الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الدكتور مولاي الطاهر سعيدة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

مطبوعة دروس في مادة

الرياضيات المالية

وجه لطلبة السنة الثانية ليسانس (ل.م.د)

علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير

اعداد : د .عتيق خديجة

السنة الجامعية: 2022-2023

فهرس المحتويات

مقدمة

يحتل موضوع الرياضيات المالية مكانة هامة في الاقتصاديات المالية والمصرفية ، لما لها من دور فعال في تسوية المعاملات المالية والمصرفية وأعمال المصارف وحساب الفوائد والخصوم وتكافؤ رؤوس الأموال، وفي تنظيم أطراف العملية المالية الدائن والمدين، وفي البورصات وما إلى ذلك من قضايا المال والأعمال.

وبصفة عامة تحتوي الرياضيات المالية على مجالين هامين وهما العمليات المالية في الأجل القصير، والعمليات المالية في الأجل الطويل، وقد جاءت المعلومات الواردة في هدا المساق في الرياضيات المالية ، مبسطة ومتدرجة ضمن إطار نظري وتطبيقي في آن واحد، كما شمل على مجموعة من التمارين للمراجعة عسى أن تفيد مستعمل هدا المرجع في فهم واستيعاب أفضل لمادته واختبار قدراته المكتسبة، لتعلم أصول الرياضيات المالية، وعليه كان الهدف من هذا المساق هو تقديم عرض رياضي لأهم المواضيع التي تهم رجال الأعمال و المال عند القيام بعملياتهم التجارية والمالية وعليه فالمطبوعة تحتوي على المحاور الأساسية التالية:

المحور الاول : الفائدة البسيطة

المحور الثاني :الخصم

المحور الثالث:التكافؤ

المحور الرابع:الفائدة المركبة

المحور الخامس:الدفعات (السداد،الاستمار)

المحور السادس: تمارين مقترحة مع الحلول

المحور الاول : الفائدة البسيطة

1.1. الفائدة:

هي عبارة عن مبلغ نقدي مستحق لصالح المقرض على عاتق المقترض لقاء قرض مبلغ من المال لفترة زمنية معلومة،ويمكن تعريف الفائدة على انها أجر الحصول على قرض نقدي. أي انها الثمن المدفوع من قبل المقترض للمقرض نظير الخدمة التي يقدمها له هذا الأخير مقابل توفير مبلغ من المال لفترة من الزمن .

اذن ثلاثة عوامل رئيسية تحدد مبلغ الفائدة:

- المبلغ الممنوح،
- مدة القرض،
- ومعدل فائدة القرض.

قدمت عدة أسباب لتبرير وجود واستخدام هذه الفائدة نذكر من بينها ما يلي :

-**الحرمان من الاستهلاك :** عندما يمنح الشخص (المقرض) مبلغا من المال لآخر (المقترض)، فهو يحرم نفسه من الاستهلاك الفوري للسلع. ولذلك فمن الطبيعي أن يتلقى في مقابلا من المقترض للتعويض عن هذا الحرمان المؤقت للاستهلاك .

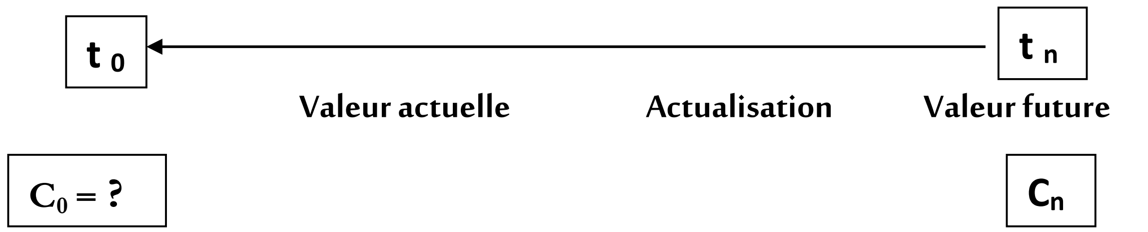
- **عنصر الخطر:** الشخص الذي يقرض المال، هو يمنح مدة من الوقت للمقترض لمقترض قبل سداد الدين. طوال هذه المدة الزمنية يكون المقرض معرضا لخطر معلق ينشأ هذا الخطر على الأقل مما يلي:

- افلاس المقترض: إذا كان المقترض غير قادر على سداد ديونه مع وصول تاريخ الاستحقاق، هذاالامر يعرض المقرض لخطر فقدان الأموال التي منحها.إذا فمن الطبيعي أن يتطلب تعويضا لتغطيةالمخاطر التي يمكن ان يتعرض لها أهمية هذا التعويض مرتبطة باحتمال التخلف عن السداد .
- التضخم: بين تاريخ منح القرض وتاريخ سداده،قيمة القرض يمكن ان تنخفض بسبب انخفاض قيمة العملة المعروف أيضا تحت اسم التضخم. لذا يمكن للمقرض ان يطلب تعويضا عن ذلك.

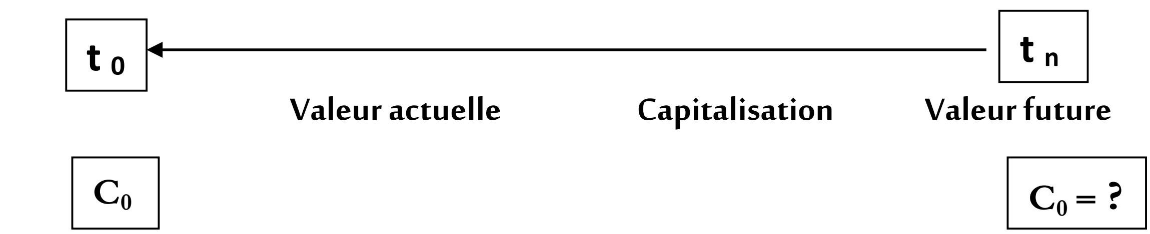
3.1. مفاهيم: التحديث والرسملة

وفقا لما سبق، يظهر ان معدل الفائدة هومعدل تحويل المال عبر الزمن. هذه العلاقة بين الوقت ومعدل الفائدة تعني أن مبالغين من المال لا يتكفاءان الا إذا تساوت قيمتهما في نفس التاريخ. لذلك، للمقارنة بين مبلغين او مجموعة من المبالغ متاحة في تواريخ مختلفة يجب استخدام تقنيات حسابية محددة (الرسملة والتحديث.)

التحديث :التحديث هو التقنية التي تعتمد على العودة بالقيمة المبلغ في المستقبل الى لحظة قبلية معينة تحسب فيها قيمته. هذه الاخيرة تسمى القيمة الحالية. ولذلك، فإن القيمة C_0 لمبلغ من المال متاح في اللحظة t_0 هي القيمة الحالية لمبلغ C_n متاح بعد مدة في اللحظة t_n.



الرسملة: خلافا للتحديث، الرسملة تهدف لحساب قيمة المبلغ الحالي في لحظة مستقبلية يعرف القيمة المكتسبة. ولذلك، فإن قيمة المبلغ المستقبلية هي C_n لمبلغ حاليC_0 مودع بمعدل t بعد عام كما هو مبين في الشكل التالي :



2. الفائدة البسيطة:

1.2. تعريف الفائدة البسيطة:

يمكن تعريف الفائدة البسيطة بانها العائد الذي ينتج من استثمار اموال خلال مدة زمنية بمعدل متفق عليه. فاذا اقترض شخص مبلغا من المال لمدة محددة وبمعدل متفق عليه فانه يدفع للمقرض عند تسديد الدين المبلغ الذي اقترضه بالإضافة الى الفائدة المستحقة عليه من اقتراض المبلغ .

يتميز حساب الفائدة البسيطة بمجموعة من العناصر

- حساب الفائدة يتم دائما على اساس المبلغ المقترض.
- لا يتم اضافة الفائدة للراس المال الاصلي بمعنى اخر ان الفائدة لا تنتج فائدة.
- فائدة بسيطة تتناسب مع المبلغ الأصلي.
- يتم دفعها مرة واحدة في بداية العملية، وهذا يعني عند تقديم القرض، أو نهاية العملية أي عند تاريخ الاستحقاق.

نعتبر مبلغا C_0 مودعا في اللحظة t_0 . يتم تسديده يسدد في اللحظة t_n المبلغ المسدد هو المبلغ المكتسب هوC_n .

C_0 و C_n يحملان عدة تسميات أهمها :

- ✓ المبلغ المستثمر او المودع
- ✓ المبلغ المسترجع
- ✓ المبلغ المقترض
- ✓ المبلغ المسدد
- ✓ المبلغ الاصلي او الاولي
- ✓ المبلغ النهائي
- ✓ المبلغ الحالي
- ✓ المبلغ المكتسب

2.2. الفائدة البسيطة:

نعتبر t هو معدل ايداع المبلغ على فتراتn ، الفائدة المكتسبة في نهاية المدة هي I. المبلغ المكتسب في نهاية المدة هو Cn .

$I = C \times t \times n/100$

T: معدل الفائدة

I : متناسب مع **n** عدد فترات الايداع

C0 : قيمة المبلغ الاصلي

ملاحظة : يجب التعبير عن n و t بوحدات متجانسة. على سبيل المثال يعبر عن الفترات n بالسنة يكون المعدل t سنوي.إذا كانn بالأشهر يكونالمعدلt شهري.

مثال: مبلغC قيمته 100000 دج اودع بمعدل t=4٪ ، ومقدار الفائدة المحصل عليها في نهاية العام هو:

$I = 100\,000 * 0.04 * 1 = 4\,000$

3.2. عناصر الفائدة البسيطة

القيمة الأولية C_0:

هو رأس المال او المبلغ المودع او المقترض او المستثمر او املال أو أي مبلغ أخر تقع عليه عملية التحويل من الشخص الاولالى الشخصالثاني، وقد يطلق عليه المبلغ الاصلي.

معدل الفائدةt:

معدل الفائدة هو تكلفة اقراض الاموال او العائد من اقراض الاموال. يعبر عنه بنسبة الفائدة والذي يفرض من قبل المقرض على المقترض مقابل استخدام الأصول.

المدة n:

-**مدة الفائدة:** هي المدة أو الفترة الفاصلة بين تاريخين، سواء بين تاريخ اقتراض المبلغ وتاريخ سداده أو بين تاريخ إيداع مبلغ في البنك وتاريخ سحبه، وسنرمز لها بالرمز .n قد تكون مدة االقتراض أو السداد .

1-سنة: في هذه الحالة فإن المدة:

$$n = 1$$

2 -**أشهر:** أي الفترة الفاصلة بين تاريخين اإليداع والسحب مثال أشهر، هنا المدة تحسب باألشهر :

$$\boxed{\frac{\text{عدد الأشهر}}{12}}$$

3- **أيام:** في هذه الحالة، فإن الفائدة البسيطة تحسب على أساس :

تجاري: وهو المطبق في المؤسسات المالية، تسمى الفائدة هنا فائدة تجارية، يرمز لها بالرمز IC ،والمدة :

$$\boxed{\frac{\text{عدد الأيام}}{360}}$$

صحيح أو حقيقي: أي حسب عدد أيام السنة الحقيقية، تسمى الفائدة هنا فائدة صحيحة، يرمز لها بالرمز IR،والمدة:

$$\boxed{\frac{\text{عدد الأيام}}{366/365}}$$

حيث يتم قسمة عدد األيام على 365 أو 366 حسب السنة :

فإذا كانت السنة بسيطة فإن :

$$\boxed{\frac{\text{عدد الأيام}}{365}}$$

فإذا كانت السنةكبيسة فإن :

$$\boxed{\frac{\text{عدد الأيام}}{366}}$$

ملاحظة:

1. لمعرفة السنة ما إذا كانت بسيطة أو كبيسة يتم قسمتها على العدد 4 ،فإذا كان الناتج عدد صحيح أي السنة تقبل القسمة على 4 فإن عدد أيام شهر فيفري هو 29 يوم، والسنة سنة كبيسة، أما إذا كان الناتج عدد غير صحيح فإن عدد أيام شهر فيفري هو 28 يوم، والسنة سنة بسيطة.
2. تحسب الفائدة عادة على أساس تجاري إلا إذا نص التمرين على خالف ذلك.
3. تحسب عدد الأيام في حالة المدة بالأيام كما يلي:

- تحسب عدد أيام الشهر الحقيقية بمعنى كل شهر يحسب بعدد أيامه الحقيقية، أي 31 يوم لشهر جانفي، مارس، ماي، جويلية، أوت، أكتوبر، ديسمبر، و 30 يوم لشهر أفريل، جوان، سبتمبر، نوفمبر، أما شهر فيفري فحسب 28 أو 29 يوم حسب السنة كبيسة أو بسيطة.
- لا يحسب اليوم الأول(يوم الاقتراض أو الإيداع) ولكن يحسب اليوم الأخير(يوم السداد أو السحب)، أو العكس أي يحسب اليوم الأول ولا يحسب اليوم الأخير، وسنركز هنا على الحل بالطريقة الأولى أي لا نحسب اليوم الأول ونحسب اليوم الأخير.

<u>مثال</u>:

بتاريخ 1989/01/03 وظف شخص مبلغ 5000 دج في البنك بمعدل فائدة بسيطة 10 %.

- أحسب الفائدة التي تحصل عليها هذا الشخص عند سحبه المبلغ من البنك بتاريخ 1989/08/15.

الحل :

c= 5000 دج

t=10 %

n= ?

عدد الأيام هو :

جانفي = 31-3=28 أي 5 أيام

فيفري= 28 يوم (السنة بسيطة)

مارس= 31 يوم

أفريل= 30 يوم

ماي= 31 يوم

جوان= 30 يوم

جويلية= 31 يوم

أوت= 15 يوم

مجموع الأيام= 224 يوم

حساب الفائدة البسيطة:

$$I = C * t * n$$

$I = 5000 * 0.1 * 224 / 360 =$ **311.11 DA**

في المثال السابق لم يتم تحيد ما إذا كانت الفائدة تجارية أو صحيحة لذا نعتبرها تجارية ونقسم المدة على 360 يوم .

مثال2 :

أحسب الفوائد المترتبة عن توظيف مبلغ 10000دج بمعدل فائدة بسيطة 4 % لمدة :

من 05 مارس إلى 18 ماي .

من 15 نوفمبر إلى 20 ديسمبر.

الحل :

C= 10000دج

%4 =t

عدد الأيام =؟

الأيام من شهر مارس = 31-05 = 26 يوم

حساب الفائدة عن المدة المحصورة بين 05 مارس 18 ماي.

