k)^2} + ... + \frac{m}{(x+k)^{n-1}} + \frac{l}{(x+k)^n}$$

بحيث $k,a,b,...,m,l \in R$ و $\deg(g(x)) < n$.

يمكن تطبيق العلاقة (**)، إن أمكن تحويل $Q(x)$ إلى جداء عوامل من درجة أعلى بعضها متكرر، مع مراعاة أن تكون درجة البسط أقل بدرجة واحدة من درجة المقام (بتصرف). [3]

ملاحظة 5-5. إن أمكن تحويل المقام $Q(x)$ إلى جداء عوامل بعضها متكرر والآخر غير متكرر، فإننا نجمع بين العبارتين (*) و (**).

4- تطبيقات التكامل في الاقتصاد

يستخدم التكامل في الاقتصاد –على سبيل المثال– لحساب دالتي التكلفة الكلية والإيراد الكلي باعتبارهما الدوال الأصلية لدالتي التكلفة الحدية والإيراد الحدي على الترتيب، أي

$$TR(Q) = \int MR(Q)dQ \quad \text{و} \quad TC(Q) = \int MC(Q)dQ$$

[1] سلطان محمد عبد الحميد. *رياضيات الأعمال للتجاريين*. المكتبة العصرية، مصر، 2007، ص ص. 373-374.

[2] نفسه، ص. 374.

[3] نفسه ، ص. 381.

5- تمارين

تمرين 5-1. أوجد ما يلي

$$\int\left(3x+x^4-8\right)dx \qquad \int\left(\frac{2}{x}-e^x\right)dx \qquad \int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}\right)dx \qquad \int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+6}}dx$$

$$\int_0^1\left(2x-1\right)^4dx \qquad \int_{-3}^2\frac{1}{x+4}dx \qquad \int_2^4\frac{1}{\left(3x-7\right)^5}dx \qquad \int_1^3 e^{6x}dx$$

الحل. إيجاد ما يلي

$$\int\left(3x+x^4-8\right)dx=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{5}x^5-8x+c \qquad / c\in R$$

$$\int\left(\frac{2}{x}-e^x\right)dx=2\ln|x|-e^x+c$$

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}\right)dx=10\sqrt{x}-\frac{1}{3x^3}+c$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+6}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+6}+c$$

$$\int_0^1\left(2x-1\right)^4dx=\left[\frac{1}{10}\left(2x-1\right)^5\right]_0^1=\frac{1}{10}\left(1^5-\left(-1\right)^5\right)=\frac{1}{5}$$

$$\int_{-3}^2\frac{1}{x+4}dx=\left[\ln|x+4|\right]_{-3}^2=\ln\left(6\right)$$

$$\int_2^4\frac{1}{\left(3x-7\right)^5}dx=\left[\frac{-1}{12\left(3x-7\right)^4}\right]_2^4=\frac{-1}{12}\left(\frac{1}{625}-1\right)=\frac{52}{625}$$

$$\int_1^3 e^{6x}dx=\left[\frac{1}{6}e^{6x}\right]_1^3=\frac{1}{6}\left(e^{18}-e^6\right)$$

تمرين 5-2. باستعمال طريقة تغيير المتغير، أوجد ما يلي

$$\left(I\right)=\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^3dx \quad \left(y=x^2+1\right) \qquad\qquad \left(J\right)=\int\frac{e^{4x}}{e^{4x}+5}dx \quad \left(y=e^{4x}+5\right)$$

الحل. إيجاد ما يلي، باستعمال طريقة تغيير المتغير

1) $\left(I\right)=\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^3dx$

نضع $y=x^2+1$ ومنه $dy=2xdx$. إذا كان $x=0$ فان $y=0^2+1=1$ وإذا كان $x=1$ فان $y=1^2+1=2$. إذا

$$\left(I\right)=\int_1^2 y^3dy$$

$$=\left[\frac{1}{4}y^4\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(16-1\right)=\frac{15}{4}$$

2) $(J)=\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+5}dx$

نضع $y=e^{4x}+5$ ومنه $dy=4e^{4x}dx$ وعليه $e^{4x}dx=\frac{1}{4}dy$. إذا

$$\begin{aligned}(J)&=\frac{1}{4}\int\frac{1}{y}dy\\&=\frac{1}{4}\ln|y|+c\\&=\frac{1}{4}\ln\left|e^{4x}+5\right|+c\end{aligned}$$

تمرين 5−3. باستعمال طريقة التكامل بالتجزئة، أوجد ما يلي

$$(J)=\int_1^2 x(x+1)^3\,dx \qquad\qquad (I)=\int 2xe^x dx$$

الحل. إيجاد ما يلي، باستعمال طريقة التكامل بالتجزئة

1) $(I)=\int 2xe^x dx=\int 2x.e^x dx$

نضع

$$\begin{aligned}&f(x)=2x \quad\Rightarrow f'(x)=2dx\\&g'(x)=e^x dx\Rightarrow g(x)=e^x\end{aligned}$$

ومنه

$$(I)=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}(I)&=2xe^x-\int 2.e^x dx\\&=2xe^x-2\int e^x dx\\&=2xe^x-2\left(e^x+c\right)\\&=2e^x(x-1)+c\end{aligned}$$

2) $(J)=\int_1^2 x(x+1)^3\,dx=\int_1^2 x.(x+1)^3\,dx$

نضع

$$\begin{aligned}&f(x)=x \qquad\qquad \Rightarrow f'(x)=1dx\\&g'(x)=(x+1)^3\,dx\Rightarrow g(x)=\frac{1}{4}(x+1)^4\end{aligned}$$

ومنه

$$(J)=\left[f(x)g(x)\right]_1^2-\int_1^2 f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}(J)&=\frac{1}{4}\left[x(x+1)^4\right]_1^2-\frac{1}{4}\int_1^2(x+1)^4\,dx\\&=\frac{1}{4}\left[x(x+1)^4\right]_1^2-\frac{1}{20}\left[(x+1)^5\right]_1^2\\&=\frac{1}{4}(162-16)-\frac{1}{20}(243-32)\\&=\frac{519}{20}\end{aligned}$$

تمرين 5−4. باستعمال طريقة التفريق إلى كسور بسيطة، أوجد ما يلي

$$(I)=\int\frac{x^4+2x^2-2}{x^3+2x}dx \qquad\qquad (J)=\int_0^1\frac{3x+2}{x^2+2x+1}dx$$

الحل. إيجاد ما يلي، باستعمال طريقة التفريق إلى كسور بسيطة

1) $$(I)=\int\frac{x^4+2x^2-2}{x^3+2x}dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

نلاحظ أن $\deg(P)=4>\deg(Q)=3$ وعليه نقوم بالقسمة الإقليدية لجعل درجة البسط أقل من درجة المقام، أي

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^2-2 & \dfrac{x^3+2x}{x} \\ - & \\ x^4+2x^2 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

ومنه

$$\begin{aligned}(I)&=\int\left(x-\frac{2}{x^3+2x}\right)dx\\&=\int xdx+\int\frac{-2}{x^3+2x}dx\end{aligned}$$

بتحليل المقام، نجد $x^3+2x=x\left(x^2+2\right)$ ومنه

$$(I)=\int xdx+\int\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}dx$$

كثير الحدود x^2+2 لا يقبل جذور في R ومنه لا يقبل التحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى. في التفرقة إلى كسور بسيطة، يجب أن تكون درجة البسط أقل بدرجة واحدة من درجة المقام. لدينا $\deg(x)=1$ وعليه درجة بسطه تساوي 0 أي عدد ثابت a و $\deg(x^2+2)=2$ فإن درجة بسطه تساوي 1 أي $bx+c$ ومنه

$$(I)=\int xdx+\int\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}dx=\int xdx+\int\left(\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}\right)dx$$

لإيجاد الثوابت a ، b و c ، نلجأ لطريقة الجمع والتعويض، أي

$$\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}$$

بالجمع، نجد

$$\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{a\left(x^2+2\right)+x\left(bx+c\right)}{x\left(x^2+2\right)}$$

بالمطابقة طرفا لطرف، نجد

$$-2=a\left(x^2+2\right)+x\left(bx+c\right)=\left(a+b\right)x^2+cx+2a$$

أي

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ 2a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{aligned}
(I)&=\int xdx+\int \frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}dx \\
&=\int xdx+\int\left(\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}\right)dx \\
&=\int xdx+\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+2}\right)dx \\
&=\int xdx+\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{x}{x^2+2}dx \\
&=\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+c
\end{aligned}$$

2) $(J)=\int_0^1\frac{3x+2}{x^2+2x+1}dx=\int_0^1\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

نلاحظ أن $\deg(P)=1<\deg(Q)=2$. بتحليل المقام، نجد $x^2+2x+1=\left(x+1\right)^2$ ومنه

$$(J)=\int_0^1\frac{3x+2}{\left(x+1\right)^2}dx$$

نلاحظ أن المقام $(x+1)^2$ متكرر مرتين وعليه

$$\begin{aligned}
(J)&=\int_0^1\frac{3x+2}{\left(x+1\right)^2}dx \\
&=\int_0^1\left(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{\left(x+1\right)^2}\right)dx
\end{aligned}$$

بالجمع، نجد

$$\begin{aligned}
(J)&=\int_0^1\frac{a(x+1)+b}{\left(x+1\right)^2}dx \\
&=\int_0^1\frac{ax+\left(a+b\right)}{\left(x+1\right)^2}dx \\
&=\int_0^1\frac{3x+2}{\left(x+1\right)^2}dx
\end{aligned}$$

بالمطابقة طرفا لطرف بين آخر سطرين من التكامل (J)، نجد

$$\begin{cases} a=3 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{aligned}(J) &= \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= 3\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= 3\left[\ln|x+1| \right]_0^1 + \left[\frac{1}{x+1} \right]_0^1 \\ &= 3\ln(2) + \frac{1}{2} - 1 \\ &= 3\ln(2) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

تمرين 5−5. التكلفة الطبية السنوية للعامل الواحد بالدينار الجزائري في أحد المصانع، تعطى بالعلاقة التالية

$$C(x) = 3000\left(2+0.4x^3\right) \qquad DA$$

مع x تمثل سنوات خدمة العامل بالمصنع.

- قدِّر التكلفة الطبية للعامل الواحد بعد مرور ست سنوات من الآن.

الحل. التكلفة الطبية للعامل الواحد بعد مرور ست سنوات من الآن هي

$$\begin{aligned}C &= \int_0^6 C(x)\, dx \\ &= \int_0^6 \left(3000\left(2+0.4x^3\right)\right) dx \\ &= 3000\int_0^6 \left(2+0.4x^3\right) dx \\ &= 3000\left[2x+0.1x^4\right]_0^6 \\ &= 424800 \quad DA\end{aligned}$$

أي، العامل الواحد سيكلف المصنع طبيا بعد ست سنوات من الآن ما يقارب 424800 دينارا جزائريا.

تمرين 5−6. إذا كانت دالة الإيراد الحدي لشركة ما معطاة بالعلاقة التالية

$$MR(Q) = Q - 4 + \frac{3}{Q-1} \qquad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد دالة الإيراد الكلي.

الحل. دالة الإيراد الكلي هي

$$\begin{aligned}TR(Q) &= \int MR(Q)\, dQ \\ &= \int \left(Q - 4 + \frac{3}{Q-1} \right) dQ \\ &= \frac{1}{2}Q^2 - 4Q + 3\ln|Q-1| + c\end{aligned}$$

الفصل السادس

المعادلات

التفاضلية

المعادلات التفاضلية هي المعادلات التي تربط بين مجهولين أو أكثر ومشتقاتها. سنتطرق في هذا الفصل إلى المعادلات التفاضلية من الرتبتين الأولى والثانية.

تعريف 6-1. نسمي *معادلة تفاضلية عادية من الرتبة* n (*an ordinary differential equation of order* n)، *كل معادلة من الشكل*

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}\right) = 0 ....(*)$$

حيث F *دالة حقيقية معلومة ذات* $(n+2)$ *متغيرا و* y *دالة حقيقية مجهولة ذات متغير حقيقي* x *ويُرمز لمشتقة* y *من الرتبة* p *بـ* $y^{(p)}$ *مع* $p = \overline{1,n}$. [1]

نقول عن دالة حقيقية f *معرفة على مجال* I *من* R، *إنها حل أو تكامل للمعادلة التفاضلية (*) على المجال* I، *إذا كانت* f *قابلة للاشتقاق* n *مرة على المجال* I، *بحيث*

$$\forall x \in I : F\left(x, f(x), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), ..., f^{(n)}(x)\right) = 0 \quad [2]$$

ملاحظة 6-1

1) تسمى العبارة (*) بالصيغة المشتقة للمعادلة التفاضلية ويمكن أن تُكتب هذه الأخيرة بالصيغة التفاضلية التالية

$$[3] \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

2) لنفرض أن لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى على الشكل

$$y' = \varphi(x) ....(**)$$

بحيث φ دالة حقيقية مستمرة على مجال I من R. الدالة

$$f : I \to R$$
$$x \mapsto f(x) = \int_a^x \varphi(t)dt; \quad a \in I$$

تسمى حلا خاصا (particular solution) للمعادلة التفاضلية (**)، بحيث f دالة أصلية لـ φ.

الحل العام (general solution) للمعادلة التفاضلية (**) هو

$$f : I \to R$$
$$[4] \quad x \mapsto f(x) = \int_a^x \varphi(t)dt + c; \quad a \in I, c \in R$$

3) رتبة (order) معادلة تفاضلية تُنسب إلى رتبة أعلى مشتق في المعادلة، فنقول أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى، إذا كانت على الشكل

$$F(x, y, y') = 0$$

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 1، ص. 327.
[2] نفسه. تعريف 2، ص. 327.
[3] عمر صخري. *مبادئ الاقتصاد الرياضي*. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1984، ص. 163.
[4] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. مثال، ص ص. 327-328.

وأنها من الرتبة الثانية، إذا كانت على الشكل

$$F\left(x, y, y', y''\right)=0$$

وبشكل عام، أنها من الرتبة n، إذا كانت على الشكل

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0$$

4) درجة (degree) معادلة تفاضلية تُنسب إلى أعلى قوة (أس) يكون مرفوعا بها المشتق ذو الرتبة العليا.(1)

ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والرتبتين الأولى والثانية.

1- المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى (First-order differential equations)

تعريف 6-2. *نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، كل معادلة على الشكل*

$$y'=h(x, y)$$

حيث h دالة حقيقية معرفة على مجال I من R^2 في R. إن كان $y(x)$ حلا للمعادلة السابقة، فإنه وحيد من أجل الشرط الابتدائي $y(x_0)=y_0$. (2)

لا توجد قاعدة عامة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ورغم أن بعضها ليس لها حل، إلا أن البعض الآخر يأخذ أنماطا معينة يسهُل حلها، نستعرض أشهرها فيما يلي.

1-1- المعادلات التفاضلية منفصلة المتغيرات (Differential equations with variables separable)

تعريف 6-3. *نسمي معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات، كل معادلة على الشكل*

$$f(y) y'=g(x)$$

حيث و دالتان معرفتان على الترتيب على مجالين I_1 و I_2 من R. باستخدام الصيغة التفاضلية $y'=\frac{dy}{dx}$، تُكتب المعادلة السابقة كالتالي

$$f(y) dy=g(x) dx$$

ولحل المعادلة، نكتب

$$\int f(y) dy=\int g(x) dx$$

أي

$$F(y)=G(x)+c$$

حيث F و G دالتان أصليتان لـ f و g على الترتيب و c ثابت اختياري. (3)

تكون الدالة القابلة للاشتقاق $u: I \subset I_1 \rightarrow I_2$ حلا للمعادلة التفاضلية السابقة، إذا كان

$$F(u(x))=G(x)+c, \quad \forall x \in I$$

إذا كانت الدالة F تقبل دالة عكسية، فيمكن تعيين عبارة u كما يلي

$$u(x)=F^{-1}(G(x)+c), \quad \forall x \in I \quad (4)$$

(1) عمر صخري. المرجع السابق، ص ص. 163-164.

(2) Viatcheslav Vinogradov. *A Cook-book of mathematics*. CERGE-EI Lecture Notes, Prague, 1999, p. 63.

(3) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص ص. 328-329.

(4) نفسه، ص. 328.

2-1- المعادلات التفاضلية المتجانسة (Homogeneous differential equations)

تعريف 6-4. نقول عن دالة $f(x,y)$ أنها متجانسة من الدرجة n، إذا كان من أجل كل عدد حقيقي λ

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$ [1]

تعريف 6-5. إذا كان لدينا معادلة تفاضلية من الشكل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0............(E)$$

بحيث M و N دالتان متجانستان من الدرجة نفسها n، فإن تغيير المتغير $y=tx$ يجعل المعادلة (E) معادلة ذات متغيرين منفصلين t و x وللحصول على حلول المعادلة (E)، نعوض بعد ذلك t ب $\frac{y}{x}$. [2]

2- المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية (Second-order differential equations)

تعريف 6-6. ليكن a و b عددين حقيقيين و $f:I\to R$ دالة معرفة ومستمرة. تُسمى المعادلة التفاضلية

$$y''+ay'+by=f(x).........(E_1)$$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة والمعادلة المتجانسة المرافقة لها هي

$$y''+ay'+by=0.........(E_2)$$ [3]

الحل العام للمعادلة (E_1) هو مجموع الحل العام للمعادلة (E_2) وحل خاص للمعادلة (E_1).

الحل العام للمعادلة (E_2) يُكتب على الشكل

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)............(E_3)$$

بحيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان و y_1 و y_2 حلان خاصان للمعادلة (E_2).

لإيجاد الحلين الخاصين y_1 و y_2، نرفق المعادلة (E_1) بمعادلتها المميزة (characteristic equation) التالية

$$\lambda^2+a\lambda+b=0...............(E_4)$$ [4]

نلاحظ أن المعادلة (E_4) عبارة عن معادلة لكثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز Δ، بحيث $\Delta=a^2-4b$ وهنا نميز ثلاث حالات

1) إذا كان $\Delta>0$، فإن المعادلة (E_4) تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما

$$\lambda_1=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{و} \quad \lambda_2=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$$

وعليه، الحلان الخاصان ل (E_2) هما

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x} \quad \text{و} \quad y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$$

ومنه، الحل العام للمعادلة (E_2) هو

$$y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$$

2) إذا كان $\Delta=0$، فإن المعادلة (E_4) تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو

$$\lambda=\frac{-a}{2}$$

---

(1) Viatcheslav Vinogradov. Idem. Definition 53, p. 64.

(2) Ibid, p. 64.

(3) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 334.

(4) Viatcheslav Vinogradov. Idem, p. 66.

