الجمهـــــورية الجـزائـــــرية الديـــــــــــــمقراطية الشعبيـــــــــة

وزارة التعليـــــــــــــم العـالـــــــي و البحث العلمي

جامعة الدكتور مولاي الطاهر سعيدة

كلية العلوم الاقتصادية ،العلوم التجارية و علوم التسيير

مؤلف بيداغوجي في :

الإحصاء 2

(دروس و أمثلة)

مقدمة لطلبة السنة الأولى جدع مشترك

من اعداد :

الدكتور رفافة براهيم

قسم علوم التسيير

السنة الجامعية 2021–2022

الفهرس

مقدمة

تهذف هذه المطبوعة في مقياس الإحصاء الرياضي لتقديم دروس و امثلة مبسطة لطلبة السنة الأولى جدع مشترك لميدان العلوم الاقتصادية، حيث يعد الإحصاء الرياضي مقياس مهم في مواصلة مسار الدراسي في كل تخصصات العلوم الاقتصادية ، ويعتبر احد اهم المعارف التي يجب ان تكتسب لدراسة عدة مقاييس أخرى في السنوات القادمة كالإحصاء الاستدلالي، الاقتصاد القياسي، تحليل البيانات ... الخ .

اما من الناحية البحثية فيعد هذا المقياس ضرورة لاتمام اغلبية البحوث العلمية في ميدان العلوم الاقتصادية ويعد وسيلة أساسية وليس غاية في تنفيد حل المشكلات البحثية، ومن بين اهم المحاور التي يعالجها هذا المقياس كيفية حساب الاحتمالات وهو الجزء الأهم لهذا المقياس.في حقيقة الامر يعد مقياس الإحصاء الرياضي احد فروع الرياضيات التطبيقية لذلك يجب على الطالب الالمام نوعا ما بالمفاهيم الرياضية لاجل استعاب هذا المفياس على احسن وجه ، حيث سنحاول قدر المستطاع تبسيط المفاهيم الرياضية في هذه المطبوعة من اجل فهم هذا المقياس.

من الناحية البيداغوجية ، فلقد حاولنا في هذه المطبوعة الاعتماد على عدة نقاط بيداغوجية لكونها موجهة للطلبة من بينها :

- الايجاز و الاختصار في طرح الدروس و ذلك باعطاء أفكار مباشرة و دون الاطالة في الطرح.
- وضع أمثلة مبسطة مع الحلول بطريقة منهجية بسيطة.
- برهنة جل القوانين و النظريات لهذا المقياس.
- الاعتماد على أشكال لتسهيل الفهم و كذلك التقليل من الكتابة الوصفية.
- الترتيب و التسلسل في الافكار حسب التقدم في الدروس.
- اعتمدنا على مراجع متخصصة في مجال لاحصاء الرياضي
- حاولنا ترجمة غالبية المصطلحات للغة الانجلزية لتسهيل البحث للطلبة في المراجع باللغة الانجلزية.

1 الفصل الاول: المجموعات Sets

1.1 مفهوم المجموعة

تعريف

المجموعة هي قائمة مكونة من عدة عناصر غير مرتبة وبدون تكرار. إذا كان a عنصر من المجموعة A نقول ان a ينتمي الى A ونكتب : $a \in A$ ، في حالة العكس نقول ان a لا ينتمي الى A ونكتب: $a \notin A$

خواص

- المجموعة $\{a, b\}$ هي نفسها $\{b, a\}$ الترتيب غير مهم.
- تتساوى مجموعتين إذا كان لهم نفس العناصر.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \; and \; B \subset A)$$

- هناك مجموعة وحيدة بدون أي عنصر تسمى المجموعة الخالية Empty set ويرمز لها بـ: $\emptyset$
- إذا كانت المجموعة A محتواة في B والمجموعة B محتواة في C فان المجموعة A محتواة في C

$$if \; A \subset B \; and \; B \subset C \; \Longrightarrow A \subset C$$

- المجموعة الاحادية Singleton هي المجموعة المتكونة من عنصر واحد فقط $\{a\}$ ، ويجب التفريق بينها وبين العنصر a.

أمثلة

- مجموعة الاعداد الطبيعية الموجبة $\mathbb{N}^+$
- مجموعة الأعداد الأولية
- المجموعة $\{x^2 - 2 \; / x \epsilon \{2,3,4\}\}$ هي $\{2,7,14\}$

1.2 أنواع المجموعات

ما يهم كثير عن انواع المجموعات هو معيار محدودية المجموعة فنجد أربع انواع:

1- المجموعة المنتهية القابلة للعد: والتي يكون عدد عناصرها محدود أي منتهي ويمكن عده او حسابه مثل مجموعة الاعداد الطبيعية الاقل من عشرة.