عدد الأيام شهر مارس26 يوم

شهر أفريل = 30 يوم

شهر ماي = 18 يوم

المجموع = 74 يوم

$I = C * t * n$

$I = 10000 * 0.04 * 74 /360 =$ **82.22 DA**

القيمة المكتسبة:

تعني القيمة المكتسبة Cn مجموع رأس المال الأولي(C0) والفوائدا المحصل عليها في نهايةفترات الاستثمار n:

$$Cn= C0 (1 + t×n/100)$$

مثال:

اودعت100 دج بفائدة بسيطة لمدةقدرها 47 يوما(365 يوما في السنة) بمعدل3.5٪ مجموع المبلغ على الحساب البنكي بعد هو:

$$Cn =100 × (1 + 3,5\% × 47/365) = 100,45 \text{ D}$$

القاسم الثابت: القاسم الثابت مرتبط بالمعدلt

$$I = C×n× (36000/t) =C×n/D$$

4.2.الفائدة القبلية والفائدة البعدية والمعدل الفعلي

1.4.2. الفائدة القبلية والفائدة البعدية : توجد صيغتين لتحصيل الفائدة :

- **الفائدة البعدية**

– في هذه الحالة الفائدة تحسب آخرالمدة (أو المتأخرة)

– المقترض لديه قرضC0 ويسددهCn نهاية المدة.

– تكتب القيمة المكتسبة على الشكل التالي :

$$Cn=C0\ (1+t\times n/100)$$

أما بالنسبة للقيمة الحالية فتكتب كالتالي :

$$C0=Cn/\ (1+t\times n/100)$$

مثال:

أ- يودع السيد X2500 دج بنسبة5٪ لمدة9 اشهر.

القيمة المكتسبة من الصفقة عند الاستحقاق هي :

$$2500(1+5\times 9/1200)=2593{,}75D$$

$$5600/\ (1+7\times 11/1200)=5262{,}33D$$

ب- المبلغ الذي يمكن أن يقترض الآن بنسبة 7٪ إذا كانت قيمة تسديده5600دج بعد أحد عشر شهرا

هي القيمة الحالية ل 5600 دج:

$$5600/\ (1+7\times 11/1200)=5262{,}33D$$

الفائدة القبلية: هي الفائدة المدفوعة مسبقا كما في حالة الاجيو وعمولات الخصم. اذ يتم حسابها وتحصيلها عند تسليم الأصل.

تكتب القيمة الحالية :

$$C0 = Cn\ (1-\ t^{*}\times n/100)$$

وتكتب القيمة المكتسبة

$$Cn= C0/\ (1-\ t^{*}\ \times n/100)$$

مثال:

الى غايةN.18.03 ، ابتداء ٪6 دجتم اقراضه بمعدل فائدة قبلي 100000 نعتبر مبلغ قيمته 25.11 .N.

يوما 252= n

قيمة الفائدة :

$$I=100\ 000\times 6\times 252/36000= 4200\ D$$

القيمة الحالية للقرض هي :

100 000 - 4200= 95800 D

2.4.2 .معدل الفائدة الفعلي: يتم دفع الفائدة البسيطة مقدما أو في تاريخ استحقاق رأس المال.

هاتين الصيغتين متعادلتين من الناحية المالية. المتفق عليه يسمى معدل الفائدة الفعلي، معدل الفائدة البسيطة مع دفع الفائدة عند تسديد القرض.

معدل الفائدة الفعلي (ينظر إليه كعملية بفائدة بعدية)لعملية فائدة قبلية أعلى من معدل الفائدة المعلن .

$$t = t^* / (1- n\times t^*/100)$$

البرهان :

لدينا:

$$Cn – C0 = C0\times t\times n/100$$

و: $Cn – C0 = Cn \times t^*\times n/100$

نستنتج :

$$Cn \times t^*\times n/100 = C0\times t\times n/100 = Cn (1- t^*\times n/100) t\times n/100$$

وبالتالي :

$$t = t^* /(1 – t^*n/100)$$

مثال:

شخص يودع مبلغ30000 دينار لمدة ستة أشهر بنسبة10٪.

ما هو المعدل الفعلي لهذا الاستثمار؟

$$t = t^* /(1 – t^*n/1200) = 10/(1- 10.6/1200) = 10,526\%$$

5.2. المعدلات النسبية:

يعتبر معدلين انهما متناسبين اذا انتجا نفس القيمة المكتسبة من نفس رأس المال الأولي في نهاية فترة الاستثمار بفائدة بسيطة .

نقول انt و tpمتناسبين اذا مثلا نفس نظام الفائدة البسيطة بوحدات زمنية مختلفة(على سبيل المثال،

t /12 هو معدل شهري يتناسب مع المعدل السنوي t).

نعتبر المعاملات المالية التالية:

1. يتم ايداع C0 لمدة1سنة بمعدل فائدة سنوية t1. بعد1 سنة، القيمة المكتسبة هي:

C0(1+ t1).

2. يتم ايداع المبلغ C0 لمدة12 شهرا بمعدل فائدة شهرية t12.

بعد1 سنة، القيمة المكتسبة هي:

$C0\ (1 + 12 \times t12)$

القيمتان تتساويان اذا :

$1 + 12 \times t12 = 1 + t1$

نستنج ان المعدل السنوي المتناسبt1 مع المعدل الشهريt12 يساوي $12 \times t12$.

بصفة عامة المعدل السنوي (نضعt) المتناسب مع معدلtp ب 1/m فترة من السنة يساويpm×t.

$1 + p \times t\ p = 1 + t$

معدل الأكثر شيوعا:

المعدل السداسي t =2/1

المعدل الفصلي t=1/4

المعدل الشهري t= 1/12

المعدل اليومي t=1/360

مثال :

المعدل السنوي هو5.07%

نحسب المعدل الشهري النسبي.

نحسب عدد الفترات n في السنة n = 12

المعدل الشهري يساوي اذن :

$t12 = 0,0507/12 = 0,004225 =$ **0,4225%.**

اذا اودعنا 273 دج لمدة 7 اشهر بفائدة بسيطة بمعدل سنوي 5,07%

- ما هو المبلغ الذي بجب تسديده ؟

$C_7 = 273 \times (1+0,004225\times 7) = 281,07D.$

6.2. متوسط معدل الايداع

تتم ثلاثة الاستثمارات من قبل الشخص نفسه ضمن الشروط التالية:

المدة	المعدل	المبلغ
n_1	t_1	C_1
n_2	t_2	C_2
n_3	t_3	C_3

المعدل المتوسط لاليداع T هو المعدل الوحيد الذي بطبق على المبالغ بترتيب و في المدد بالترتيب والذي ينتج نفس الفائدة الإجمالية.

$$c_1 x t_1 x n_1/36000 + c_2 x t_2 x n_2/36000 + c_3 x t_3 x n_3/36000 = c_1 x t x n_1/36000 + c_2 x t x n_2/36000 + c_3 x t x n_3/36000.$$

ادن : $T = \sum c_1 x t_1 x n_1 / \sum c_1 x n_1$

مثال:

1) تحديد المعدل المتوسط للاستثمارات التالية :

C1=1000D،n1=20،يوما٪t1=10

C2=2000D،n2=25،يوما٪t2=9

C3 = 3000D، n3 = 30 يوما، t3 = 8٪

C4 = 4000D، n4 = 35 يوما، t4 = 7٪

$T = \sum C_i t_i n_i / \sum C_i n_i$ = 2 350 000/300 000 = 7,83%.

2)إذا تم ايداع مبلغ9000دج لمدة 3أشهر بمعدل9٪ سنويا و 12000دج لمدة6 أشهر بمعدل 11٪ سنويا، ما هومعدل الايداع المتوسط؟

T = 10.45٪

7.2.الفائدة الاجمالية لمجموعة من المبالغ :

الفائدة الاجمالية لمجموعة من المبالغ مودعة بنفس المعدل تعطى بالعبارة التالية:

I global = Ci*ni /D

D : هو القاسم الثابت.

المحور الثاني: الخصم

1 . تعريف الخصم

مبلغ يقتطع من القيمة الاسمية للورقة تجارية قابلة للتداول، سواء تعلق الامر بالكمبيالة او سند الامر.

هنا نوعان رئيسيان من الاوراق التجارية :

- **الكمبيالة**

هي عبارة عن ورقة تجارية تتحرر وفق شكل معين يحتوي على بيانات أوجدها القانون وتتضمن أمر شخص يسمى الساحب إلى شخص يسمى المسحوب عليه، بدفع مبلغ معين من النقود لشخص ثالث هو المستفيد :

- الساحب يصدر الأمر بدفع المبالغ المحررة بالورقة من مدينه ، المسحوبة عليه .
- المستفيد (الحامل) وهو الشخص الذي صدرت الورقة لصالحه .

- **السند لأمر**

هو عبارة عن ورقة يتعهد فيها محررها بأن يدفع مقابلها مبلغا معينا في تاريخ معين لإذن شخص آخر يسمى المستفيد . ويبين في السند تاريخ تحريره والمبلغ الواجب دفعه وإسم من تحرر تحت إذنه ،

والميعاد الواجب الدفع فيه ، وإمضاء محرره . أما السند لحامله فيشمل كافة البيانات السابقة والمستفيد وإعطاء إسم من يدفع إليه المبلغ ، وتنتقل فيه الملكية بدون كتابة التحويل.يتاح لصاحب الورقة التجارية خياران:

- يستطيع الاحتفاظ بالورقة التجارية الى غاية يوم الاستحقاق ثم يقدمها للمؤسسة المصرفية بمقابل مالي. في هذه الحالة تكون الورقة التجارية اداة بسيطة للتحصيل.

- كما يمكنه خصم الورقة التجارية. إذا كانت قبلت المؤسسة المصرفية فإنها تدفع للمستفيد قيمة الورقة ناقصة من الفوائد والعمولات التي تشكل تعويضا للمؤسسة المصرفية. الخصم لا يشمل نقل مخاطر عدم السداد من المسحوبة عليه ، لأنه في حالة عدم الدفع، تقوم المؤسسة المصرفية بدفع المبلغ.

- الخصم هو عادة عملية بفائدة قبلية ، لأنه في مقابل الورقة المؤسسة المصرفية تدفع فورا المبلغ أي ، القيمة الاسمية للورقة ناقصة من الفوائد والعمولات .

مثال:

تم الدفع ل X فاتورة عن طريق ورقة تجارية بقيمة7500 دج تاريخ استحقاقها هو31 جانفي 2002. احتاجX إلى المال، وشرع في التفاوض مع مصرفه في27 نوفمبر2001. أعطاه المصرف 7500 دج منقوصة من فائدة الفترة الممتدة بين27 نوفمبر و 31جانفي بمعدل12.5٪.

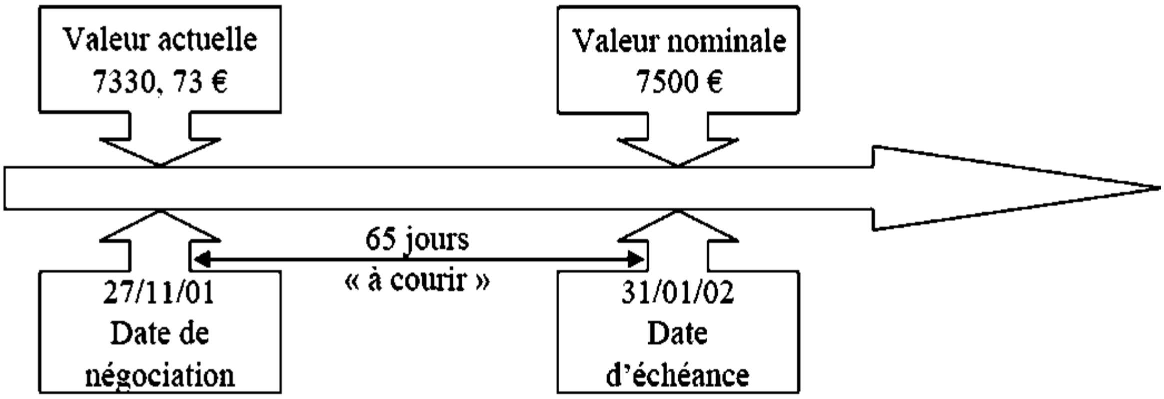
يوجد65 يوما من27 نوفمبر إلى31جانفي (لا يتم احتساب اليوم الأول).

نسمي الخصم E لفائدة التي يحتفظ بها البنك :

$$E = 7500 \times 12.5 \times 65/36000 = 169.27\ D$$

- 7500€هي القيمة الاسمية للورقة.
- 31 جانفي2002 هو تاريخ الاستحقاق؛
- 27 نوفمبر2001 هو تاريخ التفاوض؛
- 7330.73 أي(7500 D–169,27 D)هي القيمة الحالية للورقة .

لتمثيل الوضع في نقدم الرسم البياني التالي:



وفقا لمبدأ حساب الخصم يمكن لهذا الأخير ان يكون تجاريا أو صحيحا .

2 . الخصم التجاري والقيمة التجارية :

الخصم التجاري هو فائدة القيمة الاسمية للورقة، محسوب بمعدل الخصم اعتمادا على المدة بين يوم لاتفاوض (تسليم الورقة للبنك) و اليوم الاستحقاق.

نعتبر Vالقيمة الاسمية للورقة المخصومة.

T : معدل الخصم

N: المدة بالأيام (باستثناء يوم التفاوض)

Ec: مقدار الخصم .

$$Ec = V \times t \times n / 36000$$

هذا التعبير يمكن تبسيطه بقسمة البسط والمقام علىt:

$$Ec = V \times n / (36000/t)$$

نضع $D = 36000/t$

إذن: $\mathbf{Ec = V \times n / D}$

القيمة التجارية الحالية للورقة يعبر عنها بVc تمثل الفرق بين القيمة الاسمية والخصمالتجاري.

$$Vc = V - Ec$$

نستبدلEc بالعبارة المحددة مسبقا وفقا لD :

$$Vc = V - (V \times n/D)$$

اذن: $Vc = V\,(D - n/D)$

مثال:

حدد مبالغ القيم الحالية والخصم التجاري لورقة قيمتها 5000 دج عرضت للخصم في12جوان مستحقة في10 جويلية. معدل الخصم هو 10٪.

حساب مقدار الخصم :

Ec= 5000×10×28/36000= **38,89 D او Ec**=5000×28/3600=**38,98D**

حساب القيمة التجارية الحالية:

Vc=5000 – 38,89= 4961,11D

ويمكن الحصول على هذه القيمة باستعمال القاسم الثابتD:

Vc=5000 (3600 – 28/3600)=4961,11D

في الواقع، الخصم التجاري هو غير منطقي، لأنه لا يتم احتساب فائدة على المبلغ المدفوع فعلا من قبل البنك على أساس القيمة الحالية التجارية، ولكن على القيمة الاسمية للورقة أي يحسب عل أساس،المبلغ الذي يتم تسديده عند الاستحقاق. وعليه فالمبدأ السليم يعتمد على حساب الفائدة البسيطة ضمن ما يسمى بالخصم الصحيح او العقلاني .

3 . قيمة الخصم الصحيح او العقلاني :

القيمة الحالية الصحيحة (العقلانية) هي القيمة التي يضاف اليها فوائدها المحسوبة بمعدل الخصم على أساس عدد الأيام الخصم، تصبح مساوية للقيمة الاسمية للورقة التجارية.

الخصم الصحيح هو الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية الصحيحة، وهو فائدة القيمة الحالية الصحيحة.