وعليه، الحلان الخاصان ل (E_2) هما

$$y_2(x)=xe^{\lambda x} \quad و \quad y_1(x)=e^{\lambda x}$$

ومنه، الحل العام للمعادلة (E_2) هو

$$y(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x} \qquad (1)$$

3) إذا كان $\Delta<0$، فإن المعادلة (E_4) تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$$\lambda_2=\alpha-i\beta \quad و \quad \lambda_1=\alpha+i\beta$$

حيث α و β عددان حقيقيان مع $i^2=-1$ وعليه، الحلان الخاصان ل (E_2) هما

$$y_2(x)=e^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad و \quad y_1(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

ومنه، الحل العام للمعادلة (E_2) هو

$$y(x)=c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x) \qquad (2)$$

لدينا طريقتين لإيجاد حل خاص للمعادلة (E_1) هما

أ) طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x)=A(x)y_1(x)+B(x)y_2(x)$$

بحيث y_1 و y_2 حلان خاصان ل (E_2) و A و B دالتان قابلتان للاشتقاق تحققان جملة المعادلتين التاليتين

$$(3) \quad \begin{cases} A'(x)y_1(x)+B'(x)y_2(x)=0 \\ A'(x)y_1'(x)+B'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

ب) إذا كان

$$y''+ay'+by=f_1(x)+f_2(x)+....+f_r(x)$$

وكان $y_{p_1}(x)$ حلا خاصا للمعادلة $y''+ay'+by=f_1(x)$ و $y_{p_2}(x)$ حلا خاصا للمعادلة $y''+ay'+by=f_2(x)$

و... و $y_{p_r}(x)$ حلا خاصا للمعادلة $y''+ay'+by=f_r(x)$، فإن المعادلة (E_1) لها حل خاص هو

$$y(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+...+y_{p_r}(x) \qquad (4)$$

3- تمارين

تمرين 6-1. حل المعادلات التفاضلية التالية

1) $2yy'-3x=0$ مع $y(0)=2$ 　　 2) $dy=\dfrac{\sqrt{y}}{x}dx$ مع $y(1)=4$

3) $y'=\dfrac{-\sqrt{x}}{y^2}$ 　　 4) $y'-(y+2)x=0$ مع $y(0)=5$

الحل. المعادلات الأربع المعطاة هي معادلات منفصلة المتغيرات

1) لتكن المعادلة

$$2yy'-3x=0..................(1)$$

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 335.

(2) نفسه، ص. 335.

(3) نفسه، ص. 337.

(4) Viatcheslav Vinogradov. Idem, p. 67.

وعليه

$$(1)\Leftrightarrow 2yy'=3x$$
$$\Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx}=3x$$
$$\Leftrightarrow 2ydy=3xdx$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (1)، نجد

$$(1)\Leftrightarrow \int 2ydy=\int 3xdx$$
$$\Leftrightarrow y^2=\frac{3}{2}x^2+c\,/\,c\in R$$

التطبيق y^2 ليس تقابلا وبالتالي لا يقبل تطبيقا عكسيا على R. إذا حلول المعادلة (1) هي

$$y^2(x)=\frac{3}{2}x^2+c\,/\,c\in R$$

بما أن $y(0)=2$ ، فإن $y^2(0)=y(0)y(0)=4$ وعليه

$$y^2(0)=\frac{3}{2}(0)^2+c=4\Leftrightarrow c=4$$

إذا، للمعادلة (1) حل وحيد هو

$$y^2(x)=\frac{3}{2}x^2+4$$

2) نكتب من أجل $x\neq 0$ ، المعادلة المعطاة كما يلي

$$dy=\frac{\sqrt{y}}{x}dx\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{x}dx.............(2)$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (2)، نجد

$$(2)\Leftrightarrow \int\frac{1}{\sqrt{y}}dy=\int\frac{1}{x}dx$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{y}=\ln|x|+c\,/\,c\in R$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{2}\left(\ln|x|+c\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{2}\ln|x|+c'\,/\,c'=\frac{1}{2}c$$
$$\Leftrightarrow y=\left(\frac{1}{2}\ln|x|+c'\right)^2\,/\,c'\in R$$

بما أن $y(1)=4$ ، فإن

$$y(1)=\left(\frac{1}{2}\ln|1|+c'\right)^2=4\Leftrightarrow c'^2=4\Leftrightarrow c'=\pm 2$$

إذا، للمعادلة (2) حلان هما

$$y(x)=\left(\frac{1}{2}\ln|x|\pm 2\right)^2$$

3) نكتب من أجل $x\in R_+$ ، المعادلة المعطاة كما يلي

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sqrt{x}}{y^2}\Leftrightarrow y^2dy=-\sqrt{x}dx.............(3)$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (3)، نجد

$$(3) \Leftrightarrow \int y^2 dy = -\int \sqrt{x}dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}y^3 = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \,/\, c \in R$$
$$\Leftrightarrow y^3 = -2x^{\frac{3}{2}} + c' \,/\, c' = 3c$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{-2x^{\frac{3}{2}} + c'} \,/\, c' \in R$$

4) لتكن المعادلة

$$y' - (y+2)x = 0 ....(4)$$

وعليه

$$(4) \Leftrightarrow y' = (y+2)x$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (y+2)x$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y+2} = xdx$$

بمكاملة طرفي آخر مساواة في المعادلة (4)، نجد

$$(4) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y+2} = \int xdx$$
$$\Leftrightarrow \ln|y+2| = \frac{1}{2}x^2 + c \,/\, c \in R$$
$$\Leftrightarrow |y+2| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c}$$
$$\Leftrightarrow |y+2| = e^c . e^{\frac{1}{2}x^2}$$

نميز حالتين هما

إذا كان $y \geq 2$ ، فإن $|y+2| = y+2 = e^c.e^{\frac{1}{2}x^2} \Leftrightarrow y = e^c.e^{\frac{1}{2}x^2} - 2$

إذا كان $x < 2$ ، فإن $|y+2| = -y-2 = e^c.e^{\frac{1}{2}x^2} \Leftrightarrow y = -e^c.e^{\frac{1}{2}x^2} - 2$

ويمكن إجمال الحلين السابقين في الشكل العام التالي

$$y(x) = ke^{\frac{1}{2}x^2} - 2 \,/\, \forall x, k \in R$$

بما أن $y(0) = 5$ ، فإن

$$y(0) = k - 2 = 5 \Leftrightarrow k = 7$$

إذا، للمعادلة (4) حل وحيد هو

$$y(x) = 7e^{\frac{1}{2}x^2} - 2 \,/\, \forall x \in R$$

تمرين 6−2. حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(x+y)dx + xdy = 0$$

الحل. نضع

$$(x+y)dx + xdy = 0 ....(I)$$

المعادلة المعطاة متجانسة. نضع $M(x,y)=x+y$ و $N(x,y)=x$. الدالتان M و N متجانستان من الدرجة الأولى، بحيث

$$\begin{aligned} M(\lambda x,\lambda y) &= (\lambda x)+(\lambda y) \\ &= \lambda x+\lambda y \\ &= \lambda(x+y) \\ &= \lambda M(x,y) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} N(\lambda x,\lambda y) &= \lambda x \\ &= \lambda(x) \\ &= \lambda N(x,y) \end{aligned}$$

نضع $y=tx$ ومنه $dy=tdx+xdt$. بالتعويض في المعادلة (I)، نجد

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow (x+tx)dx+x(tdx+xdt)=0 \\ &\Leftrightarrow xdx+txdx+xtdx+x^2dt=0 \\ &\Leftrightarrow (2xt+x)dx+x^2dt=0 \\ &\Leftrightarrow x\left((2t+1)dx+xdt\right)=0 \end{aligned}$$

بتقسيم طرفي آخر مساواة من المعادلة (I) على x، نجد

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow (2t+1)dx+xdt=0 \\ &\Leftrightarrow (2t+1)dx=-xdt \\ &\Leftrightarrow \frac{dx}{x}=-\frac{1}{2t+1}dt \end{aligned}$$

وعليه، تحصلنا على معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين t و x، بمكاملة طرفي آخر معادلة تفاضلية، نجد

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \int\frac{dx}{x}=-\int\frac{1}{2t+1}dt \\ &\Leftrightarrow \ln|x|=-\frac{1}{2}\ln|2t+1|+c\,/\,c\in R \\ &\Leftrightarrow \ln|x|=\ln\left(|2t+1|\right)^{-\frac{1}{2}}+c \\ &\Leftrightarrow \ln|x|=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{|2t+1|}}\right)+c \\ &\Leftrightarrow |x|=e^c.e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{|2t+1|}}\right)} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{k}{\sqrt{|2t+1|}}\,/\,k\in R \end{aligned}$$

لكن $t=\frac{y}{x}$ وعليه، من أجل $x\neq 0$، لدينا

$$(I)\Leftrightarrow x=\frac{k}{\sqrt{\left|\frac{2y}{x}+1\right|}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{k}=\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{2y}{x}+1\right|}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{x}=\sqrt{\left|\frac{2y}{x}+1\right|}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k}{x}\right)^2=\left|\frac{2y}{x}+1\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y}{x}+1=\pm\left(\frac{k}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y}{x}=\pm\left(\frac{k}{x}\right)^2-1$$

$$\Leftrightarrow y(x)=\frac{k'-x^2}{2x}\,/\,k'\in R$$

تمرين 6–3. حل المعادلتين التفاضليتين التاليتين

1) $y''-2y'+y=x^2$ مع $y(0)=2$ و $y'(0)=3$ 2) $y''+3y'-4y=e^x+x$

الحل. المعادلتان المعطاتان هما معادلتان خطيتان من الرتبة الثانية.

1) لتكن المعادلة

$$y''-2y'+y=x^2................(E_1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل (E_1)

$$y''-2y'+y=0..........(E_2)$$

– لنجد الحل العام للمعادلة (E_2).

المعادلة المميزة للمعادلة (E_1) هي

$$\lambda^2-2\lambda+1=0............(E_3)$$

المعادلة (E_3) هي معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز Δ، بحيث $\Delta=0$ وعليه، المعادلة (E_3) تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو

$$\lambda=\frac{2}{2}=1$$

وعليه، الحل العام للمعادلة (E_2) هو

$$y(x)=c_1e^x+c_2xe^x................(E_4)$$

– لنجد حلا خاصا للمعادلة (E_1).

بما أن الطرف الثاني للمعادلة (E_1) هو كثير حدود من الدرجة الثانية (أي x^2)، فنبحث عن حل خاص y_p على شكل كثير حدود من الدرجة الثانية، أي

$$y_p(x)=ax^2+bx+c\,/\,a,b,c\in R$$

وعليه $y'_p(x)=2ax+b$ و $y''_p(x)=2a$. بتعويض y_p ، y'_p و y''_p في المعادلة (E_1)، نجد

$$y''_p-2y'_p+y_p=x^2 \Leftrightarrow (2a)-2(2ax+b)+\left(ax^2+bx+c\right)=x^2$$

$$\Leftrightarrow ax^2+(b-4a)x+(c+2a-2b)=x^2$$

بالمطابقة بين طرفي آخر مساواة، نجد

$$\begin{cases} a=1 \\ b-4a=0 \\ c+2a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=6 \end{cases}$$

ومنه، للمعادلة (E_1) حل خاص هو

$$y_p(x)=x^2+4x+6..............(E_5)$$

وعليه، الحل العام للمعادلة (E_1) هو حاصل جمع المعادلتين (E_4) و (E_5) ، أي

$$y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+x^2+4x+6$$

بما أن $y(0)=2$ و $y'(0)=3$ ، علينا تعويض $x=0$ في عبارتي y و y' لإيجاد المجهولين c_1 و c_2 .

لدينا

$$y(0)=2 \Leftrightarrow c_1+6=2 \Leftrightarrow c_1=-4$$

و $y'(x)=c_1e^x+c_2\left(e^x+xe^x\right)+2x+4$ ومنه

$$y'(0)=3 \Leftrightarrow c_1+c_2+4=3 \Leftrightarrow c_2=3$$

إذا للمعادلة (E_1) حل عام وحيد هو

$$y(x)=-4e^x+3xe^x+x^2+4x+6$$

2) لتكن المعادلة

$$y''+3y'-4y=e^x+x................(i_1)$$

نعتبر المعادلة المتجانسة المرافقة ل (i_1)

$$y''+3y'-4y=0..........(i_2)$$

- لنجد الحل العام للمعادلة (i_2) .

المعادلة المميزة للمعادلة (i_1) هي

$$\lambda^2+3\lambda-4=0............(i_3)$$

المعادلة (i_3) هي معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية، نحلها بالاستعانة بالمميز Δ، بحيث $\Delta=25>0$

وعليه، المعادلة (i_3) تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما

$$\lambda_1=-4 \quad \text{و} \quad \lambda_2=1$$

وعليه، الحل العام للمعادلة (i_2) هو

$$y(x)=c_1e^{-4x}+c_2e^x...............(i_4)$$

- لنجد حلا خاصا للمعادلة (i_1) باستعمال طريقة تغيير الثابت، أي نبحث عن حلول للمعادلة

$$y(x)=A(x)e^{-4x}+B(x)e^x...............(i_5)$$

بحيث و A و B دالتان قابلتان للاشتقاق تحققان جملة المعادلتين التاليتين

$$(I)\begin{cases} A'(x)e^{-4x}+B'(x)e^{x}=0....................(1) \\ -4A'(x)e^{-4x}+B'(x)e^{x}=e^{x}+x........(2) \end{cases}$$

أي

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} (1)-(2)\Leftrightarrow 5A'(x)e^{-4x}=-e^{x}-x \\ (1)\Leftrightarrow B'(x)=-A'(x)e^{-5x} \end{cases}$$

ومنه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} A'(x)=-\frac{1}{5}\left(e^{5x}+xe^{4x}\right) \\ B'(x)=\frac{1}{5}\left(1+xe^{-x}\right) \end{cases}$$

وعليه

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} A(x)=-\frac{1}{5}\left[\int e^{5x}dx+\int xe^{4x}dx\right]..........(3) \\ B(x)=\frac{1}{5}\left[\int dx+\int xe^{-x}dx\right].....................(4) \end{cases}$$

لنجد التكامل $\int xe^{4x}dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

نضع

$$f(x)=x \qquad \Rightarrow f'(x)=dx$$
$$g'(x)=e^{4x}dx\Rightarrow g(x)=\tfrac{1}{4}e^{4x}$$

ومنه

$$\int xe^{4x}dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}\int xe^{4x}dx&=\tfrac{1}{4}xe^{4x}-\tfrac{1}{4}\int e^{4x}dx\\ &=\tfrac{1}{4}xe^{4x}-\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4}e^{4x}\right)\\ &=\tfrac{1}{4}xe^{4x}-\tfrac{1}{16}e^{4x}\end{aligned}$$

وعليه

$$(3)\Leftrightarrow A\left(x\right)=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}+\frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{16}e^{4x}\right)=e^{4x}\left(-\frac{1}{25}e^{x}-\frac{1}{20}x+\frac{1}{80}\right)$$

لنجد التكامل $\int xe^{-x}dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

نضع

$$f(x)=x \qquad \Rightarrow f'(x)=dx$$
$$g'(x)=e^{-x}dx\Rightarrow g(x)=-e^{-x}$$

ومنه

$$\int xe^{-x}dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x}$$
$$= -e^{-x}\left(x+1\right)$$

وعليه

$$(4) \Leftrightarrow B\left(x\right) = \frac{1}{5}\left[x - \left(x+1\right)e^{-x}\right]$$

وعليه، بتعويض عبارتي الدالتين A و B في المعادلة (i_5)، نجد

$$y(x) = \frac{1}{5}xe^{x} - \frac{1}{25}e^{x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i_6)$$

وهو حل خاص للمعادلة (i_1).

الحل العام للمعادلة (i_1) هو حاصل جمع المعادلتين (i_4) و (i_6) ، أي

$$y(x) = c_1e^{-4x} + c_2e^{x} + \frac{1}{5}xe^{x} - \frac{1}{25}e^{x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$$
$$= e^{x}\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + c_2\right) + c_1e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$$

الفصل السابع

الدوال ذات

متغيرين

في الفصول السابقة، درسنا دوالا من الشكل $f(x)=y$ ذات متغير مستقل وحيد x، لكن العديد من الأنشطة الاقتصادية تتطلب أكثر من متغير مستقل، فمثلا الطلب على سلعة معينة لا يعتمد فقط على سعرها وإنما على دخل المستهلك، سعر السلع البديلة ومتغيرات أخرى. لذلك سندرس الدوال ذات متغيرين ونركز على المشتقات الجزئية وتطبيقاتها الاقتصادية.

1- الدوال ذات متغيرين

تعريف 7-1. *نسمي $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ دالة ذات n متغير مستقل $x_1,x_2,...,x_n$، إذا وجدت قيمة واحدة فقط لـ z في مجال صور f من أجل الأعداد الحقيقية $x_1,x_2,...,x_n$ في مجال تعريف f.* [1]

من أجل $n=2$، نسمي $z=f(x,y)$ دالة ذات متغيرين مستقلين x و y من مجال تعريف f، إن وجدت قيمة واحدة فقط لـ z في مجال صور f. [2]

تعريف 7-2. *لتكن $f(x,y)$ دالة ذات متغيرين مستقلين. نسمي مجال تعريف f مجموعة الثنائيات (x,y) التي من أجلها تكون f معرفة ونرمز لها بالرمز D_f، بحيث $D_f \subset R^2$.* [3]

2- نهاية دالة ذات متغيرين

-نهاية دالة ذات متغيرين عند نقطة معينة

لتكن $a=(a_1,a_2)\in R^2$ و $f(x,y)$ دالة ذات متغيرين معرفة على جوار I لـ a باستثناء محتمل لـ a.

تعريف 7-3. *نقول أن f تنتهي إلى عدد حقيقي l عندما ينتهي $X=(x,y)$ إلى $a=(a_1,a_2)$، إذا كان*

$$\forall \varepsilon >0, \exists \eta_\varepsilon >0 : \forall X \in I\left|\{a\}, \|X-a\| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(X)-l| < \varepsilon\right.$$ [*]

ونكتب

$$\lim_{X\to a} f(X)=l \quad \text{أو} \quad \lim_{\substack{X\to a\\ X\neq a}} f(X)=l$$ [4]

ملاحظة 7-1

1) خواص النهايات لدالة ذات متغير واحد تبقى صالحة لدالة ذات متغيرين.

2) إذا كانت f دالة معرفة عند نقطة a، فإن $\lim_{X\to a} f(X)=f(a)$.

3) بالنسبة لدالة f ذات متغير واحد، وجود نهاية لهذه الدالة عند نقطة a، معناه وجود نهاية مشتركة لـ f عن يمين وعن يسار a، أما بالنسبة لدالة ذات متغيرين، فيمكن الاقتراب من نقطة من المستوي على طول عدد لا نهائي من المسارات. [5]

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit. Définition 7.1, p. 186.
(2) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 377.
(3) Yadolah Dodge. Op. Cit. Définition 7.3, p. 186.

(*) يشير الرمز "$\|\;\|$" للمسافة بين نقطتين في R^n.

(4) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 19, p. 298.
(5) Ibid, p. 298.

3- استمرارية دالة ذات متغيرين

-استمرارية دالة ذات متغيرين عند نقطة معينة

تعريف 7-4. *لتكن $a=(a_1,a_2)\in R^2$ و f دالة ذات متغيرين معرفة على جوار I لـ a. نقول أن f مستمرة عند a، إذا كان*

$$\lim_{X\to a} f(X)=f(a)$$ [1]

تعريف 7-5. *نقول عن دالة f أنها مستمرة على مجال J من R^2، إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من J.* [2]

ملاحظة 7-2. خواص الاستمرارية لدالة ذات متغير واحد تبقى صحيحة في حالة دالة ذات متغيرين.[3]

4- المشتقات الجزئية لدالة ذات متغيرين

إذا أعطيت دالة ذات متغيرين $z=f(x,y)$، من أجل قياس أثر التغير في أحد المتغيرين المستقلين x أو y على المتغير التابع z، فإننا بحاجة إلى المشتقة الجزئية. نهتم في هذا الفصل بالمشتقات الجزئية من الدرجة الأولى والثانية.