2- المجموعة المنتهية الغير قابلة للعد: والتي يكون عدد عناصرها محدود أي منتهي ولا يمكن عده او حسابه مثل مجموعة الاعداد الحقيقية المحصورة في المجال $[0-1]$.

3- المجموعة الغير المنتهية القابلة للعد: والتي يكون عدد عناصرها غير محدود أي غير منتهي ويمكن عده او حسابه مثل مجموعة الاعداد الطبيعية.

4- المجموعة الغير المنتهية والغير قابلة للعد: والتي يكون عدد عناصرها غير محدود أي غير منتهي ولا يمكن عده او حسابه مثل مجموعة الاعداد الحقيقية.

1.3 العمليات على المجموعات

لتكن A وB مجموعتين، من خلالهما يمكن إجراء العمليات التالية:

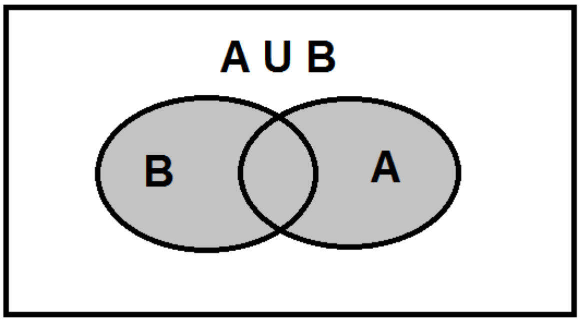
1.3.1 اتحاد مجموعتين Union of sets

يرمز للاتحاد بين مجموعتين A وB بالعبارة $A \cup B$

تعريف

نقول ان العنصر x ينتمي للمجموعة $A \cup B$ ، إذا كان ينتمي الى المجموعة A أو المجموعة B.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ or \ \ x \in B$$



مثال

لتكن المجموعتين $A = \{0,2,4,6,8,10\}$ مجموعة الاعداد الزوجية المحصورة بين0 و10 ،و المجموعة $B = \{1,3,5,7,9\}$ ، مجموعة الاعداد الفردية المحصورة بين 0 و 10، اذن اتحاد المجموعتين يعطينا المجموعة $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$:

1.3.2 تقاطع مجموعتين Intersection of sets

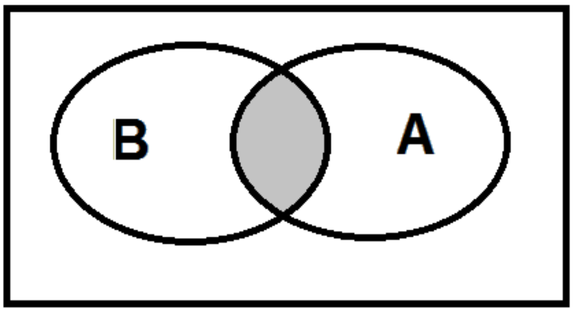
يرمز للتقاطع بين مجموعتين A و B بالعبارة $A \cap B$

تعريف

نقول ان العنصر x ينتمي للمجموعة $A \cap B$ اذا كان هذا العنصر ينتمي الى المجموعة A والمجموعة B.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \ and \ \ x \in B$$

$$\boldsymbol{A \cap B}$$



مثال

لتكن المجموعتين $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$،مجموعة الاعداد الطبيعية المحصورة بين0 و6 ،و المجموعة $B = \{1,3,5,7,9\}$ ، مجموعة الاعداد الفردية المحصورة بين 0 و 10، اذن تقاطع المجموعتين يعطينا المجموعة: $A \cap B = \{1,3,5\}$

خواص التقاطع و الاتحاد ∩ و ∪

- الخاصية التبديلية

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

- الخاصية التجميعية

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$$

- الخاصية التوزيعية

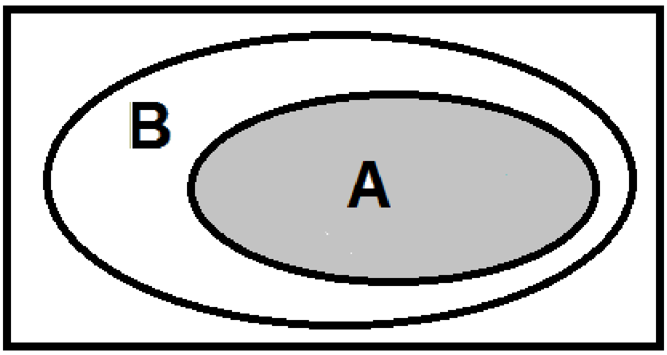
$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