بحكم التعريف، يتم احتساب قيمة الخصم الصحيح مع التعبير التالي:Erندل على الخصم الصحيح ب:

$Er= Vr\times t\times n/36000$

القيمة الحالية الصحيحة Vr تدل على الفرق بين القيمة الاسمية والخصم الصحيح.

$Vr=V - Er$

ملاحظات:

يمكن التعبير عن الخصم والقيمة الحالية الصحيحين علىأساس القيمة الاسمية من التعبير أعلاه يستخلص: $V=Vr+ Er$

غير أن :

$t\times n/36000\times Er=Vr$

إذن: $V = Vr + [Vr\times t\times n/36000] \longrightarrow V= Vr [(36000+t\times n)/36000]$

$\longrightarrow Vr = 36000\times V/ (36000+t\times n)$

هذا التعبير يمكن أن يكون مبسط باستخدام القاسمD

إذا نقسم البسط والمقام علىt ، نحصل على :

$Vr = [(36000\times V/t)]/ [(36000/t + t\times n/t)]$

نعوض 36000/t

$Vr = D\times V/ (D+n)$

النهج هو نفسه للتعبير عن الخصم الصحيح بالرجوع إلى القيمة الاسمية. من التعبير الأولي لVrيستخلص:

$Er=V-Vr$

غير ان:

$Vr=36000\times V/ (36000+t\times n) \longrightarrow Er=V -[36000\times V/ (36000+t\times n)]$

$\longrightarrow$ **Er= V×t×n/ (36000+t×n)**

كما في الحالات السابقة، إدخال القاسمDيبسط هذا التعبير. تقسيم البسط والمقام على tمع التعويضبD /t 36000 ، يصبح التعبير:

Er = V×n/ (D+n)

مثال:

نعيد البيانات من المثال السابق:

V=5000D, n= 28, t=10% et D =36000/10=3600

Er= (5000×10×28)/[36000+(10×28)]=38,59D

أو

Er= 5000×28/(3600+28)=38,59D

Vr = (36000×5000)/[36000+(10×28)]=4961,41 D

وبنفس الطريقة كما في المثال السابق، يمكن تحديد هذه القيمة باستخدامD :

Vr=3600×5000/ (3600+28)=4961,41D

تعليق: قيمة الخصم الصحيح38،59دج تكون أقل دائما من الخصم التجاري38،89 دج. هذه نتيجة منطقية لان قيمt وn هي نفسها في كلتا الحالتين، الفرق يتنج من أن القيمة الصحيحةVr هي دائما أقل من القيمة الاسمية V .

المجموع VrوEr يؤكد المساواة V= Vr +Er

4961 ,41+38,59=5000D

مع العلم أنEc>Er نقوم بحساب Ec – Er

Ec = V×n/D

Er = V×n/ (D+n)

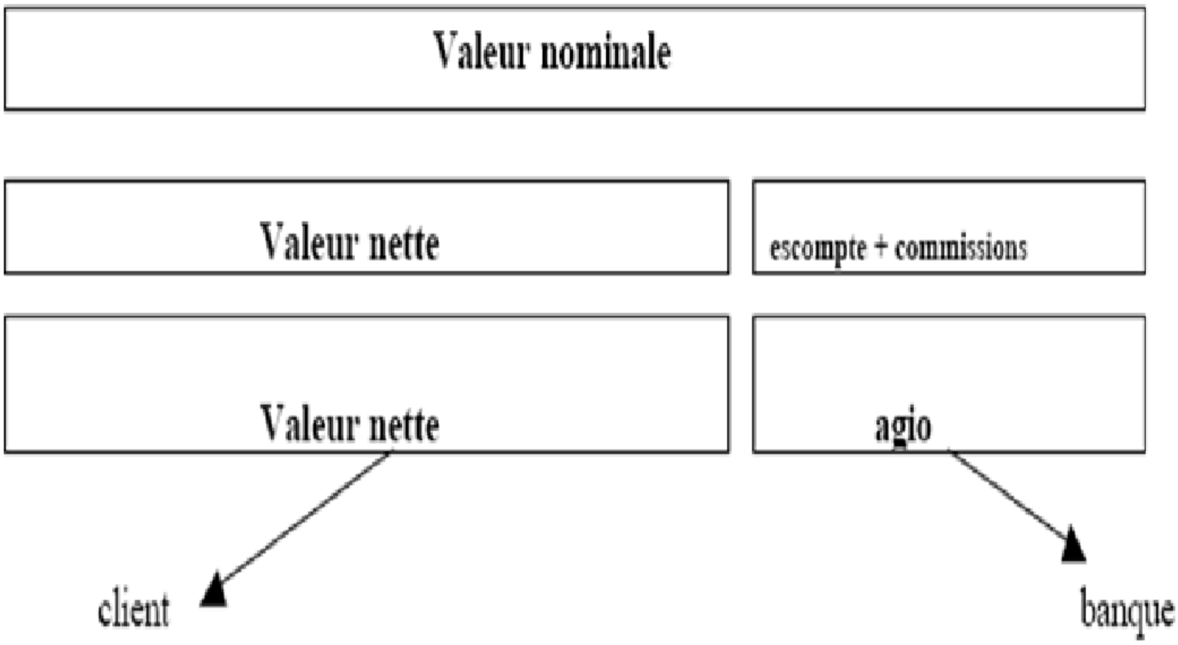
$$Ec - Er = [V\times n/D] - [V\times n/ (D+n)] = V\times n2/ (D (D+n)) = [V\times n/D+n] \times (n/D) = Er \times n/D.$$

4 . عناصر مكملة للخصم :

عندما يتمخصم .يطرح البنك الخصم من القيمة الاسمية. كما يطرح أيضا العمولات المختلفة لتغطية خدماته. الاجيو هو مجموع ما يحتفظ به البنك :

الاجيو= الخصم + العمولات

القيمة الصافية هي القيمة الحقيقية المحصلة من قبل بائع الورقة.



5. العمولات:

يمكن أن تكون العمولات متناسبة أو ثابتة، فهي تسمح للبنك أن تغطي خدماتها. العمولات متعددة (عمولة التظهير، عمولة القبول، ..) تتناسب مع القيمة الاسمية للورقة أو تكون ثابتة.

- **عمولة التظهير**

هي النسبة المئوية المحسوبة على القيمة الاسمية للورقة (هدفها تغطية إعادة خصم محتملة مع البنك المركزي) .

$$Ce = V\times t'\times n/36000$$

- **العمولة الثابتة:** تكون على شكل نسبة مئوية أو الفية من القيمة الاسمية او بـK دج

- **عمولات أخرى:** مثل عمولة القبول والتعامل.

الاجيو= الخصم + العمولات

معدل الخصم الحقيقي: يدعى المعدل الحقيقي للخصم، المعدل الوحيد الذي يجب تطبيقه على القيمة الاسمية للحصول علي الاجيو .

Agio= V×tr×n/36000 ⟶**tr = agio×36000/V×n**

معدل العائد : يحسب هذا المعدل على القيمة الصافية للورقة.

tr = agio×36000/Vnette×n

مثال:

في 08 جويلية يتم خصم ورقة قيمتها 5400دج مستحقة في 31أوت:

عناصر الخصم: معدل الخصم4.5٪عمولة التظهير0.4 ٪ ,العمولة المستقلة عن الزمن 8/1 % .

1)عمولة التظهير Ce = Vtn/36000= 5400. 54. 0,4/36000=3,24D

او36,45 .0,4/4,5=3,24 D

2) العمولة المستقلة عن الزمن

1/8%×V=5400/800= 6,75D

الاجيو= الخصم + العمولات

Agio= Ec +∑ commissions= 36,45+3,24+6,75=46,44D

3) المعدل الحقيقي

tr= agio. 36000/Vn =46,44. 36000/5400. 54=5,73

الفحص /

Agio = V.tr.n/36000 = [V.t.n/36000 + V.t′.n/36000 +kV/100]

⟶ tr = (nt/n) + (nt′/n) + (360k/n) = t + t′ + 360k/n = 4,5 + 0,4 + 360×1/8×54 = 5,73

المحور الثالث: التكافؤ

1 . تكافؤ رأسمالين :

1.1. تعريف: يكون الأرسمالين متكافئين في تاريخ معين إذا تساوت قيمتهما الحالية التجارية. بفائدة بسيطة هذا التاريخ يسمى تاريخ التكافؤ.

نعين :

V1 وV2: القيم الاسمية للاصلين1 و2.

:tمعدل الخصم

n1 وn2: عدد الأيام المتبقية بين تاريخ التكافؤ و تاريخ الاستحقاق للاصلين 1 و 2.

VC1 و VC2: القيم الحالية التجارية للاصلين 1 و 2.

في تاريخ التكافؤ، القيم الحالية تجارية تكون متساوية:

$$V_{c1} = V_{c2} \leftrightarrow V_1 - (V_1.t.\ n_1/36000) = V_2 - (V_2.\ t.\ n_2/36000)$$

نقوم بتقسيم البسط والمقام علىt ، ونعوض الكسر 36000/ t بالقاسمD:

$$\longrightarrow V_1 - (V_1.\ n_1/D) = V_2 - (V_2.\ n_2/D)$$

$$\longrightarrow V_1\ (D - n_1/D) = V_2\ (D - n_2/D)$$

وبالتالي تكون معادلة التكافؤ على النحو التالي:

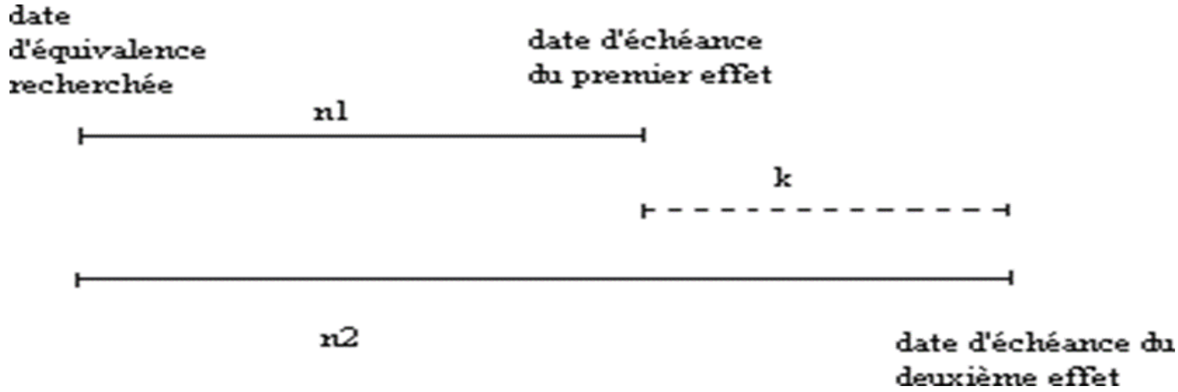
$$\mathbf{V1.\ (D - n1) = V2.\ (D - n2)}$$

2.1. تحديد تاريخ التكافؤ:

تحديد تاريخ التكافؤ يستوجب اعتبار عدد الأيام بين تواريخ التي تفصل بين الاصل الأول والاصل الثاني.

نفترض أن,k + n2 =n1 ، حيثk هي المسافة في الأيام بين تاريخي الاصلين الأول والثاني .وبعبارة أخرى، يفترض أن تاريخ استحقاق الاصل الثاني أبعد بـk يوم من تاريخ التكافؤ مقارنة معا لاصل الأول .

تمثيل البيانات من المشكلة :



نعود لعبارة التكافؤ السابقة:

$V_1. (D - n_1) = V_2. (D - n_2)$

نستبدل n2ب n1 +k :

$V_1. (D - n_1) = V_2. (D - (n_1 + k))$

$V_1. (D - n_1) - V_2. (D - n_1) = -V_2.k$

العبارة التي تم الحصول عليها من (D - n1) كعامل، تكتب على النحو:

$(D - n1). (V1 - V2) = -V2.k$

المسافة بالأيام، من تاريخ استحقاقا لاصل الأول الى تاريخ التكافؤ معطاة بالعبارة:

$$\mathbf{n1 = D + k. [V2/ (V1 - V2)]}$$

ملاحظات:

المدة بين تاريخ استحقاق الاصل الثاني مع تاريخ التكافؤn2 نحصل عنها من قيم n1و k:

$n2 = n1+k$

أو عن طريق العبارة:

$$\mathbf{n2 = D + k. [V1/ (V1 - V2)]}$$

مشكلة تاريخ التكافؤ لا تكون منطقية إلا إذا كان تاريخ التكافؤ لاحقا (بعد) تواريخ ايجاد الاصول وسابقا (قبل) تواريخ استحقاقها. مشكلة ليس لها حل إذا كانت القيم الاسمية متساوية وتواريخ استحقاق متطابقة.

مثال:

ما هو وتاريخ التكافؤ اصلين قيمنهما الاسمية على التوالي، من اثنين من الآثار تصنيفات 980.06 دج و1000. يستحقان في20 جويلية و28 سبتمبر على التوالي؟ معدل الخصم من 10٪

نضع**980.6= V1 ،V2 = 1000**

n1= المسافة بالأيام بين التاريخ المطلوب التكافؤ و20 جويلية

n2 = المسافة بالأيام بين التاريخ المطلوب التكافؤ و 28 سبتمبر

قيمة**k** هو الفرق بين تاريخي استحقاق الاصلين**k** = 70 يوما.

تحديد القيمة **n1**:

$n1 = D + k.\,[V2/(V1 - V2)] = (36000/10) + (70).[1000/(980{,}06-1000)] = 89{,}47$

أي 89يوما .

تاريخ التكافؤ قبل89 يوما من20 جويلية، الموافق22 ل أفريل.

2 . تكافؤ راسمال مع مجموعة من رؤوس الاموال :

1.2. تعريف: يكون رأسمال متكافئا مع مجموعة من رؤوس الأموال في تاريخ معين إذا تساوت قيمته الحالية التجارية مع القيم الحالية التجارية لمجموعة رؤوس الاموال. بفائدة بسيطة هذا التاريخ يسمى تاريخ التكافؤ.

لتكنV القيمة الاسميةلراسمال وV1،.... Vp القيم الاسمية ل p راسمال. مع مدد تفصلها من تاريخ التكافؤ على التواليn1,n2,....np التكافؤ بمعدل الخصمt يكتب على الشكل:

$$V - (V.t.n/36000) = [V_1 - (V_1.t.n_1/36000)] + ... + [Vp - (V_p.t.n_P/36000)]$$

باستخدام القاسم**D= 36000/t** تصبح المساواة على الشكل :

$$V - (V.n/D) = [V_1 - (V_1.n_1/D)] + ... + [Vp - (V_p.n_P/D)]$$

$$(\text{de } i=1 \text{ àp}) \quad V - (V.n/D) = \sum (V_i - V_i.n_i/D) \leftrightarrow$$

$$(\text{de } i=1 \text{ àp}) \quad \longrightarrow \mathbf{V - (V.n/D) = \sum Vi - (1/D)\sum Vi.ni}$$

مثال:

يعزم المدين تسديد دين مستحق ممثل ثلاثة مبالغ: 1000 دج،1500دج و2000 دج، في مواعيد تفصلنا عن اليوم ب30 و35 و40 يوما، بدفعة واحدة بعد38 أيام. ما هي القيمة اسمية للدفعة مع العلم ان المعدل هو10٪ ؟

قيمة القاسم:$D = 36000/10 = 3600$.