4-1- المشتقات الجزئية الأولى لدالة ذات متغيرين

تعريف 7-6. *إذا كانت $z=f(x,y)$ دالة ذات متغيرين، فإن*

- *المشتقة الجزئية الأولى لـ f بالنسبة لـ x هي المشتقة الأولى لـ f بالنسبة لـ x باعتبار y ثابتا ويرمز لها بأحد الرموز*

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\quad f'_x(x,y)$$

وتعرف كما يلي

$$f'_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

إن كانت النهاية موجودة ومنتهية. [4]

- *وبالمثل، فالمشتقة الجزئية الأولى لـ f بالنسبة لـ y هي المشتقة الأولى لـ f بالنسبة لـ y باعتبار x ثابتا ويرمز لها بأحد الرموز*

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y),\quad f'_y(x,y)$$

وتعرف كما يلي

$$f'_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

إن كانت النهاية موجودة ومنتهية.[5]

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 20, p. 298.
(2) Ibid. Définition 21, p. 298.
(3) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 398.
(4) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 189.
(5) Edward T Dowling. Idem, p. 82.

ملاحظة 7-3

1) لإيجاد المشتقة الجزئية لدالة بالنسبة لأحد المتغيرات المستقلة فإننا نعتبر المتغيرات المستقلة المتبقية حدودا ثابتة ونطبق قواعد التفاضل المتعارف عليها.[1]

2) بشكل عام، عدد المشتقات الجزئية الأولى لدالة ذات عدة متغيرات مستقلة يساوي عدد هذه المتغيرات.[2]

- **قواعد التفاضل الجزئي**

قواعد التفاضل بالنسبة لدالة ذات متغير مستقل واحد والتي عرضناها في الفصل الرابع تبقى صالحة للدوال ذات متغيرين مستقلين.

نظرية 7-1. *إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق ذات متغيرين مستقلين x و y ، فان*

1) $\frac{\partial}{\partial x}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}$)

2) $\frac{\partial}{\partial x}(f.g)=\frac{\partial f}{\partial x}.g+f.\frac{\partial g}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(f.g)=\frac{\partial f}{\partial y}.g+f.\frac{\partial g}{\partial y}$)

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}.g-f.\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$ بحيث $g(x,y)\neq 0$ و $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}.g-f.\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}$) [3]

4) $\frac{\partial}{\partial x}(f^n)=nf^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(f^n)=nf^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y}$)

5) $\frac{\partial}{\partial x}(e^f)=e^f\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(e^f)=e^f\frac{\partial f}{\partial y}$)

6) $\frac{\partial}{\partial x}(\ln(f))=\frac{1}{f}.\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(\ln(f))=\frac{1}{f}.\frac{\partial f}{\partial y}$) (بتصرف) [4]

4-2- المشتقات الجزئية الثانية لدالة ذات متغيرين

بما أن المشتقات الجزئية الأولى لدالة ذات متغيرين هي أيضا دوال ذات متغيرين، فإنه يمكن اشتقاقها جزئيا مرة أخرى لتنتج ما يسمى بالمشتقات الجزئية الثانية.

تعريف 7-7. *لتكن $z=f(x,y)$ دالة ذات متغيرين.*

- *المشتقة الجزئية الثانية ل f بالنسبة ل x_i و x_j هي المشتقة الجزئية ل $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ بالنسبة ل x_i ويرمز لها بأحد*

الرموز

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_j},\quad f''_{x_jx_i}$$

ونكتب

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

أي نشتق f للمرة الأولى بالنسبة ل x_j وللمرة الثانية بالنسبة ل x_i. [5]

---

[1] Edward T Dowling. Idem, p. 82.
[2] Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 190.
[3] Edward T Dowling. Idem, p. 84.
[4] Ibid, p. 84.
[5] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 11.22, p. 311.

- *إذا كان $i \neq j$، فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ تسمى المشتقات الجزئية الثانية المختلطة ل f .*
- *إذا كان $i = j$، فإن*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

تسمى المشتقات الجزئية الثانية الأساسية ل f .

- *بالمثل، إن كانت المشتقات الجزئية الثانية قابلة للاشتقاق، فيمكن تعريف المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة وهكذا.*

بشكل عام، نعرف المشتقات الجزئية من الرتبة k ل f كما يلي

$$\forall k \geq 2: \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\ldots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right) \quad (1)$$

ملاحظة 7-4

1) عدد المشتقات الجزئية الثانية لدالة ذات عدة متغيرات مستقلة يساوي مربع عدد هذه المتغيرات.

2) عادة ما تجمع المشتقات الجزئية الثانية لدالة ذات عدة متغيرات مستقلة في نقطة a، في مصفوفة(*) هيس التالية (Hesse's Matrix)

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

وفي حالة دالة ذات متغيرين $f(x, y)$ تصبح مصفوفة هيس كالتالي

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} \quad \text{(بتصرف)} \quad (2)$$

3) إذا كانت المشتقات الجزئية الثانية المختلطة مستمرة فهي متساوية، أي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x, y) \quad (3)$$

5- القيم الحدية لدالة ذات متغيرين

عند البحث عن القيم الحدية لدالة ذات متغيرين، نميز حالتين، القيم الحدية لدالة بدون قيود وأخرى بقيود.

5-1- القيم الحدية لدالة ذات متغيرين بدون قيود

لإيجاد القيم الحدية لدالة ذات متغيرين $f(x, y)$ بدون قيود، نتبع الخطوات التالية

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 11.22, p. 312.

(*) المصفوفة عبارة عن جدول به أسطر وأعمدة، سندرس المصفوفات في الفصل الثامن.

(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 11.27, p. 322.

(3) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 192.

1) إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لـ f ومساواتها بالصفر، أي

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

بحل المعادلتين الأخيرتين، نحصل على النقط الحرجة (a,b) لـ f ، أي

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

وهذا ما يسمى بالشرط الضروري أو شرط الدرجة الأولى. (1)

2) إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لـ f وتشكيل مصفوفة هيس.

3) تعويض قيم النقط الحرجة (a,b) في مصفوفة هيس، أي

$$H_f(a,b)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix} \quad (2)$$

4) نحسب محدد(*) مصفوفة هيس، أي

$$\det\left(H_f(a,b)\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)$$

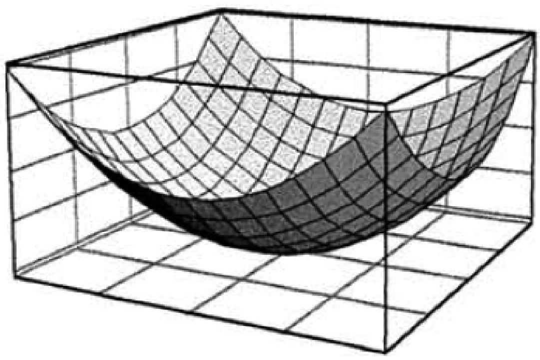
بما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$، فإن

$$\det\left(H_f(a,b)\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 \quad (3)$$

نميز ثلاث حالات لـ $\det\left(H_f(a,b)\right)$.

أ) إذا كان الشرط الكافي أو شرط الدرجة الثانية محققا (أي $\det\left(H_f(a,b)\right)>0$*) وكان*

أ-1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)>0$، *فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة (a,b) وهذا ما يوضحه الشكل التالي*

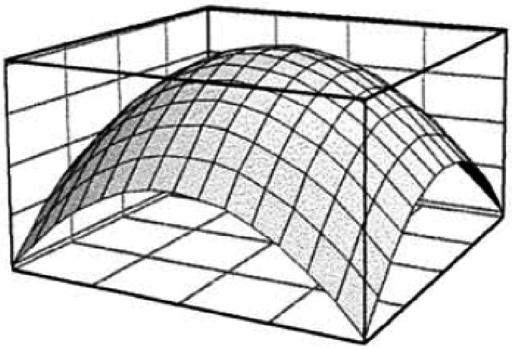


شكل 7-1- منحنى بياني لدالة ذات متغيرين تقبل قيمة حدية صغرى

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 195-196.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit, p. 334.
(3) Edward T Dowling. Idem, p. 86.

(*) سندرس محدد مصفوفة في الفصل التاسع.

أ-2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)<0$، فإن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة (a,b) وهذا ما يوضحه الشكل التالي

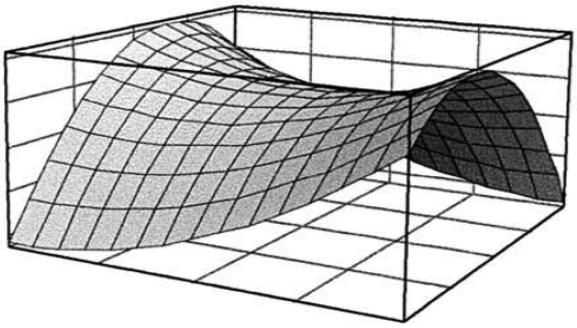


شكل 7-2- منحنى بياني لدالة ذات متغيرين تقبل قيمة حدية عظمى[1]

ب) إذا كان $\det(H_f(a,b))<0$، فإن الدالة f لا تقبل قيم حدية وإنما

ب-1) نقطة انعطاف، إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ لهما نفس الإشارة.

ب-2) نقطة سرج[*] (تكون للدالة قيمة صغرى إذا نظرنا من المحور x وقيمة عظمى إذا نظرنا من المحور y)، إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ مختلفتين في الإشارة والشكل التالي يوضح ذلك



شكل 7-3- منحنى بياني لدالة ذات متغيرين تقبل نقطة سرج [2]

ج) إذا كان $\det(H_f(a,b))=0$، فإن الدالة f يمكن أن يكون أو لا يكون لها قيم حدية. [3]

5-2- القيم الحدية لدالة ذات متغيرين بقيد

عادة ما تسعى المؤسسات إلى تعظيم أو تقليص الدوال تحت قيود يفرضها السوق أو عوامل الإنتاج أو غيرها.

لإيجاد القيم الحدية لدالة $f(x,y)$ (تُسمى دالة الهدف)، تحت القيد $g(x,y)=k$ (k ثابت)، نتبع الخطوات التالية

1) تحويل دالة القيد إلى دالة صِفرية كما يلي $k-g(x,y)=0$

2) تشكيل دالة لاجرانج

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\left[k-g(x,y)\right]$$

---

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 466.

(*) سُميت نقطة سرج لأن شكلها يشبه السرج الذي يوضع على الحصان.

(2) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 386-387.

(3) نفسه، ص. 388.

حيث λ يسمى معامل (مضاعف) لاجرانج[*] و $L(x,y,\lambda)$ دالة لاجرانج.

3) إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر، أي

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0$$ (1)

(وهذا ما يسمى بالشرط الضروري أو شرط الدرجة الأولى) لإيجاد قيم المتغيرات التي تشكل النقط الحرجة (a,b) للدالة L، أي

$$\frac{\partial L}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(a,b)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(a,b)=0$$

4) إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس (وهذا ما يسمى بالشرط الكافي أو شرط الدرجة الثانية)، ثم تعويض قيم النقط الحرجة في هذه الأخيرة، أي

$$H_L(a,b)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

5) حساب محدد مصفوفة هيس، أي

$$\begin{aligned}\det\left(H_L(a,b)\right)=&\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a,b)\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(a,b)\right)\right]\\ &-\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(a,b)\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(a,b)\right)\right]\\ &+\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(a,b)\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(a,b)\right)\right]\end{aligned}$$ (2)

نميز ثلاث حالات.

أ) إذا كان $\det\left(H_L(a,b)\right)>0$، فإن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة (a,b).

ب) إذا كان $\det\left(H_L(a,b)\right)<0$، فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة (a,b).

ج) إذا كان $\det\left(H_L(a,b)\right)=0$، فإن الدالة f يمكن أن يكون أو لا يكون لها قيم حدية. [3]

6- تمارين

تمرين 7-1. أوجد مجالات تعريف الدوال التالية.

$$f(x,y)=2\ln(3x-y)+xy+x^2 \qquad g(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$$

$$h(x,y)=x^4+y^6 \qquad i(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad j(x,y)=\frac{x}{y}$$

(*) مضاعف لاجرانج يقيس الأثر على دالة الهدف لتغير بسيط في ثابت القيد k.

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 499.
(2) Ibid, pp. 515-516.
(3) Ibid, pp. 515-516.

الحل. إيجاد مجموعات تعريف الدوال التالية وتمثيلها بيانيا

1) $f(x,y)=2\ln(3x-y)+xy+x^2$

$$\begin{aligned}D_f&=\left\{(x,y)\in R^2/3x-y>0\right\}\\&=\left\{(x,y)\in R^2/x>\tfrac{1}{3}y\right\}\end{aligned}$$

2) $g(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

$$\begin{aligned}D_g&=\left\{(x,y)\in R^2/x^2-y^2\geq 0\right\}\\&=\left\{(x,y)\in R^2/x^2\geq y^2\right\}\\&=\left\{(x,y)\in R^2/|x|\geq|y|\right\}\end{aligned}$$

3) $h(x,y)=x^4+y^6$ وعليه، h معرفة على R^2، أي $D_h=R^2$.

4) $i(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ وعليه، i معرفة على R^2، أي $D_i=R^2$.

5) $j(x,y)=\dfrac{x}{y}$

$$\begin{aligned}D_j&=\left\{(x,y)\in R^2/y\neq 0\right\}\\&=R\times R^*\end{aligned}$$

تمرين 7-2. أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدوال التالية

$$f(x,y)=x^2+y-3xy+5 \qquad g(x,y)=(4x-y)(x+8y)$$

$$h(x,y)=\frac{x^2+4y}{x} \qquad i(x,y)=(x+5y)^3$$

$$j(x,y)=e^{2x-y} \qquad k(x,y)=\ln(3x-y)$$

الحل. إيجاد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدوال التالية

1) $f(x,y)=x^2+y-3xy+5$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1-3x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-3$$

2) $g(x,y)=(4x-y)(x+8y)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=4(x+8y)+(4x-y)=8x+31y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-(x+8y)+8(4x-y)=31x-16y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=8 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=-16 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=31$$

3) $h(x,y)=\dfrac{x^2+4y}{x}$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\frac{2x(x)-\left(x^2+4y\right)}{x^2}=\frac{x^2-4y}{x^2}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2x\left(x^2\right)-2x\left(x^2-4y\right)}{x^4}=\frac{8xy}{x^4}=\frac{8y}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)=0 \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(x,y)=-\frac{4}{x^2}$$

4) $i(x,y)=\left(x+5y\right)^3$

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x,y)=3\left(x+5y\right)^2 \qquad \frac{\partial i}{\partial y}(x,y)=15\left(x+5y\right)^2$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,y)=6\left(x+5y\right) \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial y^2}(x,y)=150\left(x+5y\right) \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 i}{\partial y\partial x}(x,y)=30\left(x+5y\right)$$

5) $j(x,y)=e^{2x-y}$

$$\frac{\partial j}{\partial x}(x,y)=2e^{2x-y} \qquad \frac{\partial j}{\partial y}(x,y)=-e^{2x-y}$$
$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}(x,y)=4e^{2x-y} \qquad \frac{\partial^2 j}{\partial y^2}(x,y)=e^{2x-y} \qquad \frac{\partial^2 j}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 j}{\partial y\partial x}(x,y)=-2e^{2x-y}$$

6) $k(x,y)=\ln\left(3x-y\right)$

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y)=\frac{3}{3x-y} \qquad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y)=\frac{-1}{3x-y}$$
$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-9}{\left(3x-y\right)^2} \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-1}{\left(3x-y\right)^2} \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 k}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{3}{\left(3x-y\right)^2}$$

تمرين 7−3. لمنشأة تنتج سلعتين x و y، دالة الربح التالية

$$TP\left(x,y\right)=-x^2-\frac{1}{2}y^2+40x+30y-100 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد مستويات الإنتاج من السلعتين x و y التي تعظم الأرباح.
- **الحل.** إيجاد مستويات الإنتاج من السلعتين x و y التي تعظم الأرباح
- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى ل TP ومساواتها بالصفر. لدينا

$$\begin{cases}\dfrac{\partial TP}{\partial x}\left(x,y\right)=0\\[2mm] \dfrac{\partial TP}{\partial y}\left(x,y\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+40=0\\ -y+30=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=20\\ y=30\end{cases}$$

ومنه $(20;30)$ نقطة حرجة للدالة TP.

– إيجاد المشتقات الجزئية الثانية ل TP وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 TP}{\partial x^2}(x,y)=-2 \qquad \frac{\partial^2 TP}{\partial y^2}(x,y)=-1 \qquad \frac{\partial^2 TP}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 TP}{\partial y\partial x}(x,y)=0$$

ومنه

$$H_{TP}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 TP}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 TP}{\partial y\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 TP}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 TP}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$H_{TP}(20;30)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\det\left(H_{TP}(20;30)\right)=-2(-1)-(0)^2=2>0$$

وبما أن $\frac{\partial^2 TP}{\partial x^2}(20;30)=-2<0$ و $\frac{\partial^2 TP}{\partial y^2}(20;30)=-1<0$، فإن $TP(20;30)=750$ قيمة حدية عظمى ل TP عند النقطة الحرجة $(20;30)$، أي على المنشأة إنتاج 20 وحدة من السلعة x و 30 وحدة من السلعة y للحصول على أكبر ربح وهو 750 وحدة نقدية.

تمرين 7–4. مصنع ينتج نوعين من السلع x و y وكانت دالة التكلفة الكلية كما يلي

$$TC(x,y)=x^2+2x+y^2 \quad \text{وحدة نقدية}$$

– أوجد حجم الإنتاج من السلعتين لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، علما أنه يمكن إنتاج خمس وحدات من كلا النوعين.

– **الحل.** إيجاد حجم الإنتاج من السلعتين لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن. لدينا

– دالة الهدف

$$TC(x,y)=x^2+2x+y^2$$

– دالة القيد

$$g(x,y)=x+y=5$$

– تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$5-x-y=0$$

– دالة لاجرانج

$$L(x,y,\lambda)=x^2+2x+y^2+\lambda(5-x-y)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2-\lambda=0 ....(1) \\ 2y-\lambda=0 ....(2) \\ 5-x-y=0 ....(3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن λ، أي

$$\begin{cases} (1) \Leftrightarrow \lambda = 2x+2 ....(1') \\ (2) \Leftrightarrow \lambda = 2y ....(2') \end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد

$$(1')=(2') \Leftrightarrow 2x+2=2y$$
$$\Leftrightarrow y = x+1$$

بالتعويض عن عبارة y في المعادلة (3) ، نجد

$$(3) \Leftrightarrow 5-x-(x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow 4-2x=0$$
$$\Leftrightarrow x=2$$

بالتعويض عن قيمة x في عبارة y ، نجد

$$y=x+1 \Leftrightarrow y=2+1=3$$

بالتعويض عن قيمة y في المعادلة $(2')$، نجد

$$(2') \Leftrightarrow \lambda = 2y$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2(3)=6$$

ومنه $(2;3)$ نقطة حرجة للدالة L من أجل $\lambda=6$.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda)=2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x}(x,y,\lambda)=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda)=2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y}(x,y,\lambda)=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=H_L(2;3)$$

وعليه، باستعمال السطر الأول للمصفوفة $H_L(2;3)$، نجد

$$\begin{aligned}\det\left(H_L(2;3)\right)&=2\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\\ &=2\left[(2.0)-(-1.-1)\right]-0-1\left[(0.-1)-(2.-1)\right]\\ &=2(0-1)-1(0+2)\\ &=-4<0\end{aligned}$$

ومنه وحدة نقدية $TC(2;3)=17$ قيمة حدية صغرى للدالة TC عند النقطة الحرجة $(2;3)$ من أجل $\lambda=6$، أي على المصنع إنتاج وحدتين من النوع x وثلاث وحدات من النوع y للحصول على أدنى تكلفة وهي 17 وحدة نقدية. نلاحظ أن $\lambda=6$، هذا يعني أن النقصان في ثابت القيد من 5 إلى 4 يؤدي إلى النقصان في دالة التكاليف TC بمقدار 6 وحدات نقدية تقريبا.