1.3.3 المجموعة الجزئية *Subset*

تعريف

اذا كان عناصر المجموعة A جزء من المجموعة B ، نقول ان المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B ، او بمعنى اخر A محتواة في B ونكتب: $A \subset B$

$$\boldsymbol{A \subset B}$$



خواص المجموعة الجزئية

- المجموعة الخالية $\emptyset$ هي مجموعة جزئية لأي مجموعة كانت.
- أي مجموعة هي مجموعة جزئية لنفسها $A \subseteq A$
- اذا كانت المجموعة A محتواة في B و المجموعة B محتواة في A فان $A = B$
- مجموعة المجموعات الجزئية هو المجموعات الممكن تشكيلها من المجموعة الكلية E ،ويرمز لها بـ: $\mathcal{P}(E)$

مثال

لتكن المجموعتين $A = \{a, b, c\}$، فان مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة A هو:

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

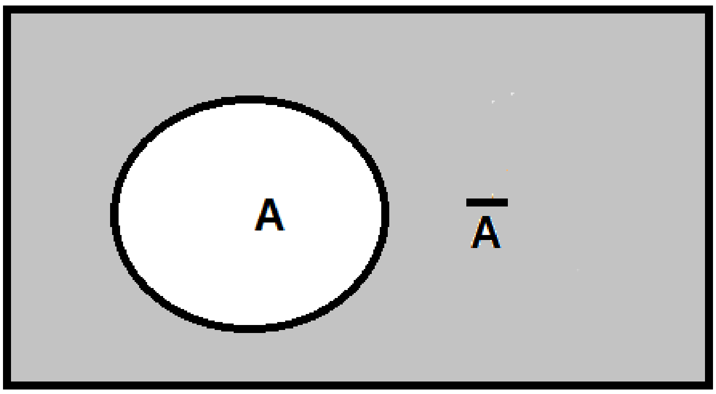
1.3.4 متمم مجموعة *Complement set*

يرمز لمتمم مجموعة A الى الفضاء الكلي E بالرمز A^C أو $\bar{A}$

تعريف

نقوا ان العنصر x ينتمي لمتممة المجموعة $\bar{A}$ ، اذا كان هذا العنصر ينتمي الى الفضاء الكلي E ولا ينتمي للمجموعة A

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in E \;\; and \;\; x \notin A$$



مثال

لتكن المجموعتين $E = \{0,1,2,3,4,5, \dots \dots . n\}$،مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ والمجموعة $A = \{1,2,3,4, \dots \dots n\}$ ، مجموعة الاعداد الطبيعية الغير معدومة $\mathbb{N}^*$، اذن متممة المجموعة A الى المجموعة E ، تعطينا المجموعة المتكونة من عنصر واحد $\overline{A} = \{0\}$

1.3.5 فرق مجموعتين او المتمم النسبي *Sets difference*

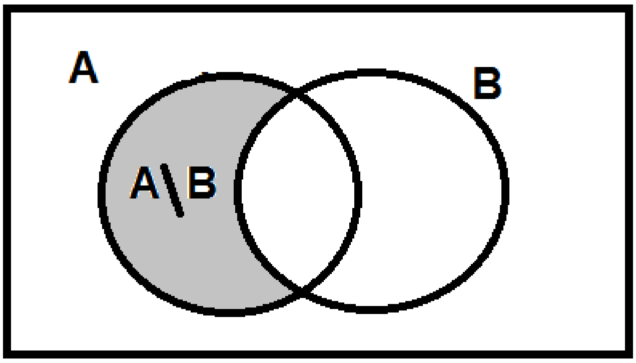
يرمز لفرق مجموعتين بـ: $A\backslash B$

تعريف

لتكنA و B مجموعتين من المجموعة الكلية E ، نعرف المجموعة A ماعدا B بمجموعة العناصر التى تنتمي الى A ولا تنتمي ال B.

$$A\backslash B = A \cap \bar{B} = \{x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

$\boldsymbol{A\backslash B}$



خواص فرق مجموعتين

- $A\backslash B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$
- $(A \cap B)\backslash C = A \cap (B\backslash C) = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$
- $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$

مثال

لتكن المجموعتين $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$، والمجموعة B مجموعة الاعداد الاولية الاقل من 10، نذكر ان العدد الاولي هو العدد الذي يقبل القسمة على عددين مختلفين اي الواحد ونفسه فقط، وعليه المجموعة B تساوي $\{2,3,5,7\}$، اذن فرق المجموعتين A و B ، يعطينا المجموعة :

$A\backslash B=\{0,1,4,6,8,9,10\}$ وهي مجموعة الاعداد الاولية الاقل من عشرة.