عبارة التكافؤ تكتب في هذه الحالة:

$$V – (V.n/D)= (V1 +V2 +V3) – [(1/D)(V1.n1 + V2.n2+ V3.n3)$$

التعبير العددي لهذه المعادلة هو:

$$V – (V. 38/3600) = (1000+1500+2000) – 1/3600[(1000×30) + (1500×35) + (2000×40)]$$

$$V. (1 – 0,010556) = 4500- 1/3600(162500)$$

$$V = 4454,86/0,98944 =4502,40D$$

2.2 . تاريخ الاستحقاق المشترك :

في المثال السابق السؤال تمحور حول قيمة المبلغ الوحيد.(V)اذا نقلنا السؤال الى تاريخ الاستحقاق للمبلغ الوحيد. تتمحور المشكلة حينئذ حول تحديد تاريخ الاستحقاق المشتر للمبالغ المعوضة .

مثال :

نعيد البيانات من المثال السابق. ما هو تاريخ استحقاق مبلغ وحيد قيمته4502,40دج موجه لتعويض المبالغ الثلاثة ؟

$$4502,40 – (4502,40×n/3600) = (1000+1500+2000) – 1/3600[(1000×30) + (1500×35) + (2000×40)]$$

$$4502,40 [1-(n/3600)] = 4454,86$$

$$n= 3600.(4502,40 -4454,86)/4502,40 = \mathbf{38,01}$$

3.2.حالة خاصة تاريخ الاستحقاق المتوسط :

تشير الأمثلة المذكورة أعلاه أن القيمة الاسمية للمبلغ الوحيد4502،40 دج على مقربة من مجموع القيم الاسمية للمبالغ المعوضة4500 دج؛ يمكن أن يكون أكثر ملاءمة اعتبار ان القيمة الاسمية للمبلغ الوحيد ببساطة ناتجة عن مجموع تلك المبالغ المعوضة.

- لننتقل الان الى تحديد تاريخ الاستحقاق:

$$V - (V.n^*/D) = \sum V_i - (1/D) \sum V_i.n_i$$

حيثn^* هو الاستحقاق المتوسط . نظرا ل$V = \sum Vi$ العبارة تصبح:

$$V.n^*/D = \sum V_i - (1/D) \sum V_i.n_i \rightarrow V.n^* = \sum V_i.n_i$$

وبالتالي:

$$\mathbf{n^* = \sum Vi.ni / V}$$

أو

$$\mathbf{n^* = \sum Vi.ni / \sum Vi}$$

ملاحظة:

قيمة n^* هي المسافة بالأيام بين تاريخ التكافؤ وتاريخ استحقاق المبلغ الوحيد. هذه المسافة هي المتوسط الحسابي للمسافات بالأيام بين تاريخ التكافؤ وتواريخ استحقاق المبالغ المعوضة، مرجحة بقيمها الاسمية.

قيمةn^* مستقلة عن معدل الخصم. اذ أن حل المعادلة يؤدي إلى اختفاء القاسمD ، والذي يحتوي على معدل الخصم.

مثال:

- حدد تاريخ الاستحقاق المتوسط :

V1 = 1000 D، مستحق يوم 10 مارس.V2 = 1500D ، مستحق في 26 مارس.

V3 = 2000 D، مستحق في 11 افريل .V4 = 2500D ، مستحق في25أفريل.

نعتبر تاريخي التكافؤ: 28 فيفري و10 مارس.

تحديد تاريخ الاستحقاق المتوسط من تاريخ التكافؤ28 فيفري:

n1 =(مارس-28 فيفري) =10 أيام ، n2 = (26مارس-28 فيفري)=26يوما؛

n3 =(11أفريل-28فيفري)=42يوما ،n4=(24أفريل-24فيفري)=55يوما.

عندما يذكر صراحة أن مشكلة هي استحقاق متوسط، فهذا يعني أن القيمة الاسمية للمبلغ الوحيد تساوي مجموع القيم الاسمية للمبالغ المعوضة. خلاف ذلك، فمن الضروري أولا لمقارنة القيمة الاسمية للمبلغ الوحيد مع القيم الاسمية للمبالغ المعوضة. إذا كان هنا فرق، اذن فالمشكلة كلاسيكية تتمحور حول الاستحقاق المشترك.

$V=\sum Vi = 1000+1500+2000+2500 =7000D$

$$\mathbf{n^* = [(1000\times10) +(1500\times26)+(2000\times42)+(2500\times55)]/7000 = 38,64}$$

أو 39 يوم.

يفصل تاريخ الاستحقاق المتوسط عن تاريخ التكافؤ39يوما، هوتاريخ 8أفريل.

تحديد تاريخ الاستحقاق المتوسط من تاريخ التكافؤ أي :

n1=(10مارس-10 مارس) =0 يوم، n2 = (26مارس-10 مارس)=16يوما؛

n3 =(11أفريل-10 مارس)=32يوما،n4=(24أفريل-10 مارس)=45يوما.

$$\mathbf{n^* = [(1000\times0) +(1500\times16)+(2000\times32)+(2500\times45)]/7000 = 28,64}$$

أو 29يوما.

يفصل تاريخ الاستحقاق المتوسط عن تاريخ التكافؤ29يوما، هو تاريخ 8أفريل.

ملاحظة: تظهر هذه التطبيقات أن الاستحقاق المتوسط لا يرتبط بمعدل خصم أو تاريخ التكافؤ.

المحور الرابع: الفوائد المركبة

1.تعريف الفوائد المركبة:

نقول عن مبلغ انه أودع بفائدة مركبة،عندما يتم إضافة الفائدة البسيطة لهذه الفترة إلى المبلغ الأصلي لحساب الفائدة للفترة الموالية،وهكذا في نهاية كل فترة يتم إضافة الفائدة البسيطة الناتجة إلى الرأسمال أو المبلغ المحصل،ثم يتم حساب الفائدة على أساس المبلغ(الرأسمال) والفوائد الناتجة سابقا .

القانون العام للفائدة المركبة :لتكن الرموز التالية: المبلغ الأصلي المودع c :، سعر الفائدة t :، عدد الفترات n : . وعليه فان القانون العام للفائدة المركبة هو :

$$\boxed{A=c(1+t)^n}$$

مثال: مبلغ 100000 دج وضع في بنك بمعدل 6 %لمدة 10 سنوات، احسب القيمة المكتسبة خلال هذه المدة؟

الحل : $A=c(1+t)^n$

$A= 100000(1+0.06)^{10}$

$A= 100000\times1.790848 =$ **179084.8 DA**

الجدول رقم :

القيمة المحصلة في نهاية السنة بعد رسملة الفوائد السنوية	فوائد السنة	رأس المال في بداية السنة	السنوات
$C+C \times t = C (1+ t)$	$C \times t$	C	1
$C(1+t) + C(1+t) \times t = C (1+t)(1+t)=C(1+t)^2$.	$C (1+t) \times t$	$C (1+t)$	2
$C(1+t)^2 + C(1+t)^2 \times t = C (1+ t)^2 \times t = C (1+t)^2 (1+t) =C (1+t)^3$	$C (1+t)^2 \times t$	$C (1+t)^2$	3
.	.	.	.

.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n-1	$C\,(1+t)^{n-2}$	$C\,(1+t)^{n-2} \times t$	$C\,(1+t)^{n-2} + C\,(1+t)^{n-2} \times t = C(1+t)^{n-2}(1+t) = C(1+t)^{n-2}$
N	$C\,(1+t)^{n-1}$	$C\,(1+t)^{n-1} \times t$	$C\,(1+t)^{n-1} + C\,(1+t)^{n-1} \times t = C(1+t)^{n-1}(1+t) = C(1+t).$

من خلال الجدول نجد أن الجملة المكتسبة A_n عن توظيف مبلغ C بعد عدد من الفترات الزمنية n ، بمعدل فائدة مركبة t عن كل وحدة زمنية تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{A_n = C(1+t)^n}$$

مثال 01: مبلغ قدره 10000 دج وظف بفائدة مركبة لمدة 6 سنوات ، وذلك بمعدل فائدة ثلاثي قدره 2.5% ، وبرسملة ثلاثية.

- احسب القيمة المحصلة في نهاية مدة التوظيف ؟.

الحل: بما أن الرسملة ثلاثية ومعدل فائدة ثلاثي ، فمدة التوظيف يجب أن تكون ثلاثية كذلك.

إذن : $n = 6 \times 4 = 24$ ثلاثي.

$C_{24} = 10000(1,025)^{24}$

$C_{24} = 18087,26$ DA

ملاحظات:

1- إن العلاقة السابقة لحساب الجملة تقتضي تطابق معدل الفائدة مع مدة الرسملة، فإذا كانت الرسملة سنوية لابد أن يكون معدل الفائدة المركبة سنويا، وإذا تم الاتفاق على رسملة الفوائد شهريا أو فصليا أو سداسيا وجب أن يكون معدل الفائدة المركبة متطابقا مع مدة الرسملة.

2- من خلال الجدول السابق يتضح أن فوائد السنوات المتتالية، وأيضا الجملة المحصلة في نهاية السنوات المتتالية تشكل متوالية هندسية أساسية (1+t).

3- على عكس علاقة حساب الفائدة البسيطة التي تمدنا مباشرة بقيمة الفائدة البسيطة، فالعلاقة الأساسية للفائدة المركبة تمدنا بالقيمة (الجملة) المحصلة، ويتعين لمعرفة قيمة الفائدة المركبة طرح أصل القرض (أو المبلغ الموظف) في جملته المحصلة كما يلي :

$$I= C_n - C = C (1+t)^n - C$$

$$I= C [(1+t)^n-1]$$

مثال: أودع شخص مبلغ 781250دج في أحد البنوك بمعدل 6 % سنويا، ولمدة 5 سنوات.

- أوجد الفائدة المحققة خلال مدة التوظيف ؟.

الحل:

$$I = C[(1+t)^n-1]$$

$$I= 781250[(1+0.06)^5-1]$$

$$I =264238,7325 \text{ DA.}$$

عمليات على علاقة الفائدة المركبة: العلاقة الأساسية لحساب القيمة (الجملة) المحصلة لمبلغ وظف بفائدة مركبة $C_n = C(1+t)^n$ ، فيمكن حسابها باستخدام الآلة الحاسبة ، كما يمكن استخدام الجداول المالية ، حيث يمكن إيجاد القيمة $(1+t)^n$ من الجداول المالي رقم 01.

كما تمكننا العلاقة السابقة من حساب C، n،t .

أ. **حساب المبلغ الأصلي:** إذا كانت لدينا الجملة المحصلة، مدة التوظيف أو الاقتراض ، ومعدل الفائدة المركبة، يمكن إيجاد قيمة المبلغ الأصلي كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$\boxed{C = \frac{C_n}{(1+t)^n} = C(1+t)^{-n}}$$

وهذه العلاقة هي نفسها علاقة القيمة الحالية لمبلغ مستقبلي في الوقت الحاضر.

مثال: وظف شخص مبلغ مالي في أحد البنوك، بمعدل فائدة سنوي 7.5% وبرسملة سنوية، فأعطى بعد 10 سنوات جملة قدرها 123661.92 دج.

أحسب قيمة المبلغ الموظف.

الحل: لدينا n = 10 سنوات، t=7,5%

$C=?$, $C_{10}= 123661,92$ DA

- **الطريقة 01:**

$$C=\frac{C_{10}}{(1+t)^n}=\frac{\mathbf{123661,92}}{(\mathbf{1+0,075})^{\mathbf{10}}}$$

$$C=\frac{\mathbf{123661.92}}{\mathbf{2.061032}}=\mathbf{60000\ DA}$$

كما يمكن استخدام الجدول المالي رقم 01 لايجاد القيمة $(1+0.075)^{10}$ وذلك بأخذ العمود الذي يمثل =t % 7.5، والسطر رقم 10.

- **الطريقة 02:**

يمكن ايجاد قيمة المبلغ الأصلي باستخدام العلاقة:

$$C = C_n (1+t)^{-n}$$

$$C = 123661,92\ (1+0.075)^{-10}$$

$$C = 123661,92 \times 0.485194$$

$$C = 60000\ DA$$

ويمكن كذلك إيجاد القيمة $(1+0,075)^{-10}=0,485194$ باستخدام الجدول المالي لرقم 02، عند العمود الذي يشير إلى t=7.5 % ، والسطر رقم 10.

ب.**حساب المعدل** :إذا توفر لدينا المبلغ الأصلي، الجملة المحصلة عن توظيف هذا المبلغ ، ومدة التوظيف ، بالإمكان إيجاد معدل الفائدة باستخدام العلاقة الأساسية للفائدة المركبة كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n$$

يمكننا أن نكتب :

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C} \longrightarrow 1+t = \left(\frac{C_n}{C}\right)^{1/n}$$

$$\boxed{t = \left(\frac{C_n}{C}\right)^{1/n} - 1}$$

مثال: اقترض شخص من البنك مبلغ 30000دج ، لمدة 11 سنة ، فدفع في نهاية مدة القرض مبلغ 89971,77 دج.

- إذا علمت أن الرسملة سنوية ،أحسب معدل الفائدة.

الحل:

لدينا : $n= 11$ ans ، $C= 30000$ DA ، $C_{11} = 89971,77$DA ، $t= ?$

- **الطريقة 01:**

$$t = \left(\frac{C_n}{C}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{89971.77}{30000}\right)^{1/n} - 1$$

$t=0,105$

$t=10,5\%$

الطريقة 02 :

تعتمد هذه الطريقة على الجدول المالي رقم 01:

$$C_n = C\,(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C}$$

$$(1+t)^{11} = \frac{89971,77}{30000} = 2,999059.$$

لإيجاد قيمة قيمة t، نبحث عن القيمة 2,999059 في السطر رقم 11 من الجدول المالي رقم 01، ثم نقوم بالبحث عن قيمة t التي تقابلها.

ومن الجدول المالي رقم 01 نجد أن $t=10.5\%$

حساب المدة: إذا توف لدينا المبلغ الأصلي ، الجملة المحصلة، ومعدل الفائدة، بإمكاننا إيجاد المدة nكما يلي:

$$C_n = C\,(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C}$$

باستخدام اللوغاريتم العشري تصبح العلاقة من الشكل :

$$\log(1+t)^n = \log\left(\frac{C_n}{C}\right)$$

2.القيمة المكتسبة :

مثال:وظف تاجرعلي مبلغ 200000دج في صندوق التوفيروالاحتياط بمعدل فائدة مركبة 10%سنويا لمدة 4 سنوات .