تمرين 7–5. إذا كانت دالة المنفعة الكلية لمستهلك تأخذ الصورة التالية

$$U(Q_1,Q_2)=Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}$$

حيث Q_1 و Q_2 الكمية المشتراة من السلعتين الأولى والثانية على الترتيب. إذا علمت أن سعر السلعتين هو 3 وحدات نقدية للسلعة الأولى ووحدتان نقديتان للسلعة الثانية وأن المستهلك خصص 80 وحدة نقدية للإنفاق عليهما، فكم على المستهلك أن يشتري من كلا السلعتين لتعظيم منفعته الكلية إلى أقصى حد ممكن ؟

الحل. لدينا

- دالة الهدف

$$U(Q_1,Q_2)=Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}$$

- دالة القيد

$$g(Q_1,Q_2)=3Q_1+2Q_2=80$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$80-3Q_1-2Q_2=0$$

- دالة لاجرانج

$$L(Q_1,Q_2,\lambda)=Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}+\lambda(80-3Q_1-2Q_2)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(Q_1,Q_2,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}-3\lambda=0.............(1)\\ \frac{3}{4}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}}-2\lambda=0.............(2)\\ 80-3Q_1-2Q_2=0...........(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن λ، أي

$$\begin{cases} (1) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{12} Q_1^{-\frac{3}{4}} Q_2^{\frac{3}{4}} \text{..............} (1') \\ (2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{8} Q_1^{\frac{1}{4}} Q_2^{-\frac{1}{4}} \text{..............} (2') \end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد

$$\begin{aligned} (1') = (2') &\Leftrightarrow \tfrac{1}{12} Q_1^{-\frac{3}{4}} Q_2^{\frac{3}{4}} = \tfrac{3}{8} Q_1^{\frac{1}{4}} Q_2^{-\frac{1}{4}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{12} \frac{Q_2^{\frac{3}{4}}}{Q_1^{\frac{3}{4}}} - \frac{3}{8} \frac{Q_1^{\frac{1}{4}}}{Q_2^{\frac{1}{4}}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2Q_2 - 9Q_1}{24 Q_1^{\frac{3}{4}} Q_2^{\frac{1}{4}}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2Q_2 - 9Q_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow Q_2 = \frac{9}{2} Q_1 \text{.................} (3') \end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة Q_2 في المعادلة (3) ، نجد

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 80 - 3Q_1 - 9Q_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 80 - 12Q_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow Q_1 = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة Q_1 في المعادلة $(3')$ ، نجد

$$(3') \Leftrightarrow Q_2 = \frac{9}{2}\left(\frac{20}{3}\right) = 30$$

بالتعويض عن قيمتي Q_1 و Q_2 في المعادلة $(1')$، نجد

$$\begin{aligned} (1') &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{12}\left(\frac{20}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} (30)^{\frac{3}{4}} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{12}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \simeq 0.25 \end{aligned}$$

ومنه $\left(\frac{20}{3}; 30\right)$ نقطة حرجة للدالة L من أجل $\lambda = 0.25$.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_1}(Q_1, Q_2, \lambda) = -3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial Q_1}(Q_1, Q_2, \lambda) = \tfrac{3}{16} Q_1^{-\frac{3}{4}} Q_2^{-\frac{1}{4}} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1^2}(Q_1, Q_2, \lambda) = -\tfrac{3}{16} Q_1^{-\frac{7}{4}} Q_2^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_2}(Q_1, Q_2, \lambda) = -2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2^2}(Q_1, Q_2, \lambda) = -\tfrac{3}{16} Q_1^{\frac{1}{4}} Q_2^{-\frac{5}{4}} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q_2}(Q_1, Q_2, \lambda) = \tfrac{3}{16} Q_1^{-\frac{3}{4}} Q_2^{-\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(Q_1, Q_2, \lambda) = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial \lambda}(Q_1, Q_2, \lambda) = -2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial \lambda}(Q_1, Q_2, \lambda) = -3$$

ولدينا

$$H_L(Q_1,Q_2)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial Q_1}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_1}(Q_1,Q_2) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q_2}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_2}(Q_1,Q_2) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial \lambda}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial \lambda}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(Q_1,Q_2) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(Q_1,Q_2)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{16}Q_1^{-\frac{7}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}} & \frac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} & -3 \\ \frac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} & -\frac{3}{16}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{5}{4}} & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$H_L\left(\frac{20}{3};30\right)\simeq\begin{pmatrix} -4.88 & 0.03 & -3 \\ 0.03 & -0.004 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

وعليه، باستعمال السطر الثالث للمصفوفة $H_L\left(\frac{20}{3};30\right)$، نجد

$$\begin{aligned} \det\left(H_L\left(\frac{20}{3};30\right)\right) &= -3\begin{vmatrix} 0.03 & -3 \\ -0.004 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -4.88 & -3 \\ 0.03 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -3\left[(0.03.-2)-(-0.004.-3)\right]+2\left[(-4.88.-2)-(0.03.-3)\right] \\ &= 19.916>0 \end{aligned}$$

ومنه $U\left(\frac{20}{3};30\right)=20.59$ قيمة حدية عظمى للدالة U عند النقطة الحرجة $\left(\frac{20}{3};30\right)$ من أجل $\lambda=0.25$، أي على المستهلك شراء ما يقارب 7 وحدات من السلعة الأولى و30 وحدة من السلعة الثانية لتحقيق أقصى منفعة وهي 20.59. نلاحظ أن $\lambda=0.25$، هذا يعني أن الزيادة في ثابت القيد من 80 إلى 81 يؤدي إلى الزيادة في دالة المنفعة U بمقدار 0.25 تقريبا.

تمرين 7-6. من الخبرة السابقة لإحدى المنشآت التجارية، تبين أن التكاليف الكلية لأحد المنتجات ترتبط بالدعاية حسب العلاقة التالية

$$TC=2T^2-6TI+10T+\frac{9}{2}I^2+10I+100 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

حيث، T تكاليف الدعاية عن طريق التلفاز و I تكاليف الدعاية عبر الانترنت. إذا كانت التكاليف المخصصة للدعاية في هذه المنشأة هي 100 وحدة نقدية، فكم يجب أن تنفق المنشأة على الدعاية عن طريق التلفاز والانترنت لتحقيق اقل تكلفة ممكنة ؟

الحل. إيجاد حجم الإنفاق على الدعاية عن طريق التلفاز والانترنت لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن. لدينا

- دالة الهدف

$$TC(T,I)=2T^2-6TI+10T+\frac{9}{2}I^2+10I+100$$

- دالة القيد

$$g(T,I)=T+I=100$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$100-T-I=0$$

- دالة لاجرانج

$$L(T,I,\lambda)=2T^2-6TI+10T+\frac{9}{2}I^2+10I+100+\lambda(100-T-I)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial T}(T,I,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial I}(T,I,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(T,I,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4T-6I+10-\lambda=0.............(1)\\ 9I-6T+10-\lambda=0.............(2)\\ 100-T-I=0.....................(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن λ، أي

$$\begin{cases}(1)\Leftrightarrow\lambda=4T-6I+10..............(1')\\ (2)\Leftrightarrow\lambda=9I-6T+10.............(2')\end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد

$$\begin{aligned}(1')=(2')&\Leftrightarrow 4T-6I+10=9I-6T+10\\ &\Leftrightarrow 10T=15I\\ &\Leftrightarrow T=\frac{3}{2}I...........(3')\end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة T في المعادلة (3) ، نجد

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow 100-\frac{3}{2}I-I=0\\ &\Leftrightarrow 100-\frac{5}{2}I=0\\ &\Leftrightarrow I=40\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة I في المعادلة $(3')$ ، نجد

$$(3')\Leftrightarrow T=\frac{3}{2}(40)=60$$

بالتعويض عن قيمتي T و I في المعادلة $(1')$، نجد

$$\begin{aligned}(1')&\Leftrightarrow\lambda=4(60)-6(40)+10\\ &\Leftrightarrow\lambda=10\end{aligned}$$

ومنه $(60;40)$ نقطة حرجة للدالة L من أجل $\lambda=10$.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}(T,I,\lambda)=4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial T}(T,I,\lambda)=-6 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial T}(T,I,\lambda)=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T \partial I}(T,I,\lambda)=-6 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial I^2}(T,I,\lambda)=9 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial I}(T,I,\lambda)=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T \partial \lambda}(T,I,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial \lambda}(T,I,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(T,I,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(T,I)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial T^2}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial T}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial T}(T,I) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial T \partial I}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial I^2}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial I}(T,I) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial T \partial \lambda}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial \lambda}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(T,I) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(T,I)=\begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=H_L(60;40)$$

وعليه، باستعمال السطر الثالث للمصفوفة $H_L(60;40)$، نجد

$$\begin{aligned} \det\left(H_L(60;40)\right) &= -\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\left[(-6.-1)-(9.-1)\right]+\left[(4.-1)-(-6.-1)\right] \\ &= -(6+9)+(-4-6) \\ &= -25<0 \end{aligned}$$

ومنه $TC(60;40)=1100$ وحدة نقدية قيمة حدية صغرى للدالة TC عند النقطة الحرجة $(60;40)$ من أجل $\lambda=10$، أي على المنشأة الإنفاق على الدعاية عن طريق التلفاز والانترنت 60 وحدة نقدية و 40 وحدة نقدية على الترتيب للحصول على أدنى تكلفة وهي 1100 وحدة نقدية. نلاحظ أن $\lambda=10$، هذا يعني أن النقصان في ثابت القيد من 100 إلى 99 يؤدي إلى النقصان في دالة التكاليف TC بمقدار 10 وحدات نقدية تقريبا.

تمرين 7-7. حدد القيمة القصوى لدالة الإنتاج التالية والتي تسمى دالة كوب-دوجلاس[1]

$$Q(K,L)=50K^{0.2}L^{0.8}$$

علما أن سعر رأس المال $P_K=10$، سعر العمل $P_L=20$ وقيد الميزانية هو 300 وحدة نقدية.

[1] دالة كوب-دوجلاس (Cobb-Douglas) هي من دوال الإنتاج المعروفة التي تحدد العلاقة بين الإنتاج والعوامل الداخلة في العملية الإنتاجية ويعبر عنها بالصيغة التالية

$$Q(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

حيث Q الإنتاج، A كمية ثابتة موجبة، K كمية عنصر رأس المال، L كمية عنصر العمل، α نسبة الزيادة في الإنتاج عندما يزداد عنصر رأس المال بنسبة 1%، β نسبة الزيادة في الإنتاج عندما يزداد عنصر العمل بنسبة 1%، ينظر: عقيل جاسم عبد الله، إبراهيم غبريال. *مقدمة في الاقتصاد الرياضي*. ط 2. دار مجدلاوي للنشر، عمان- الأردن، 1999، ص. 292.

الحل. لدينا

- دالة الهدف

$$Q(K,L)=50K^{0.2}L^{0.8}$$

- دالة القيد

$$g(K,L)=10K+20L=300$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$300-10K-20L=0$$

- دالة لاجرانج

$$L(K,L,\lambda)=50K^{0.2}L^{0.8}+\lambda(300-10K-20L)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial K}(K,L,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial L}(K,L,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(K,L,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10K^{-0.8}L^{0.8}-10\lambda=0..............(1)\\ 40K^{0.2}L^{-0.2}-20\lambda=0.............(2)\\ 300-10K-20L=0..............(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن λ ، أي

$$\begin{cases}(1)\Leftrightarrow\lambda=K^{-0.8}L^{0.8}.................(1')\\ (2)\Leftrightarrow\lambda=2K^{0.2}L^{-0.2}..............(2')\end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$ ، نجد

$$\begin{aligned}(1')=(2')&\Leftrightarrow K^{-0.8}L^{0.8}=2K^{0.2}L^{-0.2}\\ &\Leftrightarrow\frac{L^{0.8}}{K^{0.8}}-2\frac{K^{0.2}}{L^{0.2}}=0\\ &\Leftrightarrow\frac{L-2K}{K^{0.8}L^{0.2}}=0\\ &\Leftrightarrow L-2K=0\\ &\Leftrightarrow L=2K.................(3')\end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة L في المعادلة (3) ، نجد

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow 300-10K-20(2K)=0\\ &\Leftrightarrow 300-50K=0\\ &\Leftrightarrow K=6\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة K في المعادلة $(3')$ ، نجد

$$(3')\Leftrightarrow L=2(6)=12$$

بالتعويض عن قيمتي K و L في المعادلة $(1')$ ، نجد

$$(1')\Leftrightarrow\lambda=(6)^{-0.8}(12)^{0.8}\simeq 1.74$$

ومنه $(6;12)$ نقطة حرجة للدالة L من أجل $\lambda\simeq 1.74$.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial K^2}(K,L,\lambda)=-8K^{-1.8}L^{0.8} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial K}(K,L,\lambda)=8K^{-0.8}L^{-0.2} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial K}(K,L,\lambda)=-10$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial K\partial L}(K,L,\lambda)=8K^{-0.8}L^{-0.2} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial L^2}(K,L,\lambda)=-8K^{0.2}L^{-1.2} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial L}(K,L,\lambda)=-20$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial K\partial \lambda}(K,L,\lambda)=-10 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial \lambda}(K,L,\lambda)=-20 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(K,L,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(K,L)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial K^2}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial K}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial K}(K,L) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial K\partial L}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial L^2}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial L}(K,L) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial K\partial \lambda}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial \lambda}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(K,L) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(K,L)=\begin{pmatrix} -8K^{-1.8}L^{0.8} & 8K^{-0.8}L^{-0.2} & -10 \\ 8K^{-0.8}L^{-0.2} & -8K^{0.2}L^{-1.2} & -20 \\ -10 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$H_L(6;12)\simeq\begin{pmatrix} -2.32 & 1.16 & -10 \\ 1.16 & -0.58 & -20 \\ -10 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

وعليه، باستعمال السطر الثالث للمصفوفة $H_L(6;12)$، نجد

$$\begin{aligned}\det\left(H_L(6;12)\right)&=-10\begin{vmatrix} 1.16 & -10 \\ -0.58 & -20 \end{vmatrix}+20\begin{vmatrix} -2.32 & -10 \\ 1.16 & -20 \end{vmatrix}\\ &=-10\left[(1.16.-20)-(-0.58.-10)\right]+20\left[(-2.32.-20)-(1.16.-10)\right]\\ &=1450>0\end{aligned}$$

ومنه $Q(6;12)=522.33$ قيمة حدية عظمى للدالة Q عند النقطة الحرجة $(6;12)$ من أجل $\lambda\simeq1.74$، أي كمية عنصر رأس المال هي 6 وحدات وكمية عنصر العمل هي 12 وحدة لتحقيق أقصى قيمة لدالة الإنتاج وهي 522.33. نلاحظ أن $\lambda\simeq1.74$، هذا يعني أن الزيادة في ثابت القيد من 300 إلى 301 يؤدي إلى الزيادة في دالة الإنتاج Q بمقدار 1.74 تقريبا.

الفصل الثامن

مفاهيم عامة

حول المصفوفات

والعمليات عليها

للمصفوفات دور مهم في الاقتصاد، إذ تعتبر طريقة بسيطة ومنظمة للتعبير عن العلاقة الخطية بين متغيرين أو أكثر، كما تساعد في حل جمل المعادلات الخطية وتحديد ما إذا كان يوجد حل قبل إجراء المحاولة.

1- تعريف المصفوفة (Definition of Matrix)

تعريف 8-1. *المصفوفة هي شكل مستطيل يشبه الجدول، مؤلف من أسطر وأعمدة، بحيث يشترك كل سطر مع عمود بعدد ذي قيمة حقيقية، تسمى هذه الأعداد بعناصر المصفوفة. يرمز للمصفوفات بإحدى الحروف اللاتينية الكبيرة A، B، C،... ولعناصرها بإحدى الحروف الصغيرة a، b، c،... التي يرفق معها رقمان يشيران للسطر والعمود اللذين يشتركان بهذا العنصر.* [(1)]

الشكل العام لكتابة مصفوفة A يعطى كالآتي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

المصفوفة A تتألف من m سطر و n عمود وفي هذه الحالة، نقول أن A من الدرجة (m,n) أو $(m\times n)$ ونكتب $A(m,n)$ أو $A_{m,n}$ أو $A\in M_{m,n}(R)$ بحيث $M_{m,n}(R)$ هي مجموعة المصفوفات ذات m سطر و n عمود بمعاملات حقيقية. العنصر a_{ij} يمثل العدد الحقيقي الذي يقع في تقاطع السطر i مع العمود j. [(2)]

2- مصفوفات خاصة (Special Matrices)

2-1- مصفوفة سطر (Row Matrix)

مصفوفة سطر هي المصفوفة التي تتألف من سطر واحد وعدد من الأعمدة، أي درجتها $(1,n)$. [(3)]

2-2- مصفوفة عمود (Column Matrix)

مصفوفة عمود هي المصفوفة التي تتألف من عدد من الأسطر وعمود واحد ودرجتها $(m,1)$. [(4)]

2-3- مصفوفة العنصر الواحد (One Element Matrix)

مصفوفة العنصر الواحد هي المصفوفة التي تتألف من سطر واحد وعمود واحد أي درجتها $(1,1)$.

2-4- المصفوفة الصفرية (Null or Zero Matrix)

تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا بالمصفوفة الصِفرية ويرمز لها بالرمز 0 بغض النظر عن درجتها. [(5)]

[(1)] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 417-418.

[(2)] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 219.

[(3)] Ibid, p. 219.

[(4)] Ibid, p. 219.

[(5)] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص. 422.

2-5- المصفوفة المربعة (Square Matrix)

- نسمي A *مصفوفة مربعة*، إذا تساوى فيها عدد الأسطر مع عدد الأعمدة، أي درجتها (n,n) ونقول اختصارا أنها من الدرجة n ونكتب A_n أو

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}\in M_n\left(R\right)$$

وتسمى العناصر $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ بعناصر *القطر الرئيسي (principal diagonal)* لـ A.

- نسمي *أثر (trace)* A، مجموع عناصر القطر الرئيسي ويرمز له ب $tr\left(A\right)$ ونكتب

$$tr\left(A\right)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$ (1)

2-6- المصفوفة المثلثية (Triangular Matrix)

2-6-1- المصفوفة المثلثية العلوية (Upper Triangular Matrix)

نسمي مصفوفة مربعة A مصفوفة مثلثية علوية، إذا كانت جميع عناصرها تحت القطر الرئيسي أصفارا، أي

$$A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}=\begin{cases} a_{ij}\neq 0; & i\le j \\ a_{ij}=0; & i>j \end{cases}$$ (2)

2-6-2- المصفوفة المثلثية السفلية (Lower Triangular Matrix)

نسمي مصفوفة مربعة A مصفوفة مثلثية سفلية، إذا كانت جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي أصفارا، أي

$$A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}=\begin{cases} a_{ij}=0; & i<j \\ a_{ij}\neq 0; & i\ge j \end{cases}$$ (3)

2-7- المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix)

نسمي مصفوفة مربعة A مصفوفة قطرية، إذا كانت جميع عناصرها أصفارا باستثناء القطر الرئيسي، أي

$$A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}=\begin{cases} a_{ij}=0; & i\neq j \\ a_{ij}\neq 0; & i=j \end{cases}$$ (4)

ملاحظة 8-1. المصفوفة القطرية هي مصفوفة مثلثية علوية وسفلية في آن واحد.

2-8- مصفوفة الوحدة (Identity or Unit Matrix)

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة قطرية، بحيث عناصر قطرها الرئيسي تساوي العدد 1 ويرمز لها بالرمز I أو I_n حيث n درجتها، أي

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 220-221.

(2) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 94.

(3) نفسه، ص. 94.

(4) نفسه، ص. 93.

$$(1)\quad I_n = \begin{cases} a_{ij} = 0; & i \neq j \\ a_{ij} = 1; & i = j \end{cases}$$

–منقول مصفوفة (Transpose of Matrix)

منقول مصفوفة A هو تغيير أسطرها إلى أعمدة وأعمدتها إلى أسطر ونرمز له بأحد الرموز التالية A'، A^t أو A^T، فإذا كان $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ فإن $A^T = \left(a_{ij}{}^T\right)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$ بحيث $a_{ij}{}^T = a_{ji}$ مع $\left(A^T\right)^T = A$.(2)

2–9– المصفوفة التناظرية (Symmetric Matrix)

تكون مصفوفة مربعة $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ تناظرية، إذا كان $A^T = A$، أي $\forall i \neq j : a_{ij} = a_{ji}$.(3)

2–10– المصفوفة ضد التناظرية (Skew-symmetric Matrix)

تكون مصفوفة مربعة $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ ضد تناظرية، إذا كان $A^T = -A$، أي $\forall i \neq j : a_{ij} = -a_{ji}$ وعناصر القطر الرئيسي معدومة.(4)

3– عمليات على المصفوفات (Matrices Operations)

3–1– تساوي مصفوفتين (Equality of Matrices)

تتساوى مصفوفتان، إذا كانتا من الدرجة نفسها وكانت العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساوية، أي، إذا كانت $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ و $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ مصفوفتين من الدرجة (m,n)، فإن

$$A = B \text{ إذا كان } \forall 1 \le i \le m, \forall 1 \le j \le n : a_{ij} = b_{ij} \quad (5)$$

3–2– جمع وطرح المصفوفات (Addition and Subtraction of Matrices)

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من الدرجة نفسها ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة من المصفوفتين، أي إذا كانت $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ و $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ مصفوفتين من الدرجة (m,n)، فإن

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}، \quad A - B = \left(a_{ij} - b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \text{ و } B - A = \left(b_{ij} - a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

مصفوفات من الدرجة (m,n) (بتصرف).(6)

نظرية 8–1. *لتكن A، B و C ثلاث مصفوفات من الدرجة نفسها. لدينا*

1) (جمع المصفوفات تبديلي) $A + B = B + A$

2) (المصفوفة المعدومة تمثل العنصر الحيادي بالنسبة لعملية جمع المصفوفات) $A + 0 = 0 + A = A$

3) (جمع المصفوفات تجميعي) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (7)

---

(1) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 93.

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 219-220.

(3) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 10.9, p. 285.

(4) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 224.

(5) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص. 423.

(6) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 9.3, p. 218.

(7) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 551.

3-3- ضرب مصفوفة بعدد حقيقي (Scalar Multiplication of Matrix)

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بهذا العدد، أي، إذا كانت $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ مصفوفة من الدرجة (m,n) وكان $\alpha\in R$، فإن $\alpha A=(\alpha a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ مصفوفة من الدرجة (m,n).[1]

3-4- ضرب المصفوفات (Multiplication of Matrices)

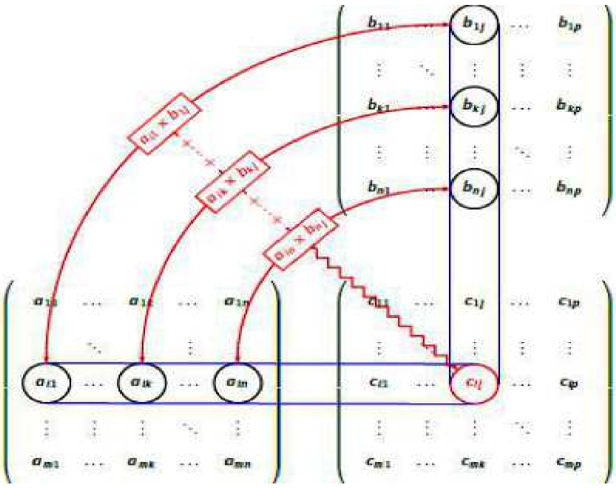
عند ضرب مصفوفتين يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساويا لعدد أسطر المصفوفة الثانية والمصفوفة الناتجة لها عدد أسطر المصفوفة الأولى وعدد أعمدة المصفوفة الثانية، أي، إذا كانت

$A=(a_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le n}}$ و $B=(b_{kj})_{\substack{1\le k\le n\\1\le j\le p}}$،

فإن

$AB=C=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}}$ بحيث $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

وهذا ما يوضحه الشكل التالي



شكل 8-1- جداء مصفوفتين[2]

نظرية 8-2. لتكن A، B و C ثلاث مصفوفات تحقق قواعد ضرب المصفوفات. لدينا

1) (ضرب المصفوفات تجميعي) $(AB)C=A(BC)$

2) (ضرب المصفوفات توزيعي على الجمع من اليسار) $A(B+C)=AB+AC$

3) (ضرب المصفوفات توزيعي على الجمع من اليمين) $(A+B)C=AC+BC$ [3]

4) (ضرب المصفوفات ليس تبديليا) $AB\neq BA$

5) (مصفوفة الوحدة I محايدة في عملية ضرب المصفوفات) $AI=IA=A$

6) (المصفوفة المعدومة 0 عنصر ماص في عملية ضرب المصفوفات) $A0=0A=0$

7) $(AB)^T=B^TA^T$

8) $A^n=\underbrace{A.A...A}_{n\text{ مرة}}$ مع $n\in N$ [4]

---

[1] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 9.4, p. 219.
[2] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 222.
[3] Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 556.
[4] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 436-438.

4- تمارين

تمرين 8-1. لتكن لدينا المصفوفتان A و B بحيث

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & \sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & \pi \\ 11 & 40 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

1) أعط درجة كل من A و B.

2) إقرأ من المصفوفتين A و B العناصر التالية $a_{11}, a_{23}, a_{21}, b_{12}, b_{41}, b_{32}, b_{22}$

الحل

1) درجة A و B: $A\in M_{2,3}(R)$ أو $A_{2,3}$ أو $A(2,3)$ و $B_{4,2}$.

2) $a_{11}=-1$ ، $a_{23}=-4$ ، $a_{21}=0$ ، $b_{12}=9$ ، $b_{41}=4$ ، $b_{32}=40$ ، $b_{22}=\pi$.

تمرين 8-2. أحسب أثر ومنقول كل من المصفوفات التالية، ثم حدد نوع كل منها

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 10 & -6 & 8 \\ -6 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 9 & -18 & 0 \\ 12 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -13 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل

1) $tr(A)=\sum_{i=1}^{2} a_{ii}=a_{11}+a_{22}=1+1=2$ ، $A^T=A$ و $A=I_2$ مصفوفة الوحدة.

2) $tr(B)=\sum_{i=1}^{4} b_{ii}=b_{11}+b_{22}+b_{33}+b_{44}=0$ ، $B^T=B$ و $B=0_4$ المصفوفة المعدومة.

3) $tr(C)=\sum_{i=1}^{3} c_{ii}=c_{11}+c_{22}+c_{33}=2-4-10=-12$ ، $C^T=C$ و C مصفوفة قطرية.

4) $tr(D)=\sum_{i=1}^{3} d_{ii}=d_{11}+d_{22}+d_{33}=-3+7+30=34$ ، $D^T=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 8 & 11 & 30 \end{pmatrix}$ و D مصفوفة مثلثية علوية.

5) $tr(E)=\sum_{i=1}^{3} e_{ii}=e_{11}+e_{22}+e_{33}=10+4-5=9$ ، $E^T=E$ و E مصفوفة تناظرية.

6) $tr(F)=\sum_{i=1}^{3} f_{ii}=f_{11}+f_{22}+f_{33}=5-18+4=-9$ ، $F^T=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 \\ 0 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ و F مصفوفة مثلثية سفلية.

7) $tr(G)=\sum_{i=1}^{2} g_{ii}=g_{11}+g_{22}=0$ ، $G^T=\begin{pmatrix} 0 & -13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -13 & 0 \end{pmatrix}=-G$ و G مصفوفة ضد تناظرية.

تمرين 8-3. لتكن المصفوفتان A و B بحيث

$$A=\begin{pmatrix} 11 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 13 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 \\ 4 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

– أحسب $A+B$ ، $B-A$ ، $A-B$ ، $3A$ ، $-2B$ ، $3A-2B$.

الحل

$$A+B=\begin{pmatrix}11+0 & 3+6 & -5+9\\ -2+4 & 7-1 & 13-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 9 & 4\\ 2 & 6 & -1\end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix}0-11 & 6-3 & 9+5\\ 4+2 & -1-7 & -14-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 3 & 14\\ 6 & -8 & -27\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}11-0 & 3-6 & -5-9\\ -2-4 & 7+1 & 13+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -3 & -14\\ -6 & 8 & 27\end{pmatrix}=-(B-A)$$

$$3A=\begin{pmatrix}3(11) & 3(3) & 3(-5)\\ 3(-2) & 3(7) & 3(13)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33 & 9 & -15\\ -6 & 21 & 39\end{pmatrix}$$

$$-2B=\begin{pmatrix}-2(0) & -2(6) & -2(9)\\ -2(4) & -2(-1) & -2(-14)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -12 & -18\\ -8 & 2 & 28\end{pmatrix}$$

$$3A-2B=\begin{pmatrix}33+0 & 9-12 & -15-18\\ -6-8 & 21+2 & 39+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33 & -3 & -33\\ -14 & 23 & 67\end{pmatrix}$$

تمرين 8-4. لتكن المصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 0 & 6\\ 2 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}7\\ -2\\ 4\\ 0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}8\end{pmatrix}$$

1) أحسب إن أمكن، أثر ومنقول كل مصفوفة من المصفوفات السابقة.

2) أحسب كل الجداءات الممكنة لمصفوفتين من المصفوفات السابقة.

الحل

1) الأثر يُحسب فقط للمصفوفات المربعة وعليه

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{2}a_{ii}=a_{11}+a_{22}=5+1=6,\qquad tr(E)=e_{11}=8$$

$$A^T=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B^T=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 1 & 6 & -1\end{pmatrix}$$

$$C^T=\begin{pmatrix}7 & -2 & 4 & 0\end{pmatrix}\qquad D^T=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -5\end{pmatrix}\qquad E^T=E$$

2) حساب كل الجداءات الممكنة لمصفوفتين من المصفوفات السابقة

$$A_{2,2}\times A_{2,2}=\left(A^2\right)_{2,2}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 0\\ -18 & 1\end{pmatrix}$$

$$B_{3,2}\times A_{2,2}=(BA)_{3,2}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 0 & 6\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23 & 1\\ -18 & 6\\ 13 & -1\end{pmatrix}$$

$$D_{1,3}\times B_{3,2}=(DB)_{1,2}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 0 & 6\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 24\end{pmatrix}$$

$$C_{4,1}\times D_{1,3}=(CD)_{4,3}=\begin{pmatrix}7\\ -2\\ 4\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 21 & -35\\ -2 & -6 & 10\\ 4 & 12 & -20\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$C_{4,1}\times E_{1,1}=(CE)_{4,1}=\begin{pmatrix}7\\ -2\\ 4\\ 0\end{pmatrix}(8)=\begin{pmatrix}56\\ -16\\ 32\\ 0\end{pmatrix}$$

$$E_{1,1}\times D_{1,3}=(ED)_{1,3}=(8)\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 24 & -40\end{pmatrix}$$

$$E_{1,1}\times E_{1,1}=\left(E^2\right)_{1,1}=(8)(8)=(64)$$

تمرين 8–5. أوجد قيم x و y حتى تكون $A=B$ ، بحيث

$$A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ x & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & x+y\\ -1 & 5\end{pmatrix}$$

الحل. بما أن $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 2}=B=(b_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ ، فإن $a_{ij}=b_{ij}$ مع $1\le i,j\le 2$ ، أي

$$\begin{cases}a_{12}=b_{12}\\ a_{21}=b_{21}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8=x+y\\ x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=9\\ x=-1\end{cases}$$

تمرين 8–6. لتكن المصفوفتان A و B بحيث

$$A=\begin{pmatrix}3 & 21\\ -9 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

- أوجد قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون $A+\alpha B$ المصفوفة المعدومة.

الحل. لدينا

$$\begin{aligned}A+\alpha B=0_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 21\\ -9 & 0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 21\\ -9 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha & 7\alpha\\ 3\alpha & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3+\alpha & 21+7\alpha\\ -9+3\alpha & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}3+\alpha=0\\ 21+7\alpha=0\\ -9+3\alpha=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \alpha=-3\end{aligned}$$

ومنه $A-3B=0_2$.

تمرين 8−7. لتكن المصفوفتان A و B بحيث

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 4\\ 3 & -8 & -10\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}6 & 11 & 3\\ -2 & -4 & 8\\ 9 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1) أوجد A^T ، B^T ، $tr(A)$ و $tr(B)$.

2) تأكد أن $(A+B)^T=A^T+B^T$ ، $(2B)^T=2B^T$ ، $(A^T)^T=A$ ، $(AB)^T=B^TA^T$ ، $tr(3A)=3tr(A)$ ، $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$ ، $tr(B^T)=tr(B)$.

الحل

1) لدينا

$$A^T=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -8\\ 1 & 4 & -10\end{pmatrix}\qquad B^T=\begin{pmatrix}6 & -2 & 9\\ 11 & -4 & 0\\ 3 & 8 & 1\end{pmatrix}$$

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33}=-1+5-10=-6$$

$$tr(B)=\sum_{i=1}^{3}b_{ii}=b_{11}+b_{22}+b_{33}=6-4+1=3$$

2)

1−2) لدينا

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 4\\ 3 & -8 & -10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 11 & 3\\ -2 & -4 & 8\\ 9 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5 & 13 & 4\\ -2 & 1 & 12\\ 12 & -8 & -9\end{pmatrix}$$

وعليه

$$(A+B)^T=\begin{pmatrix}5 & -2 & 12\\ 13 & 1 & -8\\ 4 & 12 & -9\end{pmatrix}$$

و

$$A^T+B^T=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -8\\ 1 & 4 & -10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -2 & 9\\ 11 & -4 & 0\\ 3 & 8 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5 & -2 & 12\\ 13 & 1 & -8\\ 4 & 12 & -9\end{pmatrix}$$

إذا $(A+B)^T=A^T+B^T$

2-2) لدينا

$$2B=2\begin{pmatrix}6&11&3\\-2&-4&8\\9&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&22&6\\-4&-8&16\\18&0&2\end{pmatrix}$$

وعليه

$$\left(2B\right)^T=\begin{pmatrix}12&-4&18\\22&-8&0\\6&16&2\end{pmatrix}$$

و

$$2B^T=2\begin{pmatrix}6&-2&9\\11&-4&0\\3&8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-4&18\\22&-8&0\\6&16&2\end{pmatrix}$$

إذا $\left(2B\right)^T=2B^T$

3-2) لدينا

$$\left(A^T\right)^T=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&5&-8\\1&4&-10\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&5&4\\3&-8&-10\end{pmatrix}=A$$

إذا $\left(A^T\right)^T=A$

4-2) لدينا

$$A_{3,3}\times B_{3,3}=\left(AB\right)_{3,3}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&5&4\\3&-8&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&11&3\\-2&-4&8\\9&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-19&14\\26&-20&44\\-56&65&-65\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\left(AB\right)^T=\begin{pmatrix}-1&-19&14\\26&-20&44\\-56&65&-65\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-1&26&-56\\-19&-20&65\\14&44&-65\end{pmatrix}$$

و

$$B^T{}_{3,3}\times A^T{}_{3,3}=\left(B^TA^T\right)_{3,3}=\begin{pmatrix}6&-2&9\\11&-4&0\\3&8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&5&-8\\1&4&-10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&26&-56\\-19&-20&65\\14&44&-65\end{pmatrix}$$

إذا $\left(AB\right)^T=B^TA^T$

5−2) لدينا

$$tr\left(A+B\right)=tr\begin{pmatrix} 5 & 13 & 4 \\ -2 & 1 & 12 \\ 12 & -8 & -9 \end{pmatrix}=5+1-9=-3$$

و

$$tr\left(A\right)+tr\left(B\right)=-6+3=-3$$

إذا $tr\left(A+B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(B\right)$

6−2) لدينا

$$3A=3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -8 & -10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 15 & 12 \\ 9 & -24 & -30 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$tr\left(3A\right)=-3+15-30=-18$$

و

$$3tr\left(A\right)=3\left(-6\right)=-18$$

إذا $tr\left(3A\right)=3tr\left(A\right)$

7−2) لدينا

$$tr\left(B^T\right)=tr\begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 11 & -4 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}=6-4+1=3=tr\left(B\right)$$

إذا $tr\left(B^T\right)=tr\left(B\right)$

تمرين 8−8. لتكن المصفوفات A ، B و C بحيث

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

– تأكد أن $A\left(B+C\right)=AB+AC$.

الحل. لدينا

$$B+C=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -2 & 16 & 13 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$A_{2,2}\times\left(B+C\right)_{2,3}=\left(A\left(B+C\right)\right)_{2,3}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 16 & 13 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -6 & 48 & 39 \\ 54 & -24 & -25 \end{pmatrix}$$

ولدينا

$$A_{2,2}\times B_{2,3}=(AB)_{2,3}=\begin{pmatrix}3&0\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&6&9\\5&1&-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-6&18&27\\22&-2&-25\end{pmatrix}$$

و

$$A_{2,2}\times C_{2,3}=(AC)_{2,3}=\begin{pmatrix}3&0\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&10&4\\8&-3&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&30&12\\32&-22&0\end{pmatrix}$$

ومنه

$$AB+AC=\begin{pmatrix}-6&18&27\\22&-2&-25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&30&12\\32&-22&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-6&48&39\\54&-24&-25\end{pmatrix}$$

إذا $A(B+C)=AB+AC$.