- كيف تحسب القيمة المكتسبة والفائدة الناتجة في نهاية المدة ؟

حساب القيمة المكتسبة لرأسمال الموظف من طرف التاجر علي:

السنوات	رأس المال في بداية المدة	الفائدة الناتجة خلال السنة	رأس المال في نهاية المدة
1	200.000	200.000× 0,1 = 20.000	200.000 + 20.000 = 220.000
2	220.000	220.000× 0,1 = 22.000	220.000 + 22.000 = 242.000
3	242.000	242.000× 0,1 = 24.200	242.000 + 24.200 = 266.200
4	266.200	266.200× 0,1 = 26.620	266.200 + 26.620 = 292.820

ملاحظات :

- أضفنا في نهاية السنة(1) الفائدة المتحصل عليها إلى رأس المال.
- رأس المال المتحصل عليه في نهاية السنة (1) .
- أصبح يمثل رأس المال في بداية السنة (2) وعلى أساسه تحسب فائدة السنة (2).
- رأس المال المتحصل بداية االسنة (2) أصبح يمثل رأس المال في بداية السنة(3) .
- وعلىأساسه حسبت فائدة السنة(3) اصبح يمثل رأس المال في بداية السنة (4) وعلى أساسه حسبت فائدة السنة (4).
- رأس المال نهاية السنة (4) يعتبر القيمة المكتسبة (الجملة النهائية).

المحورالخامس: الدفعات المتساوية

الدفعات المتساوية هي عبارة عن مبالغ مالية متساوية يتم دفعها بصورة ثابتة وعلى فترات زمنية منتظمة و تهدف إلى تحقيق هدفين:

- تسديد قرض (أي تغطية دين) وهي دفعات سداد تدفع في نهاية كل فترة زمنية,
- تكوين رأس مال وهي دفعات ألاستثمار و تدفع في بداية كل فثرة زمنية,

ثانيا : أنواع الدفعات المتساوية : يمكن تحديد أنواع الدفعات حسب المعايير التالية :

1. معيارتاريخ الدفع : هناك نوعان أساسيان وهما :

ا. دفعات ثابتة في نهاية المدة : وتسمى أيضا دفعات سداد الديون أو الدفعات العادية أو دفعات الاهتلاك

ب. دفعات ثابتة في بداية المدة : وتسمى بدفعات التوظيف أو الاستثمار أو دفعات تكوين رأس المال .

2. معيارعدد الدفعات : نجد منها :

ا. دفعات دائمة : عددها يكون غير محدد ، مثل دفعات إيجار العقارات أو دفعات المعاشات .

ب. دفعات مؤقتة : عدد الدفعات يكون محدد في عقد الاتفاق بحيث تبدأ في تاريخ معين وتنتهي في تاريخ كذلك معين.

3. **معيار قيمة الدفعات:** لدينا نوعان :

ا . دفعات ثابتة : قيم الدفعات متساوية في كل الفترات .

ب . دفعات متغيرة : قيم الدفعات غير متساوية وتتغير من فترة لأخرى .

ثالثا : الدفعات الثابتة السنوية في نهاية المدة (دفعات السداد) : هي مبالغ مالية متساوية القيمة تدفع دوريا في نهاية كل سنة، بغرض تسديد دين .

هذا النوع من الدفعات يمكن تقييمه عند نهاية آخر فترة زمنية، أو عند بداية الفترة الأولى أو الزمن صفر، ولذلك سنقوم بدراسة القيمة المحصلة والقيمة الحالية لهذه الدفعات.

1. القيمة المحصلة للدفعات السنوية الثابتة لنهاية المدة:

هي مجموع القيم المحصلة الجزئية لكل الدفعات عند آخر دفعة، أو عند نهاية آخر سنة، ونرمز للقيمة المحصلة بالرمز A_n .

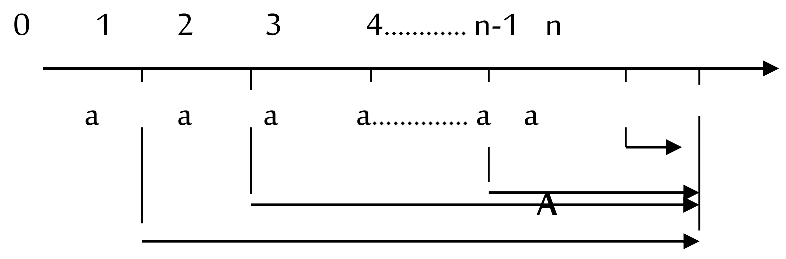
أ. **حساب القيمة المحصلة:** عناصر القيمة المحصلة هي :

.قيمة الدفعة ونرمز لها بالرمز a .

.عدد الدفعات ونرمز لها بالرمز n .

.معدل الفائدة t .

ولحساب القيمة المحصلة نستعين بالمحور الزمني الآتي :



القيمة المحصلة لكل دفعة هي :

القيمة المحصلة للدفعة الأولى هي : $A_1 = a_1(1 + t)^{n-1}$

القيمة المحصلة للدفعة الثانية هي : $A_2 = a_2 (1 + t)^{n-2}$

القيمة المحصلة للدفعة الثالثة هي : $A_3 = a_3(1 + t)^{n-3}$

القيمة المحصلة للدفعة ما قبل الأخيرة هي : $A_{n-1} = a_{n-1} (1+t)$

القيمة المحصلة للدفعة الأخيرة هي : $A_n = a_n (1+t)^0 = a$

القيمة المحصلة الكلية هي :

$$A_n = A_1 + A_2 + A_3 + \dots\dots\dots + A_{n-2} + A_{n-1} + A_n$$

وبتعويض كل قيمة محصلة بما تساويها نجد:

$$A_n= a_1(1 + t)^{n-1} + a_2 (1 + t)^{n-2} + a_3(1 + t)^{n-3} + \dots\dots\dots\dots + a_{n-2} (1+t)^2 + a_{n-1} (1+t) + a$$

وبما أن الدفعات متساوية فان :

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots\dots\dots\dots = a_n$$

$$A_n= a (1 + t)^{n-1} + a (1 + t)^{n-2} + a (1 + t)^{n-3} + \dots\dots + a (1+t)^2 + a (1+t) + a$$

و بما أن الجمع عملية تبديلية فيمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي :

$$A_n = a + a (1+t) + a (1+t)^2 + \dots + a (1 + t)^{n-3} + a (1 + t)^{n-2} + a (1 +t)^{n-1}$$

نلاحظ بان الطرف الأيمن من المعادلة يمثل متتالية هندسية متزايدة بأساس $r =(1+t)$، حدها الأول $\mu_1 = a$، وحدها الأخير $\mu_n = a (1 + t)^{n-1}$ ، وعدد حدودها n .

وبالتعويض في قانون مجموع المتتالية الهندسية $S = \mu_1 \frac{n-1}{r-1}$، نجد القيمة المحصلة للدفعات العادية كما يلي :

$$A_n = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1} \Rightarrow \boxed{A_n = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

القيمة $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ تستخرج من الجدول المالي رقم (03) .

مثال 1: أراد شخص تسديد في نهاية كل سنة مبلغ 10000 دج لمدة 12 سنة ، بمعدل فائدة سنوي 5,5 % ، احسب القيمة المحصلة عند نهاية السنة 12 .

الحل:

$$A_{12} = 10000\,\frac{(1,055)^{12} - 1}{0,055} = 10000 \times 16,385591 = 163855,91 \text{ DA}$$

مثال 2: اشترى شخص محلا تجاريا، واتفق مع البائع على دفع مبلغ 600 دج في نهاية كل سنة لمدة 12 سنة بمعدل فائدة سنوي 3,10 %، احسب جملة ما يدفعه المشتري عند نهاية السنة 12 .

الحل:

$$A_{12} = 600\,\frac{(1,0310)^{12} - 1}{0,0310}$$

لا يمكن حساب قيمة $\frac{(1,0310)^{12} - 1}{0,0310}$ لان المعدل 3,10 % غير موجود بالجدول المالي، وهذا المعدل محصور بين معدلين موجودين في الجدول المالي وهما: المعدل 3 % و المعدل 3, 25 % ،أي 3 % < 3,10 < 3,25 وبالتالي فان المعدل المحصور نتحصل عليه من خلال العلاقة :

t = 3 % + X ، وبالتالي نستمل طريقة التناسب :

$$\begin{cases} 3,25\,\% : & \frac{(1,0325)^{12} - 1}{0,0325} = 14,395285 \\ 3,10\,\% : & \frac{(1,310)^{12} - 1}{0,0310} = X \\ 3\,\% : & \frac{(1,03)^{12} - 1}{0,03} = 14,192030 \end{cases}$$

$$0,25\,\% \longrightarrow 0,203255 \Rightarrow X = \frac{0,10\,\% \times 0,203255}{0,25\,\%} = 0,081302$$

0,10 % $\longrightarrow$ X

$$\frac{(1{,}0310)^{12}-1}{0{,}0310} = \frac{(1{,}0325)^{12}-1}{0{,}0325} + X$$

$$\Rightarrow \frac{(1{,}0310)^{12}-1}{0{,}0310} = 14{,}192030 + 0{,}081302$$

$$\Rightarrow X = 14{,}273332$$

ومنه يمكن حساب A_{12} :

$$A_{12} = 600\ \frac{(1{,}0310)^{12}-1}{0{,}0310} = 600 \times 14{,}273332 = 8563{,}9992 \text{ DA}$$

ب. حساب عناصر القيمة المحصلة:

. حساب مبلغ الدفعة a : تحسب كما يلي :

$$A = a\ \frac{(1+t)^n - 1}{t} \Rightarrow a = A\ \frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

القيمة $\frac{t}{(1+t)^n - 1}$ غير موجودة بالجدول المالي، و للحصول عليها نطرحها من قيمة أخرى موجودة بالجدول المالي رقم (05) وهي : $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$ كما يلي :

$$\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - \frac{t}{(1+t)^n - 1} = \frac{t\,[(1+t)^n - 2 + (1+t)^{-n}]}{[(1+t)^n - 2 + (1+t)^{-n}]} = t$$

و بالتالي القيمة $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ نتحصل عليها بطرح القيمة t من القيمة $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$ كالآتي:

$$\frac{(1+t)^n - 1}{t} = \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - t$$

وبتعويض قيمة $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ بالقيمة $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - t$ في العلاقة $a = A\frac{t}{(1+t)^n - 1}$

نجد قيمة a كما يلي: $\mathbf{a = A_n\left[\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - t\right]}$

مثال: مبلغ قيمته 10000 دج مكون من تسديد 5 دفعات متساوية عادية بمعدل 7 % ، احسب قيمة الدفعة .

الحل:

1. بالآلة الحاسبة: $a = 10000 \times \frac{0,07}{(1,07)^{-5} - 1} = 1738,9$ DA
2. بالجدول المالي: $a = 10000 \left[\frac{0,07}{1-(1,07)^{-5}} - 0,07 \right] = 1738,9$ DA

.حساب عدد الدفعات n :

تحسب كما يلي : $A_n = a \frac{(1+t)^n - 1}{t} \Rightarrow \frac{(1+t)^n - 1}{t} = \frac{An}{a}$

مثال 1:

يريد شخص تسديد دين قيمته 11028,47 دج ، قيمة الدفعة 1000 دج بمعدل فائدة سنوي 9 % ، احسب عدد الدفعات اللازمة لتسديد هذا الدين.

الحل:

$$11028,47 = 1000 \frac{1,09^n - 1}{0,09} \Rightarrow \frac{11028,47}{1000} = \frac{1,09^n - 1}{0,09} \Rightarrow \frac{1,09^n - 1}{0,09} = 11,02847$$

من الجدول المالي رقم 3 وعند المعدل 9 % والقيمة 11,02847 نجد 8 دفعات = n

. أو بطريقة اللوغاريتم:

$$11,02847 = \frac{1,09^n - 1}{0,09} \Rightarrow 1,09^n - 1 = 0,992562 \Rightarrow 1,09^n = 1,992562$$

$$\text{Ln } 1,09^n = \text{Ln } 1,992562$$

$$n \text{ Ln } 1,09 = \text{Ln } 1,992562$$

$$n = \frac{\text{Ln } 1,992562}{\text{Ln } 1,09} = \frac{0,689421}{0,086177} = 8$$ دفعات

. أو بطريقة أخرى:

$$11028,47 = 1000 \frac{1,09^n - 1}{0,09}$$

$$1{,}09^n = \frac{11028{,}47 \times 0{,}09 + 1000}{1000} = 1{,}992562$$

$1{,}09^n = 1{,}992562$.

من الجدول المالي رقم 01 وعند المعدل 9 % والقيمة 1,992562 نجد n = 8 دفعات.

مثال 2 :

شخص مدين بمبلغ 42710 دج ويريد تسديده بدفعات ثابتة عادية، قيمة الدفعة 5000 دج بمعدل 10 %، فكم يلزمه من دفعة لتسديد هذا الدين ؟

الحل:

$$42710 = 5000\,\frac{1{,}1^{n}-1}{0{,}1} \Rightarrow \frac{42710}{5000} = \frac{1{,}1^{n}-1}{0{,}1} = 8{,}54200$$

هذه القيمة غير موجودة في الجدول المالي رقم 03 فهي محصورة بين n = 6 دفعات و n = 7 دفعات

وبما أن n تكون عدد صحيح ، فلدينا ثلاث حلول لإيجاد n وهي :

الحل الأول:

ندفع 6 دفعات قيمة كل دفعة اكبر من 5000 دج ، ما هي قيمة كل دفعة؟

$$42710 = a\,\frac{(1{,}1)^{6}-1}{0{,}1} \Rightarrow a = \frac{42710}{7{,}715610} = 5535{,}53$$

الحل الثاني:

ندفع 7 دفعات قيمة كل دفعة اقل من 5000 دج ، ما هي قيمة الدفعة الجديدة ؟

$$42710 = a\,\frac{(1{,}1)^{7}-1}{0{,}1} = \frac{42710}{9{,}487171} \Rightarrow a = 4501{,}86 \text{ DA}$$

الحل الثالث:

نجعل n = 6 دفعات وقيمة الدفعة 5000 دج ونبحث عن A_7 .

$$A_7 = 5000\,\frac{(1{,}1)^{6}-1}{0{,}1} \Rightarrow A_7 = 38578{,}05 \text{ DA}$$

ومنه فالمبلغ الذي يجب دفعه مع الدفعة الأخيرة هو الفرق بين 42710 و 38578,05 وقيمته هي :

$$42710 \text{ DA} - 38578{,}05 \text{ DA} = 4131{,}95 \text{ DA}$$

حساب المعدل t :

يحسب كما يلي : $\frac{A}{a} = \frac{(1+t)n-1}{t}$

مثال 1: ما هو معدل الفائدة المطبق الذي يسمح بتكوين رأسمال قدره 86919,375 دج بـ 10 دفعات ثابتة لنهاية المدة ، قيمة الدفعة 6000 دج .

الحل:

$$\frac{86919,375}{6000} = \frac{(1+t)^{10}-1}{t} = 14,486562$$

من الجدول المالي رقم 03 وعند القيمة 14,486562 وعند n = 10 نجد t = 8 %

مثال 2 :

رأسمال قيمته 150000 دج مكون من تسديد 11 دفعة ثابتة لآخر المدة ، قيمة الدفعة 10000 دج، ما هو المعدل المطبق.