تمرين 8-9. لتكن المصفوفات A، B و C بحيث

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-3&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2&7\\4&-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}8&10\\6&9\end{pmatrix}$$

- تأكد أن $(A+B)-C=A+(B-C)$ و $(AB)C=A(BC)$.

الحل

1) التأكد أن $(A+B)-C=A+(B-C)$. لدينا

$$(A+B)-C=\left[\begin{pmatrix}1&0\\-3&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&7\\4&-1\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}8&10\\6&9\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&7\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&10\\6&9\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-9&-3\\-5&-5\end{pmatrix}$$

ولدينا

$$A+(B-C)=\begin{pmatrix}1&0\\-3&5\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}-2&7\\4&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&10\\6&9\end{pmatrix}\right]$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\-3&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10&-3\\-2&-10\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-9&-3\\-5&-5\end{pmatrix}$$

إذا $(A+B)-C=A+(B-C)$.

2) التأكد أن $(AB)C = A(BC)$. لدينا

$$(AB)C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 26 & -26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 26 & 43 \\ 52 & 26 \end{pmatrix}$$

ولدينا

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 26 & 43 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 26 & 43 \\ 52 & 26 \end{pmatrix}$$

إذا $(AB)C = A(BC)$.

تمرين 8-10. يقوم أحد المصانع المتخصصة بإنتاج ثلاثة أنواع من الحواسيب المحمولة بأحجام مختلفة في اليوم الواحد وعلى ثلاثة خطوط إنتاجية A، B و C كما هو موضح في الجدول التالي

نوع الحواسيب المحمولة / الخطوط الإنتاجية	حجم صغير	حجم متوسط	حجم كبير
A	6	11	18
B	10	14	20
C	9	15	24

- أوجد كمية الإنتاج من الأنواع الثلاثة لمدة 15 يوما.

الحل. يمكن كتابة معطيات الجدول في مصفوفة الإنتاج التالية

$$T = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 18 \\ 10 & 14 & 20 \\ 9 & 15 & 24 \end{pmatrix}$$

ومنه كمية الإنتاج من الأنواع الثلاثة لمدة 15 يوما تمثل المصفوفة $15T$، أي

$$15T = 15\begin{pmatrix} 6 & 11 & 18 \\ 10 & 14 & 20 \\ 9 & 15 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 165 & 270 \\ 150 & 210 & 300 \\ 135 & 225 & 360 \end{pmatrix}$$

الفصل التاسع

المحددات وطرق

حساب مقلوب مصفوفة

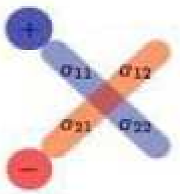
للمحددات دور أساسي في قابلية قلب مصفوفة. سنستعرض في هذا الفصل أشهر الطرق لحساب محدد مصفوفة وكذا مقلوبها.

1- محدد مصفوفة (Determinant of Matrix)

- *لكل مصفوفة مربعة A، قيمة رقمية تسمى محددها، يرمز له بأحد الرموز $|A|$، ΔA أو $\det(A)$.*[1]
- *إذا كان $|A|=0$ فإن A تسمى مصفوفة مفردة (singular) وإن كان $|A|\neq 0$ فان A تسمى مصفوفة غير مفردة (non-singular).*[2]

1-1- محدد مصفوفة من الدرجة الثانية (Determinant of Matrix of Order two)

لتكن $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية. محدد A يحسب بالطريقة التالية*



أي $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.[3]

1-2- محدد مصفوفة من الدرجة n (Determinant of Matrix of Order n)

بشكل عام، لإيجاد محدد مصفوفة من الدرجة n، نستخدم طريقة المحددات الصغرى، لكن استثناء من أجل المصفوفات من الدرجة الثالثة يمكن استخدام طريقة أخرى وهي طريقة ساريس.

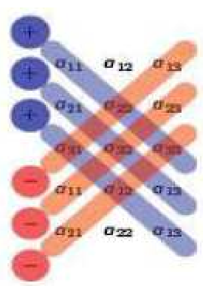
لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة الثالثة، بحيث

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

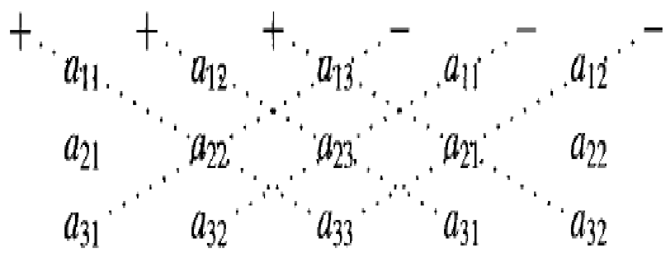
لإيجاد محدد A نستخدم إحدى الطريقتين التاليتين.

1-2-1- طريقة ساريس (Sarrus's Rule)

في هذه الطريقة، نعيد كتابة العمودين الأول والثاني أو السطرين الأول والثاني، ثم نجد حاصل ضرب الأقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الأقطار المرافقة كالآتي



أو



(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 230.

(2) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص. 448.

(3) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 257-258.

وعليه $\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$ [1]

ملاحظة 1-9. طريقة سايرس صالحة فقط للمصفوفات من الدرجة الثالثة ولا يمكن تعميمها لمصفوفات من درجة أعلى. [2]

1-2-2- طريقة المحددات الصغرى (Expansion by Cofactors)

طريقة المحددات الصغرى تقوم على فكرة إيجاد محددات من درجة أقل حتى الحصول على محددات من الدرجة الثانية ويمكن حساب المحدد من أجل سطر أو عمود معينين.

ليكن

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

محدد من الدرجة n، بحيث

$\Delta=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_{ij}$ *، بالنسبة للسطر i و* $\Delta=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}X_{ij}$ *، بالنسبة للعمود j.* [3]

حيث X_{ij} يسمى *العامل المرافق (cofactor)* للعنصر a_{ij}، بحيث

$$X_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

و Δ_{ij} المحدد الثانوي (minor) للعنصر a_{ij}، أي المحدد من الدرجة $(n-1)$ المستخرج من Δ بإزالة السطر i والعمود j . نرمز لمصفوفة العوامل المرافقة X_{ij} للعنصر a_{ij} بأحد الرمزين C أو $\mathrm{com}A$ [*]*، بحيث*

$$C=\mathrm{com}A=\left(X_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}=\left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$$ [4]

إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

فإن محدد A بالنسبة للسطر الأول هو

$$\Delta A=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

ثم نجد محددات المصفوفات من الدرجة الثانية. يمكن إيجاد المحدد بالنسبة لأي سطر أو أي عمود وفق الإشارات التالية

---

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 261-262.
[2] Ibid, p. 262.
[3] Ibid, p. 263.
[*] الرمز "com" أصله كلمة "co-matrix" أي "matrix of cofactors " وتعني "مصفوفة العوامل المرافقة".
[4] StØphane Rossignol. Op. Cit. DØfinition 9.2,3p. 244.

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$ [1]

نظرية 9−1. لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n. لدينا

1) إذا كانت عناصر أحد أسطر أو أعمدة المصفوفة A أصفارا، فإن $|A| = 0$.

2) إذا تساوى سطرين أو عمودين في المصفوفة A، فإن $|A| = 0$.

3) إذا كانت أسطر أو أعمدة المصفوفة A مرتبطة خطيا، فإن $|A| = 0$.

4) إذا بدلنا بين سطرين أو عمودين في المصفوفة A، فإن محددها تنعكس إشارته.

5) إذا ضرب أحد أسطر أو أعمدة المصفوفة A بعدد ثابت، فإن محددها يضرب بالعدد نفسه.[2]

6) $|\alpha A| = \alpha^n |A|; \quad \alpha \in R$

7) $|AB| = |A||B|$ و $|A^T| = |A|$

8) محدد مصفوفة مثلثية أو قطرية هو حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي.[3]

2− مقلوب مصفوفة (Inverse of Matrix)

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n (أي $A \in M_n(R)$). نقول أن A قابلة للقلب (invertible) إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة وحيدة B (مع $B \in M_n(R)$)، بحيث $AB = BA = I_n$ ونقول أن " B مقلوب (inverse) A" ونكتب " $A^{-1} = B$ " ونقول أيضا أن " A مقلوب B" ونكتب " $B^{-1} = A$ " (بتصرف).[4]

نظرية 9−2. لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n. تكون A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$.[5]

نظرية 9−3. لتكن A مصفوفة مربعة قابلة للقلب. لدينا

1) إذا كان $A = (a_{11}) \in M_1(R)$ مع $a_{11} \neq 0$، فإن $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}}$.

2) A^{-1} قابلة للقلب و $(A^{-1})^{-1} = A$.

3) من أجل كل عدد طبيعي k، A^k قابلة للقلب و $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

4) A^T قابلة للقلب و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

5) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

6) إذا كانت A و B مصفوفتين قابلتين للقلب، فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.[6]

ملاحظة 9−2. الكتابة $\dfrac{A}{B}$ خاطئة، بحيث A و B مصفوفتان.

---

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p . 601.
(2) StØphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 9.21, p. 241.
(3) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 234-235.
(4) Ibid, p. 235.
(5) StØphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 9.25, p. 243.
(6) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 238.

-إيجاد مقلوب مصفوفة (Finding Inverse of a Matrix)

هناك عدة طرق لإيجاد مقلوب مصفوفة، فيما يلي الطريقتين الأكثر استعمالا.

أ) طريقة المحدد (Method of Determinant)

نظرية 9-4. *لتكن* $A\in M_n(R)$ *. إذا كان* $\det(A)\neq 0$ *، فإن*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}(\mathrm{com}A)^T \quad (1)$$

بوضع $\mathrm{adj}A=(\mathrm{com}A)^T$ (*)*، فإن*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}A \quad (2)$$

ب) طريقة غوص-جوردان (Gauss-Jordan's Rule)

تعتمد هذه الطريقة على مجموعة عمليات تقام على أسطر المصفوفة وتتمثل في

- *ضرب سطر بعدد ثابت غير معدوم.*
- *ضرب سطر بعدد ثابت غير معدوم وجمعه إلى سطر آخر.*
- *تبديل سطر بآخر.*

ونجد مقلوب مصفوفة A كما يلي

$$(A|I_n)\underline{\text{Gauss - Jordan}}(I_n|A^{-1}) \quad (3)$$

ملاحظة 9-3

- يمكن أن نقوم بأكثر من عملية من العمليات المذكورة أعلاه في الوقت نفسه.
- يمكن أن تُقام العمليات السابقة على أعمدة المصفوفة. (4)

3- تمارين

تمرين 9-1. أحسب المحددات التالية

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&3\\-1&2\end{vmatrix}\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}4&0&-2\\-6&1&7\\2&3&0\end{vmatrix}\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}6&9&4&-2\\0&-3&8&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&5\end{vmatrix}\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&2&0\\-7&1&-4\end{vmatrix}\quad \Delta_5=\begin{vmatrix}2&0\\0&9\end{vmatrix}$$

الحل

(1

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&3\\-1&2\end{vmatrix}=(5.2)-(-1.3)=10-(-3)=13$$

---

(1) StØphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 9.28, p. 246.

(*) الرمز "adj" أصله كلمة "adjoint matrix " والتي تعني "مصفوفة مساعدة".

(2) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 235-236.

(3) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص ص. 100-101.

(4) نفسه، ص. 103.

2) باستخدام طريقة المحددات الصغرى بالنسبة للسطر الأول، نجد

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= (-1)^{1+1}.4\begin{vmatrix}1 & 7\\ 3 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.0\begin{vmatrix}-6 & 7\\ 2 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(-2)\begin{vmatrix}-6 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\\ &= 4\left[(1.0)-(7.3)\right]-2\left[(-6.3)-(1.2)\right]\\ &= -44\end{aligned}$$

أو باستخدام طريقة سايرس، نجد

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}4 & 0 & -2\\ -6 & 1 & 7\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix} = (4.1.0)+(-6.3.-2)+(2.0.7)-(-2.1.2)-(7.3.4)-(0.0.-6)$$

$$\begin{matrix}4 & 0 & -2\\ -6 & 1 & 7\end{matrix}$$

$$\Delta_2 = 0+36+0+4-84-0=-44$$

3) $\Delta_3 = 6.-3.1.5=-90$ لأن المصفوفة $\begin{pmatrix}6 & 9 & 4 & -2\\ 0 & -3 & 8 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ مثلثية علوية.

4) $\Delta_4 = 1.2.-4=-8$ لأن المصفوفة $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ -7 & 1 & -4\end{pmatrix}$ مثلثية سفلية.

5) $\Delta_5 = 2.9=18$ لأن المصفوفة $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$ قطرية.

تمرين 9−2. نعتبر في $M_3(R)$ المصفوفتين

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix} \qquad L=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

أحسب ML و LM واستنتج M^{-1} و L^{-1}.

الحل. $ML=LM=I_3$ وعليه، نستنتج أن $M^{-1}=L$ و $L^{-1}=M$.

تمرين 9−3. لتكن $A\in M_3(R)$، بحيث

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

− أحسب $2A-A^2$ واستنتج A^{-1}.

الحل

- حساب $2A-A^2$. لدينا

$$A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$2A-A^2 = 2\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

وعليه $2A-A^2=I_3$

- استنتاج A^{-1}. لدينا

$$\begin{aligned} 2A-A^2=I_3 &\Leftrightarrow A\left(2I_3-A\right)=I_3 \\ &\Leftrightarrow A^{-1}A\left(2I_3-A\right)=A^{-1}I_3 \\ &\Leftrightarrow I_3\left(2I_3-A\right)=A^{-1} \\ &\Leftrightarrow 2I_3-A=A^{-1} \end{aligned}$$

وعليه

$$A^{-1}=2I_3-A$$
$$=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذا

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين 9–4. لتكن A و B مصفوفتين، بحيث

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- أحسب مقلوبي A و B بطريقتي المحدد وغوص–جوردان.

الحل

- حساب مقلوب A بطريقة المحدد

لدينا $\det(A)=\begin{vmatrix}7&3\\2&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ ومنه A قابلة للقلب و $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}A$ ، بحيث

$$\mathrm{com}\,A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}|1| & (-1)^{1+2}|2|\\ (-1)^{2+1}|3| & (-1)^{2+2}|7|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&7\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}\,A=(\mathrm{com}A)^T=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}$$

ومنه

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}$$

- حساب مقلوب A بطريقة غوص–جوردان

$$\begin{matrix}R_1^{(1)}\\R_2^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}7&3&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{matrix}R_1^{(2)}=R_1^{(1)}-3R_2^{(1)}\\R_2^{(2)}=7R_2^{(1)}-2R_1^{(1)}\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-3\\0&1&-2&7\end{array}\right)$$

إذا

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}$$

- حساب مقلوب B بطريقة المحدد. باستعمال السطر الأول ل B ، لدينا

$$\det(B)=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&0&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}.2\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.1\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}.0\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

ومنه، B قابلة للقلب و $B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\mathrm{adj}B$ ، بحيث

$$\mathrm{com}B=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&0\\2&-1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&1\\1&-2&0\\1&-2&-1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\mathrm{adj}B=(\mathrm{com}B)^T=\begin{pmatrix}-1&1&1\\3&-2&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

إذا

$$B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1&1&1\\3&-2&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\3&-2&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

- حساب مقلوب B بطريقة غوص–جوردان

$$\begin{matrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \\ R_3^{(1)} \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} R_1^{(2)} = R_1^{(1)} - R_2^{(1)} \\ R_2^{(2)} = R_3^{(1)} - 2R_2^{(1)} \\ R_3^{(2)} = R_1^{(1)} - R_3^{(1)} \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{matrix} R_1^{(3)} = R_1^{(2)} - R_2^{(2)} \\ R_2^{(3)} = R_2^{(2)} + 3R_3^{(2)} \\ R_3^{(3)} = R_3^{(2)} \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{matrix} R_1^{(4)} = R_1^{(3)} - 2R_3^{(3)} \\ R_2^{(4)} = R_2^{(3)} \\ R_3^{(4)} = R_3^{(3)} \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

ومنه

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين 9–5. لتكن A و B مصفوفتين، بحيث

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) أحسب محدد كلا من A و B.

2) تأكد أن $|A^T| = |A|$، $|AB| = |BA| = |A||B|$، $|A^2| = |A|^2$، $|2B| = 2^3|B|$.

الحل

1) لنحسب محدد A بالنسبة للسطر الثالث، لدينا

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.1\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -5\left[(2.3) - (0.-1)\right] + \left[(2.1) - (-4.-1)\right]$$

$$= -32$$

لنحسب محدد B بالنسبة للعمود الثاني، لدينا

$$|B| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2}(-2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.0\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.0\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[(2.3) - (4.1)\right]$$

$$= 4$$

2)

2−1) لنتأكد أن $\left|A^T\right| = |A|$. لدينا

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

لنحسب محدد A^T بالنسبة للسطر الأول، لدينا

$$\begin{aligned} \left|A^T\right| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}.2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.(-1)\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.0\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2\left[(1.1)-(5.3)\right] + \left[(-4.1)-(5.0)\right] \\ &= -32 \end{aligned}$$

إذا $\left|A^T\right| = |A|$.

2−2) لنتأكد أن $|AB| = |BA| = |A||B|$. لدينا

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 16 & 0 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

لنحسب محدد AB بالنسبة للسطر الثالث، لدينا

$$\begin{aligned} |AB| &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 16 & 0 & 22 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+1}.16\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.0\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.22\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 16\left[(-4.5)-(2.-6)\right] + 22\left[(2.2)-(-4.-1)\right] \\ &= -128 \end{aligned}$$

ولدينا

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

لنحسب محدد BA بالنسبة للسطر الأول، لدينا

$$\begin{aligned}|BA| &= \begin{vmatrix}16 & -5 & -1\\ 6 & 8 & 4\\ 2 & 6 & 2\end{vmatrix}\\ &= (-1)^{1+1}.16\begin{vmatrix}8 & 4\\ 6 & 2\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.(-5)\begin{vmatrix}6 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.(-1)\begin{vmatrix}6 & 8\\ 2 & 6\end{vmatrix}\\ &= 16\left[(8.2)-(6.4)\right]+5\left[(6.2)-(4.2)\right]-\left[(6.6)-(8.2)\right]\\ &= -128\end{aligned}$$

ولدينا

$$|A||B| = (-32)(4) = -128$$

إذا $|AB| = |BA| = |A||B|$.

3-2) لنتأكد أن $|A^2| = |A|^2$. لدينا

$$A^2 = A\times A = \begin{pmatrix}2 & -4 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & -12 & -12\\ -3 & 20 & 6\\ -5 & 10 & 16\end{pmatrix}$$

لنحسب محدد A^2 بالنسبة للعمود الأول، لدينا

$$\begin{aligned}|A^2| &= \begin{vmatrix}8 & -12 & -12\\ -3 & 20 & 6\\ -5 & 10 & 16\end{vmatrix}\\ &= (-1)^{1+1}.8\begin{vmatrix}20 & 6\\ 10 & 16\end{vmatrix} + (-1)^{2+1}.(-3)\begin{vmatrix}-12 & -12\\ 10 & 16\end{vmatrix} + (-1)^{3+1}.(-5)\begin{vmatrix}-12 & -12\\ 20 & 6\end{vmatrix}\\ &= 8\left[(20.16)-(6.10)\right]+3\left[(-12.16)-(-12.10)\right]-5\left[(-12.6)-(-12.20)\right]\\ &= 1024\end{aligned}$$

ولدينا

$$|A|^2 = (-32)^2 = 1024$$

إذا $|A^2| = |A|^2$.

4-2) لنتأكد أن $|2B| = 2^3|B|$. لدينا

$$2B = 2\begin{pmatrix}7 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & -4 & 10\\ 6 & 0 & 8\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

لنحسب محدد $2B$ بالنسبة للعمود الثاني، لدينا

$$\begin{aligned}
|2B| &= \begin{vmatrix} 14 & -4 & 10 \\ 6 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+2}.(-4)\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.0\begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.0\begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \\
&= 4\left[(6.4)-(8.2)\right] \\
&= 32
\end{aligned}$$

ولدينا

$$2^3|B| = 2^3(4) = 32$$

إذا $|2B| = 2^3|B|$.

تمرين 9−6. لتكن لدينا المصفوفة A بحيث

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

– عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المصفوفة A قابلة للقلب.

الحل. تكون المصفوفة A قابلة للقلب، إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$.

لنحسب محدد A بالنسبة للسطر الأول، لدينا

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}.\alpha\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.1\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \alpha(\alpha^2-1)-(\alpha-1)+(1-\alpha) \\
&= \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)-(\alpha-1)-(\alpha-1) \\
&= \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)-2(\alpha-1) \\
&= (\alpha-1)\left[\alpha(\alpha+1)-2\right] \\
&= (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha-2) \\
&= (\alpha-1)(\alpha-1)(\alpha-2) \\
&= (\alpha-1)^2(\alpha-2)
\end{aligned}$$

وعليه، تكون المصفوفة A قابلة للقلب، إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$، أي

$$\begin{aligned}
(\alpha-1)^2(\alpha-2) \neq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-1 \neq 0 \\ \alpha-2 \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 1 \\ \alpha \neq 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \alpha \in R-\{1;2\}
\end{aligned}$$

تمرين 9-7. لتكن $A\in M_2\left(R\right)$ ، بحيث

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- بين أن $A^2-3A+2I_2=0_2$ واستنتج A^{-1} .

الحل

- تبيان أن $A^2-3A+2I_2=0_2$. لدينا

$$\begin{aligned} A^2=A\times A&=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} A^2-3A+2I_2&=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0_2 \end{aligned}$$

إذا $A^2-3A+2I_2=0_2$

- استنتاج A^{-1} . لدينا

$$\begin{aligned} A^2-3A+2I_2=0_2 &\Leftrightarrow A^2-3A=-2I_2 \\ &\Leftrightarrow A\left(A-3I_2\right)=-2I_2 \\ &\Leftrightarrow A^{-1}A\left(A-3I_2\right)=-2A^{-1}I_2 \\ &\Leftrightarrow I_2\left(A-3I_2\right)=-2A^{-1} \\ &\Leftrightarrow A-3I_2=-2A^{-1} \\ &\Leftrightarrow A^{-1}=-\frac{1}{2}\left(A-3I_2\right) \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} A^{-1}&=-\frac{1}{2}\left(A-3I_2\right) \\ &=-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &=-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right] \\ &=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

تمرين 9−8. لتكن A و B مصفوفتين، بحيث

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

1) أحسب مقلوب كلا من A و B.

2) تأكد أن $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ، $(A^{-1})^{-1}=A$ ، $(B^T)^{-1}=(B^{-1})^T$ ، $(4A)^{-1}=\frac{1}{4}A^{-1}$.

الحل

1) إيجاد A^{-1} و B^{-1}

حساب مقلوب A . باستعمال السطر الثالث ل A ، لدينا

$$\begin{aligned}\det(A)&=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&0\\2&0&-1\end{vmatrix}\\&=(-1)^{3+1}.2\begin{vmatrix}-3&1\\-1&0\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}.0\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}(-1)\begin{vmatrix}2&-3\\1&-1\end{vmatrix}\\&=1\neq 0\end{aligned}$$

ومنه، A قابلة للقلب و $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\text{adj}A$ ، بحيث

$$\text{com}A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}&(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}&(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&0\end{vmatrix}\\(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3&1\\0&-1\end{vmatrix}&(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\2&-1\end{vmatrix}&(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&-3\\2&0\end{vmatrix}\\(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3&1\\-1&0\end{vmatrix}&(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}&(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&-3\\1&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-3&-4&-6\\1&1&1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\text{adj}A=(\text{com}A)^T=\begin{pmatrix}1&-3&1\\1&-4&1\\2&-6&1\end{pmatrix}$$

إذا

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-3&1\\1&-4&1\\2&-6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&1\\1&-4&1\\2&-6&1\end{pmatrix}$$

– حساب مقلوب B . باستعمال العمود الأول ل B ، لدينا

$$\begin{aligned}\det(B)&=\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&1&0\\0&2&-1\end{vmatrix}\\&=(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}.0\begin{vmatrix}3&-2\\2&-1\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix}3&-2\\1&0\end{vmatrix}\\&=-1\neq 0\end{aligned}$$

ومنه، B قابلة للقلب و $B^{-1}=\dfrac{1}{\det(B)}\text{adj}B$ ، بحيث

$$\text{com}B=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\text{adj}B=(\text{com}B)^T=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

إذا

$$B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

(2

1-2) التأكد أن $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. لدينا

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 5 & -5\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

إيجاد $(AB)^{-1}$. باستعمال السطر الأول ل AB ، لدينا

$$\det(AB)=\begin{vmatrix}2 & 5 & -5\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{1+1}.2\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & -3\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.5\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(-5)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}$$
$$=-1\neq 0$$

ومنه، AB قابلة للقلب و $(AB)^{-1}=\dfrac{1}{\det(AB)}\text{adj}(AB)$ ، بحيث

$$\text{com}(AB)=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & -3\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5 & -5\\ 4 & -3\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -5\\ 2 & -3\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & -5\\ 2 & -2\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & -2\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -5 & 4 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\operatorname{adj}(AB)=(\operatorname{com}AB)^T=\begin{pmatrix}2&-5&0\\-1&4&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

إذا

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2&-5&0\\-1&4&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&5&0\\1&-4&1\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

ولدينا

$$B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&1\\1&-4&1\\2&-6&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2&5&0\\1&-4&1\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

إذا $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

2-2) التأكد أن $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

إيجاد $\left(A^{-1}\right)^{-1}$. باستعمال السطر الأول ل A^{-1} ، لدينا

$$\det\left(A^{-1}\right)=\begin{vmatrix}1&-3&1\\1&-4&1\\2&-6&1\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix}-4&1\\-6&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.(-3)\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}.1\begin{vmatrix}1&-4\\2&-6\end{vmatrix}$$
$$=1\neq 0$$

ومنه، A^{-1} قابلة للقلب و $\left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{\det(A^{-1})}\operatorname{adj}\left(A^{-1}\right)$ ، بحيث

$$\operatorname{com}\left(A^{-1}\right)=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-4&1\\-6&1\end{vmatrix}&(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}&(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-4\\2&-6\end{vmatrix}\\(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3&1\\-6&1\end{vmatrix}&(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}&(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-3\\2&-6\end{vmatrix}\\(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3&1\\-4&1\end{vmatrix}&(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}&(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-3\\1&-4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&2\\-3&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\operatorname{adj}\left(A^{-1}\right)=\left(\operatorname{com}A^{-1}\right)^T=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

إذا

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=A$$

ومنه $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

3–2) التأكد أن $\left(B^{T}\right)^{-1}=\left(B^{-1}\right)^{T}$. لدينا

$$B^{T}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

إيجاد $\left(B^{T}\right)^{-1}$. باستعمال السطر الأول ل B^{T} ، لدينا

$$\begin{aligned}\det\left(B^{T}\right)&=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}\\ &=(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.0\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}.0\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\\ &=-1\neq 0\end{aligned}$$

ومنه، B^{T} قابلة للقلب و $\left(B^{T}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\det\left(B^{T}\right)}\operatorname{adj}\left(B^{T}\right)$ ، بحيث

$$\operatorname{com}\left(B^{T}\right)=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\operatorname{adj}\left(B^{T}\right)=\left(\operatorname{com}\left(B^{T}\right)\right)^{T}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

إذا

$$\left(B^{T}\right)^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

ولدينا

$$\left(B^{-1}\right)^{T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

إذا $\left(B^{T}\right)^{-1}=\left(B^{-1}\right)^{T}$.

4-2) التأكد أن $(4A)^{-1}=\frac{1}{4}A^{-1}$. لدينا

$$4A=4\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-12&4\\4&-4&0\\8&0&-4\end{pmatrix}$$

إيجاد $(4A)^{-1}$. باستعمال السطر الثالث ل $4A$، لدينا

$$\begin{aligned}\det(4A)&=\begin{vmatrix}8&-12&4\\4&-4&0\\8&0&-4\end{vmatrix}\\&=(-1)^{3+1}.8\begin{vmatrix}-12&4\\-4&0\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}.0\begin{vmatrix}8&4\\4&0\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}(-4)\begin{vmatrix}8&-12\\4&-4\end{vmatrix}\\&=64\neq 0\end{aligned}$$

ومنه، $4A$ قابلة للقلب و $(4A)^{-1}=\frac{1}{\det(4A)}\operatorname{adj}(4A)$، بحيث

$$\operatorname{com}(4A)=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-4&0\\0&-4\end{vmatrix}&(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&0\\8&-4\end{vmatrix}&(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&-4\\8&0\end{vmatrix}\\(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-12&4\\0&-4\end{vmatrix}&(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}8&4\\8&-4\end{vmatrix}&(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}8&-12\\8&0\end{vmatrix}\\(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-12&4\\-4&0\end{vmatrix}&(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}8&4\\4&0\end{vmatrix}&(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}8&-12\\4&-4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&16&32\\-48&-64&-96\\16&16&16\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\operatorname{adj}(4A)=(\operatorname{com}(4A))^{T}=\begin{pmatrix}16&-48&16\\16&-64&16\\32&-96&16\end{pmatrix}$$

إذا

$$\begin{aligned}(4A)^{-1}&=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}16&-48&16\\16&-64&16\\32&-96&16\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3&1\\1&-4&1\\2&-6&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}A^{-1}\end{aligned}$$

إذا $(4A)^{-1}=\frac{1}{4}A^{-1}$.

تمرين 9-9. أسعار التوازن P_1 و P_2 لسلعتين تحقق جملة المعادلتين التاليتين

$$(I)\begin{cases}-4P_1+3P_2=35\\5P_1+P_2=75\end{cases}$$

- أوجد P_1 و P_2.

الحل. يمكن كتابة جملة المعادلتين (I) على شكل مصفوفات كما يلي

$$(I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 75 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow AP = B$$

بحيث $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ، $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 35 \\ 75 \end{pmatrix}$ وعليه مصفوفة أسعار التوازن تعطى بالعلاقة التالية

$$P = A^{-1}B$$

-إيجاد A^{-1}

لدينا $\det(A) = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -19 \neq 0$ ومنه، A قابلة للقلب و $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}A$ ، بحيث

$$\text{com}\, A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|1| & (-1)^{1+2}|5| \\ (-1)^{2+1}|3| & (-1)^{2+2}|-4| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}\, A = (\text{com}A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$A^{-1} = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$P = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 35 \\ 75 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 190 \\ 475 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

إذا، أسعار التوازن للسلعتين هي $p_1 = 10$ وحدات نقدية و $p_2 = 25$ وحدة نقدية.

الفصل العاشر

جمل المعادلات

الخطية

معظم النماذج الاقتصادية الخطية تؤدي إلى جمل معادلات خطية، نعتمد لحل هذه الأخيرة على المصفوفات لكونها تبسط وتسرع عملية الحساب.

1- الشكل المصفوف لجمل معادلات خطية

لدينا m من المعادلات الخطية ب n مجهول (أو متغير) معطاة بالشكل العام التالي

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

والذي يمكن كتابته على صيغة مصفوفات كما يلي

$$AX = B$$

بحيث

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m,1}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n,1}, \quad A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m,n}$$

وتسمى A مصفوفة المعاملات، X مصفوفة المتغيرات (أو المجاهيل) و B مصفوفة الثوابت. [1]

إذا كانت مصفوفة الثوابت معدومة، أي $B = 0_{m,1}$ فنقول أن الجملة $AX = B$ متجانسة (homogeneous). [2]

2 - طرق حل جمل معادلات خطية

هناك عدة طرق لحل جمل معادلات خطية، من أشهرها، طريقة كرامر، مقلوب مصفوفة، غوص- جوردان، غوص وطريقة رتبة مصفوفة.

2-1- طريقة كرامر (Cramer's Rule)

نظرية 10-1. *لتكن $AX = B$ جملة معادلات خطية. إذا كانت المصفوفة A مربعة أي $(m = n)$، فنقول أن الجملة $AX = B$ لكرامر[3] وإذا كان $|A| \neq 0$ فإن للجملة حل وحيد هو $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$، بحيث*

$$\forall i = \overline{1, n} : x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

مع A_i هي مصفوفة من درجة A، تنتج من حذف عناصر العمود i من المصفوفة A وإبدالها بعناصر مصفوفة العمود B. [4]

2-2- طريقة مقلوب مصفوفة

نظرية 10-2. *لتكن $AX = B$ جملة معادلات خطية. إذا كانت المصفوفة A مربعة بحيث $|A| \neq 0$، فإن*

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 251.

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 229.

(3) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 9.30, p. 254.

(4) Ibid. Proposition 9.37, p. 255.

للجملة $AX = B$ حل وحيد هو $X = A^{-1}B$.(1)

2-3- طريقة غوص-جوردان (Gauss-Jordan's Rule)

لتكن $AX = B$ جملة معادلات خطية. إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث $\det(A) \neq 0$، فإن للجملة $AX = B$ حل وحيد، نجده بإتباع الخطوات التالية

نضع المصفوفة $(A|B)$ ونطبق على أسطرها مجموعة عمليات من ضرب سطر بعدد ثابت غير معدوم أو جمع سطرين أو أكثر أو تبديل سطر بآخر بهدف تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة الوحدة I_n ومصفوفة الثوابت B إلى مصفوفة الحل C، أي

$$(A|B)\underline{Gauss\text{-}Jordan}(I_n|C)$$

بحيث $X = C$.(2)

2-4- طريقة غوص أو العنصر المحوري لغوص (Gaussian method or Gauss's pivot)

لدينا جملة معادلات خطية ب n معادلة و n مجهول على الشكل التالي

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow AX = B$$

هدف طريقة غوص (أو العنصر المحوري لغوص) هو تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية علوية للحصول على الجملة $A'X = B'$ المكافئة(*) للجملة $AX = B$.(3)

- نفرض أن $a_{11} \neq 0$ والذي يسمى العنصر المحوري (pivot).
- المرحلة الأولى. لدينا المصفوفة $(A|B) = (A^{(1)}|B^{(1)})$. نحافظ على السطر الأول للمصفوفة $(A^{(1)}|B^{(1)})$ والذي يسمى سطر العنصر المحوري $a_{11} = a_{11}^{(1)}$ ونحاول جعل عناصر العمود الأول ل $A^{(1)}$ أصفارا عدا العنصر المحوري $a_{11}^{(1)}$ (أي جعل معاملات المجهول x_1 في الأسطر من 2 إلى n أصفارا) وذلك بضرب عناصر سطر العنصر المحوري بعدد ثابت غير معدوم و(أو) جمعه لسطر آخر، أو يمكن أن نطرح من الأسطر من 2 إلى n سطر العنصر المحوري مضروبا بالعدد $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ مع $i = 2,\ldots,n$. نسمي $(A^{(2)}|B^{(2)})$ المصفوفة الناتجة عن هذه العمليات، بحيث

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \quad \text{و} \quad b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1 \quad \text{مع} \quad i, j = 2,\ldots,n$$

والجملة $A^{(2)}X = B^{(2)}$ مكافئة للجملة $AX = B$.

- المرحلة الثانية. نفرض أن $a_{22}^{(2)} \neq 0$ ويسمى العنصر المحوري للمرحلة الثانية. نحافظ على السطرين الأول والثاني للمصفوفة $(A^{(2)}|B^{(2)})$ والعمود الأول ل $A^{(2)}$ ونحاول جعل عناصر العمود الثاني ل $A^{(2)}$

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 266.

(2) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 104.

(*) نقول أن الجملتين $AX = B$ و $A'X = B'$ متكافئتان إذا كان لهما الحل نفسه.

(3) Guillaume Legendre. *Méthodes numériques*. PSL Research University, 2013, p. 46.

تحت العنصر المحوري $a_{22}^{(2)}$ أصفارا (أي جعل معاملات المجهول x_2 في الأسطر من 3 إلى n أصفار) وذلك بضرب عناصر سطر العنصر المحوري $a_{22}^{(2)}$ بعدد ثابت غير معدوم و(أو) جمعه لسطر آخر.[1]

- *نكرر العملية السابقة نفسها مع فرضية $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ مع $k=1,...,n-1$، لنحصل على متتالية منتهية من المصفوفات $A^{(k)}$ ، $2 \leq k \leq n$ ، ذات العبارة*

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & & & & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

وفي المرحلة n، نحصل على الجملة المثلثية العلوية $A^{(n)}X = B^{(n)}$ المكافئة للجملة $AX = B$. تسمى العناصر $a_{kk}^{(k)}$، $k=1,...,n-1$ بالعناصر المحورية التي نفرض أنها غير معدومة في كل مرحلة k.

- *يمكن الانتقال من المرحلة k إلى المرحلة $k+1$ باستعمال العلاقات التالية*

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad \text{و} \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)} \quad \text{مع} \quad i,j = k+1,...,n \quad (2)$$

ملاحظة 10-1. إذا كان العنصر المحوري لمرحلة معينة معدوما أو قيمته صغيرة جدا، فيجب تغيير سطر (أو عمود) العنصر المحوري بأحد الأسطر (أو الأعمدة) التي تليه بحيث يكون العنصر المحوري الجديد غير معدوم.[3]

2-5- طريقة رتبة مصفوفة (Method of Rank of Matrix)

في الطرق الأربع السابقة، تطرقنا إلى حل جمل معادلات خطية $AX = B$ من الدرجة $n \times n$، أي ب n معادلة و n مجهول، لكن يمكن تعميم طريقة غوص لحل جمل معادلات خطية ب m معادلة و n مجهول بحيث $m \neq n$ وذلك بتحديد رتبة المصفوفة A مهما كانت درجتها، بحيث $\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = r$.[4]

وتُحدد رتبة المصفوفة A بعدد أعمدتها المستقلة خطيا أو بعدد أسطرها أو أعمدتها غير المعدومة بعد تحويلات غوص[*]*، بحيث $\text{rank}(A) = r \leq \min(m,n)$ ويعتمد عدد حلول الجملة $AX = B$ على رتبة المصفوفة A كما يلي*

- *إذا كان $r = m < n$، فإن الجملة $AX = B$ لها حل على الأقل.*[5]
- *إذا كان $r = n < m$، فإن الجملة $AX = B$ لها حل وحيد إن كان موجودا.*
- *إذا كان $r = n = m$، فإن الجملة $AX = B$ لها حل وحيد.*
- *إذا كان $r < m$ و $r < n$، فإن طريقة غوص تؤدي إلى $m-r$ أو $n-r$ معادلة من الشكل $0 = 0$ وفي هذه الحالة فإن الجملة $AX = B$ لها مالا نهاية من الحلول وفي حالة العكس فالجملة ليس لها حل.*[6]

---

(1) Guillaume Legendre. Op. Cit, p. 47.
(2) Ibid, p. 47.
(3) Ibid, pp. 48-49.
(4) Ibid, p. 50.
(*) يُقصد ب " تحويلات غوص" مجموعة العمليات التي تقام على المصفوفة لجعلها مثلثية علوية حسب طريقة غوص.
(5) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 9.35, p. 252.
(6) Ibid, p. 253.