الحل:

$$\frac{150000}{10000} = \frac{(1+t)^{11}-1}{t} = 15,000000$$

القيمة 15,000000 غير موجودة في الجدول المالي وبالتالي المعدل الذي يقابلها غير موجود بالجدول المالي، فهو محصور بين معدلين $t_1 = 6\ \%$ و $t_2 = 6,5\ \%$ ، ومنه :

$$6\ \% < t < 6,5\ \% \Rightarrow t = 6\% + y$$

ولإيجاد y نستعمل الطريقة الثلاثية:

$$\left\{\begin{array}{lll} t_2 = 6,5\ \% : & \frac{(1,065)^{11}-1}{0,065} = & 15,371561 \\ t = ? \quad : & \frac{(1+t)^{11}-1}{t} = & 15,000000 \\ t_1 = 6\% \quad : & \frac{(1,06)^{11}-1}{0,06} = & 14,971643 \end{array}\right.$$

$$0,5\ \% \longrightarrow 0,399918$$

$$Y \longrightarrow 0{,}028357 \quad \Rightarrow y = \frac{0{,}005 \times 0{,}028357}{0{,}399918} = 0{,}035\,\%$$

ومنه فان : $t = 6\% + y = 6\% + 0{,}035\,\% = 6{,}035\,\%$

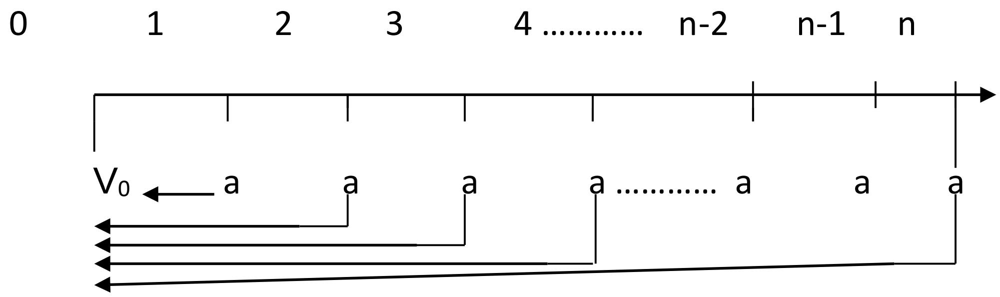
2. القيمة الحالية للدفعات الثابتة لنهاية المدة:

هي مجموع القيم الحالية لعدد الدفعات في الزمن صفر أو في بداية الدفعة الأولى، ونرمز للقيمة الحالية بالرمز **V.**

ا. حساب القيمة الحالية: عناصر القيمة الحالية هي :

.قيمة الدفعة a ، عدد الدفعات n ، معدل الفائدة t .

ولإيجاد القيمة الحالية نستعين بالمحور الزمني الآتي :



القيمة الحالية للدفعة الأولى هي : $V_1 = a_1(1+t)^{-1}$

القيمة الحالية للدفعة الثانية هي : $V_2 = a_2(1+t)^{-2}$

القيمة الحالية للدفعة الثالثة هي $V_3 = a_3(1+t)^{-3}$

القيمة الحالية للدفعة ما قبل الأخيرة هي: $V_{n-1} = a_{n-1}(1+t)^{-(n-1)}$

القيمة الحالية للدفعة الأخيرة هي: $V_n = a_n(1+t)^{-n}$

القيمة الحالية الكلية هي :

$V_0 = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots + v_n$

وبتعويض كل قيمة حالية بما تساويها نجد:

$V_0 = a_1(1+t)^{-1} + a_2(1+t)^{-2} + a_3(1+t)^{-3} + ... + a_{n-1}(1+t)^{-(n-1)} + a_n(1+t)^{-n}$

وبما أن الدفعات متساوية فان :

$a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

ومنه تصبح المعادلة السابقة كما يلي :

$V_0 = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{2} + a(1+t)^{-3} + ... + a(1+t)^{-(n-1)} + a(1+t)^{-n}$

و بما أن الجمع عملية تبديلية فيمكن كتابة هذه العلاقة كما يلي :

$V_0 = a(1+t)^{-n} + a(1+t)^{-(n-1)} + ... + a(1+t)^{-3} + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-1}$

نلاحظ بان الطرف الأيمن من المعادلة يشكل متتالية هندسية متناقصة بأساس $r = (1+t)$، حدها الأول $\mu_1 = a(1+t)^{-n}$ ، وحدها الأخير $\mu_n = a(1+t)^{-1}$ ، وعدد حدودها n .

وبالتعويض في قانون مجموع المتتالية الهندسية: $S = \mu_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$، نجد القيمة الحالية للدفعات الثابتة لنهاية المدة كما يلي:

$$V_0 = a(1+t)^{-n} \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \quad => \quad V_0 = a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

ملاحظة: القيمة $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ تستخرج من الجدول المالي رقم (04) .

مثال:

اشترى شخص جهازا يسدد بواسطة 5 دفعات ثابتة في آخر المدة، قيمة الدفعة 8000 دج بمعدل فائدة سنوي 10 %، احسب سعر هذا الجهاز .

الحل:

سعر الجهاز يعني حساب القيمة الحالية .

الطريقة الأولى:

$$V_0 = 8000\ \frac{1-(1,1)^{-5}}{0,1} = 8000 \times 3,790787 = 30326,296\ DA$$

الطريقة الثانية: القيمة الحالية للقيمة المحصلة.

$$V_0 = 8000 \times \frac{(1,1)^5 - 1}{0,1}\ (1,1)^{-5} = 8000 \times 6,105100 \times 0,620921 = 30326,278\ DA$$

ب. حساب عناصر القيمة الحالية لدفعات السداد :

. حساب قيمة الدفعة a : تحسب كالآتي :

$$\mathbf{V_0 = a\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow a = V_0\ \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}}$$

مثال: اشترى شخص آلة بقيمة 100000 دج تسدد بواسطة 4 دفعات ، الأولى تسدد سنة بعد الشراء بمعدل 9 %، احسب قيمة الدفعة .

الحل:

$$a = 100000\ \frac{0,09}{1-(1,09)^{-4}} = 100000 \times 0,275490 = 27549\ DA$$

. حساب عدد الدفعات n :

تحسب كالأتي :

$$\mathbf{V_0 = a\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{V0}{a}}$$

مثال 1 :

دين قيمته 31185,945 دج يسدد بواسطة n دفعة متساوية عادية بمعدل فائدة سنوي 6 %، قيمة الدفعة الواحدة 9000 دج ، كم يلزم من دفعة لتسديد هذا الدين؟

الحل:

حساب عدد الدفعات :

$$31185,945 = 9000\,\frac{1-(1,06)^{-n}}{0,06} \Rightarrow \frac{1-(1,06)^{-n}}{0,06} = \frac{31185,945}{9000} = 3,465105$$

من الجدول المالي رقم 04 وعند المعدل 6 % والقيمة 3,465105 نجد n = 4 دفعات

م الدفعات الثابتة في بداية المدة (دفعات التوظيف):

هي تلك الدفعات التي تدفع دوريا في بداية كل سنة، بغرض التوظيف (الاستثمار) أو تكوين رأسمال، والدفعة الأولى تدفع في بداية السنة الأولى أو يوم إمضاء العقد (في الزمن صفر) ، وتقييم هذه الدفعات يكون بعد سنة من توظيف آخر دفعة بالنسبة للقيمة المحصلة ، وفي الزمن صفر أو في تاريخ توظيف الدفعة الأولى بالنسبة للقيمة الحالية .

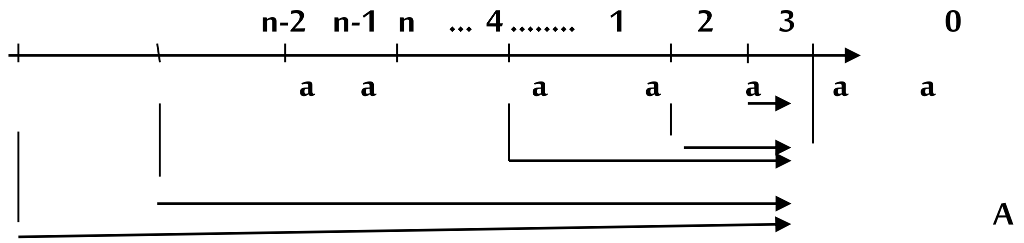
1. القيمة المحصلة للدفعات المتساوية في بداية المدة :

هي مجموع القيم المحصلة للدفعات عند نهاية الفترة الأخيرة، أو بفترة واحدة بعد الدفعة الأخيرة، ونرمز لها بالرمز Á

ا. العلاقة الأساسية للقيمة المحصلة: عناصر القيمة المحصلة هي :

.قيمة الدفعة a ، عدد الدفعات n ، معدل الفائدة t .

ولإيجاد القيمة المحصلة نستعين بالمحور الزمني الآتي:



القيمة المحصلة للدفعة الأولى هي : $Á_1 = a_1(1+t)^n$

القيمة المحصلة للدفعة الثانية هي : $Á_2 = a_2(1+t)^{n-1}$

القيمة المحصلة للدفعة الثالثة هي : $Á_3 = a_3(1+t)^{n-2}$

القيمة المحصلة للدفعة ما قبل الأخيرة هي: $Á_{n-1} = a_{n-1}(1+t)^2$

القيمة المحصلة للدفعة الأخيرة هي : $Á_n = a_n(1+t)$

ومنه تصبح القيمة المحصلة الكلية كما يلي :

$$\mathbf{A_n = A_1 + A_2 +} A_3 + \dots\dots + A_{n-2} + A_{n-1} + A_n$$

وبتعويض كل قيمة محصلة جزئية بما تساويها نجد:

$$Á_n = a_1(1+t)^n + a_2(1+t)^{n-1} + a_3(1+t)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(1+t)^2 + a_n(1+t)^1$$

وبما أن الدفعات متساوية فان :

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots\dots = a_n$$

ومنه تصبح المعادلة السابقة كما يلي :

$$Á_n = a(1+t)^n + a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^{n-2} + \dots + a(1+t)^2 + \dots$$

و بما أن الجمع عملية تبديلية فيمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي :

$$Á_n = a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-3} + \dots + a(1+t)^2 + a(1+t) + a(1+t)^n$$

نلاحظ بان الطرف الأيمن من المعادلة يمثل متتالية هندسية متزايدة بأساس $r = (1+t)$،
حدها الأول $\mu_1 = a(1+t)$، وحدها الأخير $\mu_n = a(1+t)^n$ ، وعدد حدودها n .

وبالتعويض في قانون مجموع المتتالية الهندسية: $S = \mu_1 \frac{n-1}{r-1}$

نجد العلاقة الأساسية للدفعات المتساوية في بداية المدة كما يلي:

$$Á = a(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1} \Rightarrow \boxed{Á = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}(1+t)} \dots\dots\dots(1)$$

حيث القيمة $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ نتحصل عليها من الجدول المالي رقم (03) أو نستعمل الآلة الحاسبة العلمية.

نلاحظ بان علاقة دفعات التوظيف توظف بفترة إضافية (1+t) عن دفعات السداد a $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ وعليه يمكن إعادة كتابة العلاقة رقم (1) كالآتي :

$$Á = A_n(1+t) \dots\dots\dots(2)$$

حيث A_n تمثل القيمة المحصلة لدفعات السداد.

ومن العلاقة (1) يمكن استخراج علاقة أخرى تؤدي إلى نفس النتيجة بضرب حدي بسط العلاقة (1) في القيمة (1+t) :

$$\frac{(1+t)^{n+1} - 1 - t}{t} \Rightarrow \frac{(1+t)^{n}\,(1+t) - (1+t)}{t} = a\ \frac{(1+t)^{n} - 1}{t}(1+t) = a\ \acute{A} = a$$

$$\acute{A} = a\left[\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - \frac{t}{t}\right]$$

$$(3) \ldots\ldots \Rightarrow \acute{A} = a\left[\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1\right]$$

مثال: وظف مبلغ 10000 دج في بداية كل سنة لمدة 10 سنوات بمعدل فائدة سنوي 5 % ، احسب القيمة المحصلة عند نهاية مدة التوظيف.

الحل:

الطريقة الأولى :

$$A = 10000\ \frac{(1{,}05)^{10} - 1}{0{,}05}(1{,}05) = 10000 \times 12{,}577893 \times 1{,}05 = 132067{,}87\ DA$$

الطريقة الثانية:

$$A = 10000\left[\frac{(1{,}05)^{11} - 1}{0{,}05} - 1\right] = 10000 \times [14{,}206737 - 1] = 10000 \times 13{,}206737$$

$$A = 132067{,}37\ DA$$

ب. حساب عناصر القيمة المحصلة:

.حساب قيمة الدفعة: تحسب بطريقتين إما من العلاقة الأولى وهي :

$$\acute{A} = a\ \frac{(1+t)^{n} - 1}{t}(1+t)$$

$$a = \acute{A} \div \frac{(1+t)^{n} - 1}{t}(1+t)^{-1}$$

$$a = \acute{A}\,(1+t)^{-1}\left[\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - t\right]$$

أو تحسب من العلاقة الثانية وهي :

$$\acute{A} = a\left[\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1\right]$$

$$\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t} - 1\right] \quad \Rightarrow a = Á \div$$

مثال : يريد شخص تكوين رأسمال قيمته 300000 دج بتوظيف 10 دفعات ، الدفعة الأولى توظف في بداية السنة الأولى بمعدل فائدة مركبة 5 % ، احسب قيمة الدفعة.

الحل:

الطريقة الأولى:

$$a = A(1+t)^{-1}\left[\frac{t}{1-(1+t)-n} - t\right]$$

$$a = 300000\,(1,05)^{-1}\left[\frac{0,05}{1-(1,05)-10} - 0,05\right]$$

$$A = 300000 \times 0,952381 \times 0,079505 = 22715,7$$

الطريقة الثانية

$$300000 = a\,\frac{(1,05)^{10}-1}{0,05}\,(1,05)$$

$$300000 = a \times 12,577893 \times 1,05$$

$$a = \frac{300000}{13,206787} = 22715,6 \text{ DA}$$

.حساب عدد الدفعات:

تحسب إما من العلاقة :

$$Á = a\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\,(1+t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+t)^{n}-1}{t} = \frac{Á}{a}(1+t)^{-1}$$

أو تحسب من العلاقة الثانية التالية :

$$Á = a\,\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t} - 1$$

$$= \frac{Á}{a} + 1\,\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t} \quad \Rightarrow$$

مثال1 :

يريد تاجر تكوين رأسمال قيمته 482580,44 دج بتوظيف 20000 دج في بداية كل سنة بمعدل فائدة سنوي 7% ، كم يلزمه من دفعة لذلك ؟

الحل :

الطريقة الأولى :

$$482580{,}44 = 20000\ (1{,}07)\ \frac{(1{,}07)^{n}-1}{0{,}07}$$

$$\frac{(1{,}07)^{n}-1}{0{,}07} = \frac{482580{,}44}{21400}$$

$$n = 14 \Rightarrow 22{,}550488 = \frac{(1{,}07)^{n}-1}{0{,}07}$$

الطريقة الثانية :

$$\frac{(1{,}07)^{n+1}-1}{0{,}07} = \frac{482580{,}44}{20000} + 1$$

$$25{,}129022 = \frac{(1+t)^{n+1}-1}{t} \Leftarrow$$

من الجدول المالي رقم 03 وعند القيمة 25,129022 والمعدل 7 % نجد :

$$15 = n + 1 \quad n = 14 \Leftarrow$$

مثال 2:

ما هو عدد الدفعات اللازمة لتكوين رأسمال قدره 500000 دج بدفعات متساوية ، الدفعة الأولى توظف في بداية السنة الأولى، قيمة الدفعة 50000 دج، بمعدل فائدة سنوي 6 % .