3- تمارين

تمرين 10-1. أوجد السعر والكمية التوازنيين للنموذج التالي باستعمال طريقة كرامر.

$$(I)\begin{cases} Q_d + P = 50 \\ Q_s - P = -10 \end{cases}$$

الحل. لدينا في حالة التوازن $Q_d = Q_s = Q$ وعليه، يمكن كتابة النموذج السابق كما يلي

$$(I)\begin{cases} Q + P = 50 \\ Q - P = -10 \end{cases}$$

نكتب الجملة (I) على شكل مصفوفات كالآتي

$$(I) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -10 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة A مربعة، فالجملة (I) لكرامر. نتأكد من وجود حل للجملة (I) باستعمال محدد A، أي

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1.1) - (1.1) = -2 \neq 0$$

ومنه الجملة (I) لها حل وحيد هو $X = (Q, P)^T$، بحيث

$$Q = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ -10 & -1 \end{vmatrix}}{-2}$$

$$= \frac{(-1.50) - (-10.1)}{-2} = 20$$

$$P = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}}{-2}$$

$$= \frac{(-10.1) - (50.1)}{-2} = 30$$

ومنه، كمية وسعر التوازن هما

$$P^* = 30 \quad \text{و} \quad Q^* = 20$$

تمرين 10-2. مدينة تحتوي على خطين للسكة الحديدية. في الخط الأول، القطارات تتكون من مقصورتين للدرجة الأولى وخمس مقصورات للدرجة الثانية وفي الخط الثاني، القطارات تتكون من ثلاث مقصورات للدرجة الأولى وأربع مقصورات للدرجة الثانية.

- باستعمال طريقة مقلوب مصفوفة، أوجد عدد القطارات التي يمكن صنعها في كلا الخطين باستخدام 510 مقصورة للدرجة الأولى و 960 مقصورة للدرجة الثانية.

الحل. المجاهيل هي

x : عدد القطارات في الخط الأول.

y : عدد القطارات في الخط الثاني.

يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلتين التاليتين

$$(J)\begin{cases} 2x + 3y = 510 \\ 5x + 4y = 960 \end{cases}$$

نكتب الجملة (J) على شكل مصفوفات كالآتي

$$(J) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 510 \\ 960 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة A مربعة و $|A| = -7 \neq 0$، فإن A قابلة للقلب والجملة (J) لها حل وحيد هو $X = A^{-1}B$ ، بحيث

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A$$ مع $\operatorname{adj} A = (\operatorname{com} A)^T$ ، بحيث

$$\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|4| & (-1)^{1+2}|5| \\ (-1)^{2+1}|3| & (-1)^{2+2}|2| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{com} A)^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 510 \\ 960 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \end{pmatrix}$$

إذا، يمكن صنع 120 قطارا في الخط الأول و 90 قطارا في الخط الثاني.

تمرين 10-3. مصنع ينتج سلعة معينة بطريقتين مختلفتين، دالة التكاليف الكلية لهذه السلعة هي

باستخدام الطريقة الأولى $TC = 200 + 20Q$

باستخدام الطريقة الثانية $TC = 700 + 10Q$

حيث Q عدد الوحدات المنتجة.

- باستعمال طريقة غوص-جوردان، أوجد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة حتى تتساوى التكاليف الكلية للطريقتين.

الحل. يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلتين التاليتين

$$(K) \begin{cases} TC - 20Q = 200 \\ TC - 10Q = 700 \end{cases}$$

نكتب الجملة (K) على شكل مصفوفات كالآتي

$$(K) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} TC \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 700 \end{pmatrix}$$

حسب طريقة غوص-جوردان، لدينا

$$(A|B) \underline{\text{Gauss - Jordan}} (I_2|C)$$ بحيث $X = C$

لدينا

$$\left(A|B\right)\Leftrightarrow \begin{array}{c} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -20 & 200 \\ 1 & -10 & 700 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} R_1^{(2)}=2R_2^{(1)}-R_1^{(1)} \\ R_2^{(2)}=R_2^{(1)}-R_1^{(1)} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1200 \\ 0 & 10 & 500 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} R_1^{(3)}=R_1^{(2)} \\ R_2^{(3)}=\frac{1}{10}R_2^{(2)} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1200 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

ومنه

$$C=\begin{pmatrix} 1200 \\ 50 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} TC \\ Q \end{pmatrix}$$

إذا، حتى تتساوى التكاليف الكلية للطريقتين، يجب على المصنع إنتاج $Q=50$ وحدة للحصول على تكلفة كلية $TC=1200$ وحدة نقدية.

تمرين 10-4. مصنع للاجبان، يريد إنتاج نوع جديد يتكلف 1840 دج للكيلو غرام وذلك بخلط نوع كلفته 2000 دج للكيلو غرام مع نوع آخر كلفته 1600 دج للكيلو غرام. إذا علمت أن المصنع يريد إنتاج 100 كيلو غراما من النوع الجديد، أوجد عدد الكيلو غرامات من كلا النوعين الواجب خلطها وذلك بطريقة غوص.

الحل. المجاهيل هي

x : عدد الكيلو غرامات من النوع الأول.

y : عدد الكيلو غرامات من النوع الثاني.

يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلتين التاليتين

$$\left(L\right)\begin{cases} x+y=100 \\ 2000x+1600y=1840\left(100\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ 2000x+1600y=184000 \end{cases}$$

نكتب الجملة $\left(L\right)$ على شكل مصفوفات كالآتي

$$\left(L\right)\Leftrightarrow AX=B\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2000 & 1600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100 \\ 184000 \end{pmatrix}$$

لدينا

$$\left(A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right)=\left(A|B\right)=\begin{array}{c} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 2000 & 1600 & 184000 \end{array}\right)$$

نلاحظ أن العنصر المحوري $a_{11}^{(1)}=1$ قيمته صغيرة جدا وعليه نقوم بتبديل السطرين الأول والثاني ومنه العنصر المحوري الجديد هو $a_{11}^{(1)}=2000\neq 0$.

$$\left(A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right)=\begin{array}{c} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 2000 & 1600 & 184000 \\ 1 & 1 & 100 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} R_1^{(2)}=R_1^{(1)} \\ R_2^{(2)}=R_1^{(1)}-2000R_2^{(1)} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 2000 & 1600 & 184000 \\ 0 & -400 & -16000 \end{array}\right)=\left(A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{22}^{(2)}=-400\neq 0$.

الجملة $A^{(2)}X=B^{(2)}$ مكافئة للجملة $AX=B$ ، بحيث

$$A^{(2)}X=B^{(2)}\Leftrightarrow \begin{cases} 2000x+1600y=184000 \\ -400y=-16000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=60 \\ y=40 \end{cases}$$

إذا، على المصنع خلط 60 كيلو غراما من النوع الأول و40 كيلو غراما من النوع الثاني للحصول على 100 كيلو غرام من النوع الجديد.

تمرين 10-5. مصنع لإنتاج الأثاث، ينتج ثلاثة أنواع من المكاتب ويستخدم المزيج السلعي. تكلفة كل نوع من الخشب كانت على التوالي 125، 70 و 190 وحدة نقدية. إضافة إلى تكلفة الخشب، نجد أن النوع الأول يحتاج إلى 10% من إجمالي تكلفة النوع الثاني و 20% من إجمالي تكلفة النوع الثالث، النوع الثاني يحتاج إلى 25% من إجمالي تكلفة النوع الأول و 10% من إجمالي تكلفة النوع الثالث، أما النوع الثالث فيحتاج إلى 40% من إجمالي تكلفة النوع الأول و 20% من إجمالي تكلفة النوع الثاني.

- باستعمال طريقة رتبة مصفوفة، أحسب التكلفة الكلية لإنتاج 30 وحدة من النوع الأول، 20 وحدة من النوع الثاني و 10 وحدات من النوع الثالث.

الحل. المجاهيل هي

x : التكلفة الإجمالية لإنتاج وحدة واحدة من النوع الأول.

y : التكلفة الإجمالية لإنتاج وحدة واحدة من النوع الثاني.

z : التكلفة الإجمالية لإنتاج وحدة واحدة من النوع الثالث.

يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلات التالية

$$(M)\begin{cases} x=125+0.1y+0.2z \\ y=70+0.25x+0.1z \\ z=190+0.4x+0.2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x-3y-6z=3750 \\ -5x+20y-2z=1400 \\ -4x-2y+10z=1900 \end{cases}$$

نكتب الجملة (M) على شكل مصفوفات كالآتي

$$(M) \Leftrightarrow AX=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 30 & -3 & -6 \\ -5 & 20 & -2 \\ -4 & -2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3750 \\ 1400 \\ 1900 \end{pmatrix}$$

لإيجاد رتبة الجملة (M) ، نطبق طريقة غوص على المصفوفة $(A|B)$ كما يلي

$$\left(A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right)=(A|B)=\begin{matrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \\ R_3^{(1)} \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & -3 & -6 & 3750 \\ -5 & 20 & -2 & 1400 \\ -4 & -2 & 10 & 1900 \end{array}\right)$$

العنصر المحوري $a_{11}^{(1)}=30\neq 0$ وعليه

$$\begin{matrix} R_1^{(2)}=R_1^{(1)} \\ R_2^{(2)}=R_1^{(1)}+6R_2^{(1)} \\ R_3^{(2)}=2R_1^{(1)}+15R_3^{(1)} \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & -3 & -6 & 3750 \\ 0 & 117 & -18 & 12150 \\ 0 & -36 & 138 & 36000 \end{array}\right)=\left(A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{22}^{(2)}=117\neq 0$ وعليه

$$\begin{matrix} R_1^{(3)}=R_1^{(2)} \\ R_2^{(3)}=R_2^{(2)} \\ R_3^{(3)}=4R_2^{(2)}+13R_3^{(2)} \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & -3 & -6 & 3750 \\ 0 & 117 & -18 & 12150 \\ 0 & 0 & 1722 & 516600 \end{array}\right)=\left(A^{(3)}\middle|B^{(3)}\right)$$

العنصر المحوري $a_{33}^{(3)}=1722$.

بما أن عدد أسطر A غير المعدومة بعد تحويلات غوص هو 3، فإن $\operatorname{rank}(A)=r=m=n=3$ ، فإن للجملة

(M) حل وحيد.

الجملة $A^{(3)}X = B^{(3)}$ مكافئة للجملة $AX = B$، بحيث

$$A^{(3)}X = B^{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 3y - 6z = 3750 \\ 117y - 18z = 12150 \\ 1722z = 516600 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 150 \\ z = 300 \end{cases}$$

ومنه

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 30(200) \\ 20(150) \\ 10(300) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 3000 \\ 3000 \end{pmatrix} \right\}$$

إذا، التكلفة الكلية لإنتاج 30 وحدة من النوع الأول هي 6000 وحدة نقدية ولإنتاج 20 وحدة من النوع الثاني هي 3000 وحدة نقدية ولإنتاج 10 وحدات من النوع الثالث هي 3000 وحدة نقدية.

تمرين 10-6. مصنع القمصان بسعيدة، ينتج نوعين من الألبسة الجاهزة واحد للرجال وآخر للأطفال ويستخدم لذلك مواد أولية وساعات عمل. متطلبات إنتاج الوحدة الواحدة من النوعين وكذا المتاح من المواد الأولية وساعات العمل موضح في الجدول التالي.

الطاقة المتاحة (وحدة)	أطفال	رجال	النوع / الاحتياجات
200	4	3	مواد أولية (وحدة)
170	2	5	ساعات عمل (وحدة)

- إذا علمت أن سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية هو 3 وحدات نقدية وسعر الوحدة الواحدة من ساعات العمل هو 7 وحدات نقدية وأن المصنع يهدف إلى تحقيق ربح بنسبة 20% من التكلفة.
- استخدم طريقة مقلوب مصفوفة لإيجاد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كلا النوعين، تكلفة الوحدة الواحدة من كل نوع وكذا الربح الكلي للمصنع.

الحل. المجاهيل هي

x : عدد الوحدات الواجب إنتاجها من القمصان للرجال.

y : عدد الوحدات الواجب إنتاجها من القمصان للأطفال.

يمكن صياغة معطيات التمرين في جملة المعادلتين التاليتين

$$(N)\begin{cases} 3x + 4y = 200 \\ 5x + 2y = 170 \end{cases}$$

نكتب الجملة (N) على شكل مصفوفات كالآتي

$$(N) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 170 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة A مربعة و $|A|=-14\neq 0$، فإن A قابلة للقلب والجملة (N) لها حل وحيد هو $X=A^{-1}B$، بحيث

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\text{adj}A \text{ مع } \text{adj}A=(\text{com}A)^T \text{، بحيث}$$

$$\text{com}A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}|2| & (-1)^{1+2}|5| \\ (-1)^{2+1}|4| & (-1)^{2+2}|3|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5 \\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\text{adj}A=(\text{com}A)^T=\begin{pmatrix}2 & -4 \\ -5 & 3\end{pmatrix}$$

وعليه

$$A^{-1}=\frac{1}{-14}\begin{pmatrix}2 & -4 \\ -5 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2 & 4 \\ 5 & -3\end{pmatrix}$$

ومنه

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2 & 4 \\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200 \\ 170\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 \\ 35\end{pmatrix}$$

إذا، على المصنع إنتاج 20 وحدة من قمصان الرجال و 35 وحدة من قمصان الأطفال.

- تكلفة الوحدة الواحدة من النوع الأول (رجال)= $3(3)+5(7)=44$ وحدة نقدية.
- تكلفة الوحدة الواحدة من النوع الثاني (أطفال)= $4(3)+2(7)=26$ وحدة نقدية.
- ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول (رجال)= $0.2(44)=8.8$ وحدة نقدية.
- ربح الوحدة الواحدة من النوع الثاني (أطفال)= $0.2(26)=5.2$ وحدة نقدية.
- الربح الكلي للمصنع= ربح الوحدة الواحدة ×عدد الوحدات

$= 8.8(20)+5.2(35)=358$ وحدة نقدية.

تمرين 10-7. أوجد السعر والكمية التوازنيين للنموذج التالي باستعمال طريقة كرامر.

$$(R)\begin{cases}Q_{d_1}+P_1-P_2=3 \\ Q_{s_1}-P_1=-12 \\ Q_{d_2}-P_1+P_2=15 \\ Q_{s_2}-P_1=-10\end{cases}$$

الحل. لدينا في حالة التوازن $Q_{d_1}=Q_{s_1}=Q_1$ و $Q_{d_2}=Q_{s_2}=Q_2$ وعليه، يمكن كتابة النموذج السابق كما يلي

$$(R)\begin{cases}Q_1+P_1-P_2=3 \\ Q_1-P_1=-12 \\ Q_2-P_1+P_2=15 \\ Q_2-P_1=-10\end{cases}$$

نكتب الجملة (R) على شكل مصفوفات كالآتي

$$(R) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة A مربعة، فالجملة (R) لكرامر. نتأكد من وجود حل للجملة (R) باستعمال محدد A، أي، باستعمال العمود الأول ل A، نجد

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}.1\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}.0\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \neq 0$$

ومنه الجملة (R) لها حل وحيد هو $X = (Q_1, Q_2, P_1, P_2)^T$، بحيث

$$Q_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -12 & 0 & -1 & 0 \\ 15 & 1 & -1 & 1 \\ -10 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left[(-1)^{1+2}.0\begin{vmatrix} -12 & -1 & 0 \\ 15 & -1 & 1 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.0\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 15 & -1 & 1 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.1\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -12 & -1 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2}.1\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -12 & -1 & 0 \\ 15 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$
$$= 8$$

$$Q_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -12 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left[(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} -12 & -1 & 0 \\ 15 & -1 & 1 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}.1\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 15 & -1 & 1 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -12 & -1 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}.0\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -12 & -1 & 0 \\ 15 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$
$$= 10$$

$$P_1 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \end{vmatrix}}{-2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left[(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} 0 & -12 & 0 \\ 1 & 15 & 1 \\ 1 & -10 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}.1\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 15 & 1 \\ 1 & -10 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -12 & 0 \\ 1 & -10 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}.0\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -12 & 0 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix}\right]$$
$$= 20$$

$$P_2=\frac{|A_4|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&0&1&3\\1&0&-1&-12\\0&1&-1&15\\0&1&-1&-10\end{vmatrix}}{-2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix}0&-1&-12\\1&-1&15\\1&-1&-10\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}.1\begin{vmatrix}0&1&3\\1&-1&15\\1&-1&-10\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}.0\begin{vmatrix}0&1&3\\0&-1&-12\\1&-1&-10\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}.0\begin{vmatrix}0&1&3\\0&-1&-12\\1&-1&15\end{vmatrix}\right]$$

$$=25$$

ومنه، كميات وأسعار التوازن هي

$Q_1^*=8 \quad P_1^*=20$ و $Q_2^*=10 \quad P_2^*=25$

قائمة

المراجع

I) بالعربية

1- غوثي بوكلي حسن. *الوجيز في الرياضيات. ط 2.* ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004.
2- فتحي خليل حمدان. *الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية. ط 4.* دار وائل للنشر، عمان- الأردن، 2014.
3- سلطان محمد عبد الحميد. *رياضيات الأعمال للتجاريين.* المكتبة العصرية، مصر، 2007.
4- عقيل جاسم عبد الله، إبراهيم غبريال. *مقدمة في الاقتصاد الرياضي. ط 2.* دار مجدلاوي للنشر، عمان- الأردن، 1999.
5- جاكلين فوراستييه. *الرياضيات التطبيقية على الاقتصاد*، ترجمة د. محمد الحجار. الكتاب للنشر والتوزيع، مصر، 1989.
6- عمر صخري. *مبادئ الاقتصاد الرياضي.* ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1984.
7- ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. *الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية. ط 2.* دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2010.

II) بالأجنبية

1- Yadolah Dodge. *Mathématiques de base pour économistes.* Springer, Paris, 2007.
2- Edward T Dowling. *Introduction to mathematical economics. 3rd E.* The McGraw-Hill Companies, New York, 2001.
3- Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. *Mathématiques pour l'économie. Analyse-Algèbre. 5e É.* Dunod, Paris, 2015.
4- The Institute of Cost Accountants of India. *Paper 4: Fundamentals of business mathematics and statistics (FMS). 2nd E.* Repro India Limited, India, 2014.
5- Guillaume Legendre. *Méthodes numériques.* PSL Research University, 2013.
6- Stéphane Rossignol. *Mathématiques en économie- gestion.* Dunod, Paris, 2015.
7- S. M. Shahidul Islam. *Business mathematics*. Abir Publications, Dhaka, 2004.
8- Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. *Essential mathematics for economics analysis. 4th E.* Pearson Education Limited, London, 2012.
9- Viatcheslav Vinogradov. *A Cook-book of mathematics.* CERGE-EI Lecture Notes, Prague, 1999.