الحل:

$$500000\ [\ = 50000\ \left[\frac{(1{,}06)^{n+1}-1}{0{,}06} - 1\right]$$

$$\frac{(1{,}06)^{n+1}-1}{0{,}06} = \frac{500000}{50000} + 1$$

$$\frac{(1{,}09)^{n+1}-1}{0{,}06} = 11$$

$$8 < n < 7 \Leftarrow \frac{(1{,}06)^{n+1}-1}{0{,}06} = 11$$

بما أن عدد الدفعات عدد غير صحيح فلدينا ثلاثة حلول لإيجاد عدد الدفعات :

الحل الأول:

ندفع 7 دفعات قيمة كل واحدة منها اكبر من 50000 دج ، ما هي قيمة الدفعة الجديدة ؟:

$$500000 = a\ \frac{(1,06)^7-1}{0,06}(1,06)$$

$$500000 = 8,393838 \times 1,06 \times a$$

$$a = \frac{500000}{8,897468} = 56195,76 \text{ DA}$$

الحل الثاني:

ندفع 8 دفعات قيمة كل واحدة منها اقل من 50000 دج، ما هي قيمة الدفعة الجديدة ؟

$$500000 = a\,\frac{(1,06)^8-1}{0,06}(1,06) \Rightarrow 500000 = 9,897468 \times 1,06 \times a$$

$$a = \frac{500000}{10,491316} = 47658,46 \text{ DA}$$

الحل الثالث:

ندفع 7 دفعات بقيمة 50000 دج ، ما هي قيمة الدفعة الأخيرة ؟

$$A_7 = 50000\,\frac{(1,06)^7-1}{0,06}(1,06) = 50000 \times 8,393838 \times 1,06 = 444873,41$$

إذن القيمة 444873,41 اقل من القيمة 500000 دج ، فالفرق بينهما يضاف مع الدفعة الأخيرة وقيمته هي : 500000 دج - 444873,41 دج = 55126,59 دج .

.حساب معدل التوظيف:

يحسب من العلاقة :

$$\acute{A} = a\ \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} = \frac{\acute{A}}{a} + 1$$

مثال 2 : اشترى تاجر جهازا قيمته 200000 دج ، يسدد بواسطة دفعات ثابتة لنهاية السنة ، قيمة الدفعة 20000 دج بمعدل فائدة سنوي 7 % ، كم يلزم من دفعة لتسديد ثمن الجهاز .

الحل :

$$\frac{1-(1,07)^{-n}}{0,07} = \frac{200000}{20000} \Rightarrow \frac{1-(1,07)^{-n}}{0,07} = 10 \Rightarrow 17 < n < 18$$

بما أن عدد الدفعات عدد غير صحيح فلدينا ثلاثة حلول لإيجاد عدد الدفعات :

الحل الأول : ندفع 17 دفعة بقيمة اكبر من 20000 دج للدفعة ونبحث عن قيمة الدفعة الجديدة .

$$a = 200000 \frac{0,07}{1-(1,07)^{-17}} = 200000 \times 0,102425 = 20485 \text{ DA}$$

الحل الثاني : ندفع 18 دفعة بقيمة اقل من 20000 للدفعة ونبحث عن قيمة الدفعة الجديدة .

$$a = 200000 \frac{0,07}{1-(1,07)^{-18}} = 200000 \times 0,099413 = 19882,6 \text{ DA}$$

الحل الثالث : ندفع 17 دفعة بقيمة 20000 دج للدفعة والباقي يدفع مع الدفعة الأخيرة .

$$V_{17} = 20000 \frac{1-(1,07)^{-17}}{0,07} = 20000 \times 9,763223 = 195264,6 \text{ DA.}$$

ومنه نلاحظ بان القيمة 195264,6 دج اقل من 200000 دج ، ومنه الفرق بينهما والذي قيمته 4735,4 دج يدفع مع الدفعة الأخيرة.

ج. حساب المعدل " t ":

يحسب كالآتي :

$$V_0 = a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{V0}{a}$$

مثال: دين قيمته 75504,891 دج يسدد على أساس 10 دفعات متساوية لآخر المدة، قيمة الدفعة 11000 دج، احسب معدل الفائدة السنوي المطبق.

الحل:

$$\frac{75504{,}891}{11000}=\frac{1-(1+t)^{-10}}{t}=6{,}864081$$

من الجدول المالي رقم 04 وعند n = 10 وعند القيمة 6,864081 نجد t = 7,75 %

المحور السابع ؛تمارين مقترحة مع الحلول

سلسلة تمارين الفائدة البسيطة :

التمرين الأول :

اقترض شخص مبلغ مالي من أحد البنوك التجارية قدره :40000 دج لمدة سنتين وبمعدل فائدة بسيطة تساوي 04% .

- أحسب جملة هدا المبلغ؟

التمرين الثاني :

استثمر شخص مبلغين من المال مجموعهما 20000دج ، المبلغ الأول استثمر لمدة 6 أشهر والمبلغ الثاني استثمر لمدة 10 أشهر .

- ادا علمت أن مجموع الفائدتين المحصل عليهما تساويان 760 دج ومعدل الفائدة هو 6% .
- احسب أصل كل مبلغ ؟

التمرين الثالث :

وظف مبلغان ماليان في بنك لمدة سنة .مجموعهما 13200دج فادا علمت أن المبلغ الأول يساوي 6/5 من المبلغ الثاني وان القيمة المكتسبة للمبلغ الأول تساوي 6300دج بمعدل فائدة بسيطة اكبر ب واحد بالمئة من معدل فائدة المبلغ الثاني .

- احسب المبلغ الأول ؟
- معدلي الفائدتين المطبقتين؟

التمرين الر ابع :

-أحسب راس المال الذي بلغت جملته 2476.6 دج أودع في بنك بتاريخ 1985/01/01 بمعدل قائدة 09% ليسحب في تاريخ 04/30 من نفس السنة.

التمرين الخامس :

اشترى تاجر سلعا بمبلغ 24000دج وطبق عليها 20% كهامش على الربح عند بيعها دلك وظف سعر البيع مضافا إليه مبلغ أخر بمعدل فائدة بسيطة 04% .ليتحصل بعد 144 يوم على جملة تساوي 50800دج.

- احسب المبلغ المضاف ؟

التمرين السادس :

أودعت في البنك ثلاث مبالغ مالية لمدة سنتين بمعدلات فائدة بسيطة سنوية 5%.4%.3% على التوالي .جملة المبالغ الثلاث هي : 412320دج.

-ادا علمت أن المبلغ الأول يساوي 5/8 من المبلغ الثاني .

- احسب القيمة الاسمية لكل مبلغ ؟

- إدا علمت أن المبلغ الأول اكبر من الثاني ب 4000دج احسب الفائدة الإجمالية بعد تحديد كل المبالغ .

حلول التمارين الخاصة بالمحور الاول (الفائدة البسيطة) :

$$\boxed{I=c.t.n}$$

$$\boxed{cn=c+I}$$

حل التمرين الأول :

C=40000 / n=2 ans / t=4%

حساب جملة المبلغ :

I=40000.2.0.04

I=3200da

Cn=40000+3200

Cn =43200da

حل التمرين الثاني :

$C_1+c_2=20000$

$t_1=6$ moi / $t_2=10$moi

$I_1+I_2=760$ / $n=6\%$

$C_2=20000-c_1$

$I_1=c_1.t_1.n_1$

$I_1=0.03c_1$

$I_2=c_2.t_2.n_2$

$I_2=(20000-c_1)\frac{10}{12}.\frac{6}{100}$

$I_2=10000-0.05c_1$

$I_1+I_2=760$

$760=0.03c_1+10000-0.05c_1$

$760=10000+0.02c_1$

$\mathbf{C_1=12000da}$	$\mathbf{C_2=8000da}$

حل التمرين الثالث :

$C1+c2=13200$ / $c1=\frac{5}{6}c2$

$\frac{5}{6}c2+c2=13200$

$C2=7200da$

$C1=6000da$

حساب معدل الفائدتين :t1.t2

Cn1=6300

Cn1=c1+ (c.n.t) =6300

6300=6000+ (6000.1.t)

6300=6000+6000t1

$t_1=0.05$

ادن :

$\boxed{t_1=5\%}$

$\boxed{t_2=4\%}$

حل التمرين الرابع :

n=1/1/1985.........30/4/1985 t=9% Cn=2476.6

حساب راس المال :c= ?

اولا : حساب المدة n

1985 سنة صحيحة لأنها لا تقبل القسمة على 4 وبالتالي شهر فيفري عدد أيامه 28 يوم.

المدة من 1985/1/1 إلى 1985/4/30 =119يوم

Cn=c+(c.n.t)

2476.6=c=0.029c

$\boxed{C=2406.8 \text{ da}}$

حل التمرين الخامس :

ثمن الشراء=24000 نسبة الهامش على الربح = 20 % $c=c_1+c_2$

C_1هو ثمن البيع c_2 هو الثمن المضاف $t=4\,\%$ $cn=50800$

$$\text{نسبة الهامش على الربح} = \frac{\text{ثمن البيع} - \text{ثمن شراء}}{\text{ثمن البيع}}$$

$$0.2 = \frac{\text{ثمن البيع} - \mathbf{24000}}{\text{ثمن البيع}}$$

$C_1=30000da$

$Cn=c+(c.\frac{144}{360}.0.04$

ادن : $50800=c+0.016c$

$\boxed{C=50000da}$ $\boxed{C_2=30000da}$

حل التمرين السادس :

من اجل حساب $c_1.c_2.c_3$ لدينا : $n=2ans$ $cn=412320da$

$c_3=\frac{8}{5}c_2$ $c_1=\frac{3}{5}c_2$ $t_3=3\%$ $t_2=4\%$ $t_1=5\%$

$412320=(c_1+(c_1.n_1.t_1)+(c_2+(c_2.n_2.t_2)+(c_3+(c_3.n_3.t_3)$

$412320=1.1c_1+1.08c_2+1.06c_3$

بالتعويض : $412320 =0.66c_2+1.08c_2+1.696c_2$

ادن: $\boxed{C_2=120000da}$ $\boxed{C_1=72000da}$ $\boxed{C_3=192000da}$

ومنه : $\boxed{Cn_2=129600da}$ $\boxed{Cn_1=79200da}$ $\boxed{Cn_3=203000da}$

سلسلة تمارين خاصة بالخصم :

التمرين الأول :

- أحسب القيمة الحالية لمبلغ 580000دج مستحق الدفع بعد 12 شه بمعدل فائدة 6 %.

التمرين الثاني :

في 2010/05/24 اقترض شخص مبلغ 19700دج ليسدد جملة الدين بعد 90 يوم بمعدل فائدة بسيطة 4.5 %.

التمرين الثالث :

في 12 ماي افترض احد الأشخاص من مؤسسة مالية مبلغ قده 154000دج ليسدده في أخر يوم من نفس السنة وهدا بمعدل فائدة بسيطة 6%.

- في 18جويلية سدد ما قيمته 54000دج
- في 18 سبتمبر سدد هرة اخرى ما قيمته 20000دج
- في 18 نوفمبر سدد كدلك مبلغ 45000دج.
  - احسب المبلغ المتبقي تسديده؟

التمرين الرابع:

ورقة تجارية قيمتها الاسمية 1240دج مستحقة الدفع في 15 جوان و أخرى 680دج تستحق في 30جوان .

خصمت لدى البنك في أول ماي بنفس الشروط:

- ادا علمت أن العمولة تساوي 8/1% وان القيمة المكتسية الصافية للورقتين 1906.33دج.
- احسب معدل الخصم ؟

التمرين الخامس :

بتاريخ 2010/05/25 كانت القيمة الحالية لورقة تجارية خصمت بمعدل 4%والمقدرة بمبلغ 8934دج، لو خصمت هده الورقة قبل تاريخ الاستحقاق فان الخصم اقل من الأول بمبلغ 36 دج

- احسب القيمة الاسمية للورقة التجارية ،وحدد تاريخ استحقاقها؟

التمرين السادس :

خصم شخص ورقتين تجاريتين بمعدل 6% الأولى تستحق الدفع بعد 35 يوم والثانية بعد 45 يوم ، القيمة الاسمية للورقة الثانية تمثل 5/2 من القيمة الاسمية للورقة الأولى.

- احسب القيمة الاسمية للورقتين مع العلم أن قيمة الخصم الإجمالي هو 1961دج.

التمرين السابع:

قدمت ورقة تجارية للخصم في بنك الأول قيمتها الاسمية 4800دج بمعدل خصم 6%، وعمولة ¼% وعمولة اخرى 0.8دج لتعطي قيمة صفية 4770دج.

- احسب مدة الخصم؟

نفرض أن نفي الورقة قدمت للخصم في البنك الثاني وبالشروط التالية :

عمولة التحصيل 3/1%، عمولات اخرى 5/1 ‰. القيمة الصافية 4770.2دج.

- احسب معدل الخصم الجديد؟

حلول تمارين الخاصة بالخصم:

القيمة الاسمية ← **vn**

القيمة الحالية ← **va**

$$\boxed{Vn=va(1+n.t)}$$

$$\boxed{E=vn.n.t}$$

E=vn-va

في حالة عدم وجود عمولات.

AGIO=E+ عمولات

AGIO=vn-va

حل التمرين الأول :

Vn=580000da n=12moi t=6% va= ?

Vn=va(1+n.t) ⟶ va=58000/1+1.0.06 ⟶ $\boxed{\textbf{va=547169.81da}}$

حل التمرين الثاني :

تاريخ الاقتراض: 1990/05/24 n=90jour

t=4.5% Va=19700da

Vn=va(1+n.t)

Vn=19700(1+0.045.90/360) ⟶ $\boxed{\textbf{vn =19921.62da}}$

تاريخ الاستحقاق :من تاريخ 5/24 إلى 5/31= 07 أيام

شهر جوان 30 يوم

شهر جويلية 31 يوم

شهر أوت 22 يوم

لكي نتحصل على 90 يوم ادن تاريخ الاستحقاق هو : 22 أوت 2010

حل التمرين الثالث :

t=6% Va=154000da

المدة من 12 ماي إلى 31ديسمبر= 233يوم كما هو معروف أول يوم لا يحسب وآخر يوم يحسب.

Vn=15400(1+0.06.233/360)

$\boxed{\textbf{Vn=129358.66}\text{da}}$

جملة المبالغ الكلية المدفوعة:

- حساب جملة المبلغ المسدد في 07/18 $Va1=54000da$.

عدد الأيام من 05/12 إلى 07/18 =67 يوم

$$\boxed{Vn_1=54603da}$$

- حساب جملة المبلغ المسدد في 09/18 $va_2= 20000da$

غدد الأيام من 07/18 إلى 09/18=62 يوم

$$\boxed{Vn_2=20206.66da}$$

- حساب جملة المبلغ المسدد في 11/18 $va_3=45000da$

عدد الأيام من 09/18 إلى 11/18 = 61 يوم

$$\boxed{Vn_3=54549da}$$

- حساب الرصيد المتبقي :159980.33 -(45549+20206.66+54603)

الرصيد المتبقي هو : 30621.67دج

حل التمرين الرابع :

vn2=680da vn1=1240da Va==1906.33da

مدة الخصم للورقة1من 05/1 إلى 06/15 =45 يوم

مدة الخصم للورقة 2من 01/01 إلى 06/30 = 60 يوم

العمولة =(680+1240).1/8%

العمولة =2.4دج

AGIO=1240+680-1906.33

AGIO=13.67da

من جهة اخرى نعلم أن :

$E=AGIO$+ العمولات

$E=13067-2.4=11.27da$

$11.27=(1240.t.45/360)+(680.t.60/360)$

$11.27=155t+113.33t$

$t=0.042$ ادن : $\boxed{t=4.2\%}$

حل التمرين الخامس:

$Va=8934$ $n=30j$ $E1-E2=36da$ $t=4\%$

حساب vnالقيمة الاسمية :

$E1=vn-3934$. $E2=vn.0.04.\frac{30}{360}$

$36=(vn-8934)-(vn.\frac{120}{36000})$

$\boxed{Vn=9000da}$

حساب تاريخ الاستحقاق :

$E1=vn.n.t=vn-va$ $9000-8934=9000.4.n/36000$

$66=36000n/36000$ $\longrightarrow$ $\boxed{n=66 \text{ jour}}$

- تاريخ استحقاقها يكون بعد66 يوم بعد 25 أوت إي ما يصادف تاريخ 30اكتوبر 2010.

حل التمرين السادس :

$n_1=35j$. $n_2=45j$. $t=6\%$.$vn_2=2/5vn_1$. $E_1+E_2=1961$

حساب $vn_1.vn_2$ ؟

$E=vn.n.t$

$1961=(vn_1.\frac{35}{360}.0.06)+(vn_2.\frac{45}{360}.006)$

بالتعويض :1961= /36000(vn_1 108 +210vn_1)

Vn_1=222000da **vn_2=88800da**

حل التمرين السابع :

Vn=4800 t=6%

العمولة =1.2دج

العمولة الاخرى=0.8دج

نعلم أن AGIO= vn-va

AGIO= 4800-4770=30da

E= AGIO -العمولات

E=30-1.2+0.8

E=28da

E=vn.t.n

28=4800.0.06.n/360

n=35jour

عمولة التحصيل =$4800.\frac{1}{3000}$=1.6دج

عمولات اخرى = $4800.\frac{1}{5000}$=0.96دج

AGIO=4800-4770.2=29.8da

E= AGIO -العمولات

E=27.24 $27.24=4800.t.\frac{35}{360}$ $\longrightarrow$ **t=5.8%**

سلسلة تمارين حول الفائدة المركبة:

مثال: اتفق شخص مع البنك على إيداع مبلغ 2000 دج في نهاية كل سنة إبتداء من سنة 1990 حتى يتمكن من شراء عقار في نهاية 2010، فإذا علمت أنه توقف عن الإيداع بعد دفع 12 دفعة ، أوجد جملة الدفعات في نهاية 2010، إذا كان معدل الفائدة الذي يحتسبه البنك هو 4% .

الحل:

C = 2000 دج

i = 4%

-حساب الجملة:

نلاحظ أن الشخص قام بدفع 12 دفعة فقط وتوقف عن الإيداع بمعنى أن يتم حساب جملة الدفعات العادية في نهاية الدفعة 12 (من سنة 1990 إلى غاية نهاية 2001) كما يلي:

$$S = C[\frac{(1+i)^n - 1}{i}]$$

$$S = 2000[\frac{(1+0.04)^{12} - 1}{0.04}]$$

$$S = 2000(15.025805)$$

$$\boxed{S = 30051.61 \text{ DA}}$$

الملاحظ أيضا أن الشخص لم يقم بسحب جملته المكونة من دفع 12 دفعة(التي أصبحت مبلغ واحد وهو 15025.80) وإنما أبقاها في البنك إلى غاية 2010، بمعنى أن في نهاية 2010 سيتم حساب جملة مبلغ واحد لمدة 9 سنوات(2002 إلى غاية 2010) كما يلي:

$$S = C(1+i)^n$$

$$S = 30051.61(1+0.04)^9$$

$$S = 30051.61(1.423311)$$

$$\boxed{S = 42772.78 \text{ DA}}$$

مثال: أودع شخص مبلغ 2500 دج في البنك في بداية كل سنة إبتداء من سنة 1988 وذلك لمدة 10 سنوات، ثم توقف عن الإيداع، ما هو رصيد هذا الشخص في آخر ديسمبر 2002، علما أن معدل الفائدة المركبة 3% سنويا.

الحل:

C = 2500 دج

i =3 %

n =10 دفعات

-حساب الجملة:

نلاحظ أن الشخص قام بدفع دفعات سنوية فورية (بداية المدة) لمدة 10 سنوات(1988-1997) ثم توقف عن الإيداع، بمعنى أنه يتم حساب جملة دفعات غير عادية أو فورية في نهاية 10 سنوات كما يلي:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}\left[\frac{\lfloor(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}+1}-1\ \rfloor}{\mathrm{i}} - \mathbf{1}\right]$$

$$\boldsymbol{S} = 2500\left[\frac{\lfloor(1+0.03)^{10+1}-1\ \rfloor}{0.03} - \mathbf{1}\right]$$

$$\mathrm{S} = 2500(12.807795 - 1)$$

$$\mathrm{S} \boxed{= 29519.48\ \ \mathrm{DA}}$$

أيضا الشخص لم يقم بسحب هذه الجملة المكونة في نهاية السنة العاشرة 29519.48DA وإنما أبقاها في البنك إلى غاية 2002 بمعنى لمدة 5 سنوات (1998-2002)، بمعنى يتم حساب جملة مبلغ واحد وهو 29519.48 موظف لمدة 5 سنوات، كما يلي:

$$\mathrm{S} = \mathrm{C}(1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}}$$

$$S = 29519.48(1 + 0.03)^{5}$$

$$\mathrm{S} = 29519.48(1.159274)$$

$$S = 34221.16\ DA$$

مثال: اشترى تاجر بضاعة وسدد ثمنها كالتالي:

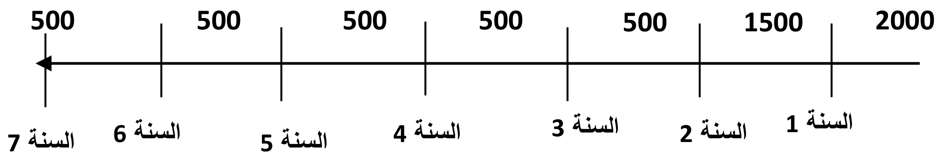
2000 دج في نهاية السنة من تاريخ الشراء

1500 دج بعد سنة من سداد المبلغ الأول

500 دج تدفع سنويا لمدة 5 سنوات تدفع الأولى منها بعد سنة من سداد المبلغ الثاني

أحسب جملة ما يسدده التاجر في نهاية المدة، إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 10% سنويا.

الحل:



-حساب الجملة:

نلاحظ أن الجملة التاجر متكونة من جملة مبلغ واحد هو 2000 دج لمدة 6 سنوات(من نهاية السنة الأولى إلى غاية السنة السابعة أي تاريخ حساب الجملة) + جملة مبلغ واحد هو 1500 دج لمدة 5 سنوات + جملة دفعات (مبلغ الدفعة الواحدة 500 دج سنويا)

أي:

$$S = 2000(1+0.1)^6 + 1500(1+0.1)^5 + 500[\frac{(1+0.1)^5-1}{0.1}]$$

$$S = 2000(1.771561) + 1500(1.61051) + 500(6.1051)$$

$$S = 3543.12 + 2415.76 + 3052.55$$

$$\boxed{S = 9011.43\ DA}$$

سلسلة تمارين حول الدفوعات :

التمرين الأول:

ماهي القيمة المكتسبة لـ 10 دفعات، قيمة الدفعة الواحدة 28000 دج حيث الأولى في نهاية السنة الأولى إذا كان المعدل المطبق6,6%.

التمرين الثاني:

رأسمال قيمته 268331,52 يتكون من 12 دفعة ثابتة ومتساوية بمعدل 7 % مع العلم أن الدفعة الأولى سددت في نهاية السنة الأولى ، ماهي قيمة الدفعة الثابتة؟

التمرين الثالث:

ماهي عدد الدفعات الثابتة اللازم تسديدها إذا كانت قيمة الدفعة 36000 دج للحصول على راس مال 350000 دج بمعدل فائدة 6 % ؟.

التمرين الرابع:

- ماهي القيمة المكتسبة لـ 7 دفعات قيمة الدفعة الواحدة 16000 دج حيث تدفع الأولى في بداية السنة الأولى، إذا كان معدل التوظيف 5,4 %.

التمرين الخامس:

تم دفع 12 دفعة ثابتة ومتساوية للاستثمار، قيمة الدفعة الواحدة 35000دج ، لتكوين رأس مال 742382,72 دج.

- ما هو معدل الفائدة ؟

التمرين السادس :

- ماهي القيمة الحالية لدفعات الاستثمار عددها 16 دفعة ثلاثية إذا كانت قيمة كل دفعة هي 24500 دج ومعدل فائدة مركبة ثلاثي 5 % ؟

التمرين السابع:

- ماهو عدد الدفعات المخصومة بمعدل فائدة مركبة 10 % للحصول على قيمة حالية 330000دج يوم سداد أول دفعة إذا كانت قيمة الدفعة 26000دج.

حلول التمارين الخاصة بالدفوعات :

القيمة المكتسبة لدفوعات السداد ← $\boxed{A=a\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t}}$

القيمة الحالية لدفوعات السداد ← $\boxed{v=a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$

حل التمرين الأول :

n=10 a=28000da t=6.6% A= ?

$$A= 28000\,\frac{(1+0.066)^{10}}{0.066}$$

A=379628.17da

حل التمرين الثاني :

A=268331.52 n=12moi t=7% a= ?

$$A= a\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t}$$

$$268331.52= a\,\frac{(1+0.07)^{12}-1}{0.07}$$

$$\boxed{a= 15000da}$$

حل التمرين الثالث :

A=350000da a=36000da t=6% n=?

$$350000=36000\frac{(1+0.06)^{n}-1}{0.06}$$

$$(1.006)^{n}-1=0.58333$$

n log(1.006)=log1.58333

n0.0253058=0.19957 $\longrightarrow$ n=7.88

- بما أن n يجب أن يكون عدد صحيح فانه يوجد ثلاث حلول أي أن nمحصورة بين العدد 7 و8.

الحالة الاولى n=7 : a >36000	الحالة الثانية n=8 : a<36000	الحالة الثالثة n=7: a=36000
a=41697.25da	a=35362.25da	A=302178.13da

بما أن المبلغ 302178.13دج اقل من قيمة راس المال المقدر ب350000دج فان الباقي والمقدر ب : 47821.87دج يدفع في أخر دفعة .

القيمة المكتسبة لدفوعات الاستثمار $\longrightarrow$ $\boxed{\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{a}\ (1+t)\ \frac{(1+t)^{n}-1}{t}}$

القيمة الحالية لدفوعات الاستثمار $\longrightarrow$ $\boxed{\blacksquare\bar{\mathbf{V}}=\mathbf{a}\ (1+t)\ \frac{(1+t)^{n}-1}{t}}$

حل التمرين الرابع:

a=16000 n=7 t=5.4% $\bar{A}$= ?

$$\bar{A}=16000\ (1+0.054)\ \frac{(1+0.054)^{7}-1}{0.054}\longrightarrow\boxed{\bar{A}=138988.92\ da}$$

حل التمرين الخامس:

A=742382.72 a= 35000da

–

$$A=a\ (1+t)\ \frac{(1+t)^{n}-1}{t}$$

$\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\ (1+t)=$ $\boxed{t=8.5\%}$ $+\frac{742382.72}{35000}=\frac{A}{a}$من الجدول المالي ادن :

حل التمرين السادس :

حساب عدد الدفوعات n ؟

$$=6.38297\ \frac{330000}{47000}(1.1)^{-1} \longrightarrow \frac{V}{a}(1+t)^{-1} = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

من الجدول المالي رقم03 فان n محصورة بين العدد 10 و 11

- بما أن n يجب أن يكون عدد صحيح فانه يوجد ثلاث حلول أي أن nمحصورة بين العدد 10 و11.

الحالة الأولى : n=10 a >47000	الحالة الثانية :n=11 a<47000	الحالة الثالثة: n=10 a=47000
a=48823.45da	a=46188.85da	A=317674.11da

بما أن المبلغ 317674.11دج اقل من قيمة راس المال المقدر ب330000دج فان الفرق بينهما والمقدر ب : 12325.89دج. يدفع في آخر دفعة .

قائمة المراجع:

- بولعيد بعلوج ، **مدخل الى الرياضيات المالية**، منشورات جامعة منتوري قسنطينة، الجزائر،2010.
- باديس بوغرة، **مدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها**، دار الهدى للطباعة والنشر والتوزيع، عين مليلة، 2013.
- إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، **رياضيات التمويل والاستثمار**، الطبعة الأولى، دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية، مصر، 2015.
- قنان إبراهيم، **الرياضيات المالية** ، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2016.
- منضال الجوري، **مقدمة في الرياضيات المالية**، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2018.
- شقيري موسى نوري وآخرون، الرياضيات المالية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2018.

المراجع باللغة الأجنبية:

_ Hamini Allal, Mathématiques Financières, OPU, tome 1&2, Alger, 2005

_ Calculs bancaires, Hervé LE BORGNEISBN : 978-2-7178-4606

_ Boissonade M., Mathématiques financières, Armand Colin, 1998.

_ Justens Daniel, Rosoux Jaqueline, Introduction à la mathématique financière, De Boeck University,1995.

http://gl.ml.free.fr/ML/COURS/080117_Transp- _ Cours, Michelle LAUTON INTSIM_COMP.doc

- Benjamin Legros, Mini Manuel de mathématiques financière,Dunod,Paris, 2011.