1.3.6 الفرق التناظري لمجموعتين Symmetric difference

يرمز للفرق التناظري لمجموعتين بـ: $A\Delta B$

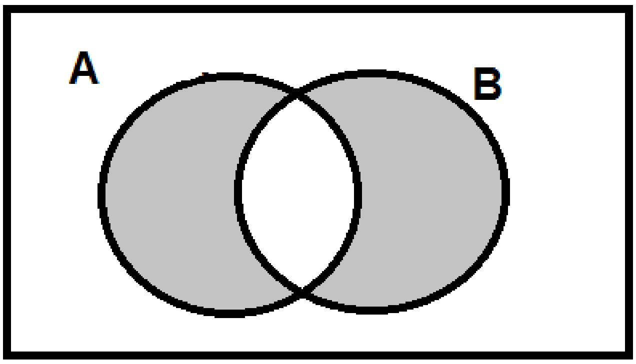
تعريف

لتكن A و B مجموعتين من المجموعة الكلية E ، نعرف المجموعة $A\Delta B$ بمجموعة العناصر التي تنتمي الى A او B ولا تنتمي الA و B معا.

$$A\Delta B=\{x\in A\ or\ x\in B\ /\ x\notin A\ and\ B\}$$

$$A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$$

$\boldsymbol{A\Delta B}$



خواص الفرق التناظري

- $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$
- $A\Delta B=(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)$
- $A\Delta B=\emptyset\Leftrightarrow A=B$

- $A\Delta B = B\Delta A$
- $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C) = A\Delta B\Delta C$
- $A\Delta\emptyset = A$
- $A\Delta B = A\Delta C \Longrightarrow B = C$

مثال

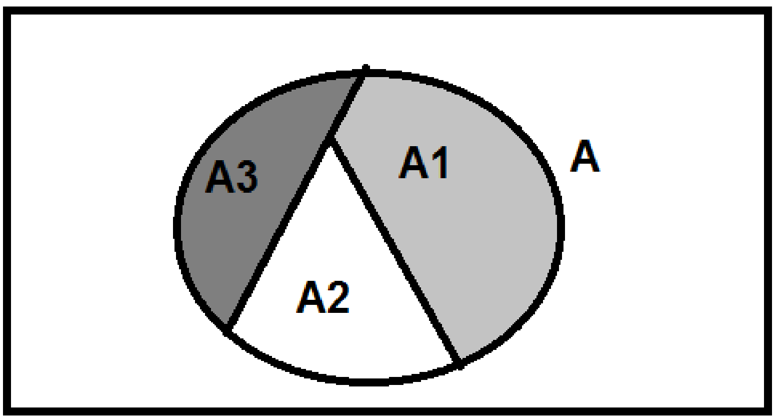
لتكن المجموعتين $A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ مضاعفات العدد 2 الاقل او يساوي 20، والمجموعة $B = \{3,6,9,12,15,18\}$ مضاعفات العدد 3 الاقل او يساوي 20، وعليه الفرق التناظري بين المجموعتين يعطينا المجموعة $A\Delta B = \{2,3,4,8,9,10,14,15,16,20\}$ وهي مجموعة الاعداد اما مضاعفة للعدد 2 او العدد3 ولا نجد فيها الاعداد التي تكون مضاعفة للعددين 2 و 3 معا.

1.3.7 جزئية مجموعة Partition of a set

تعريف

نقول عن المجموعات $(A_i)/\ i \in I$ تشكل جزئية المجموعة E إذا:

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} A_i = E \\ \forall (i,j) \in I^2 \left(i \neq j \quad \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\right) \end{cases}$$



مثال

المجموعة $\{a,b,c\}$ يمكن ان نشكل منها الجزئيات التالية:

$$\big\{\{a\},\{b\},\{c\}\big\}$$
$$\big\{\{a,b\},\{c\}\big\}$$
$$\big\{\{a\},\{b,c\}\big\}$$
$$\big\{\{a,c\},\{b\}\big\}$$
$$\{\{a,b,c\}\}$$

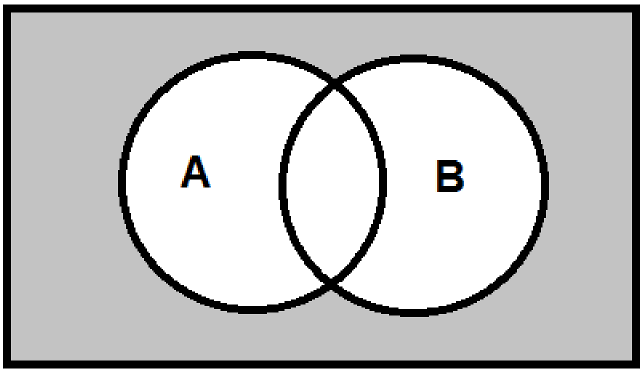
1.3.8 قانون مورغان De Morgan's laws

تعريف

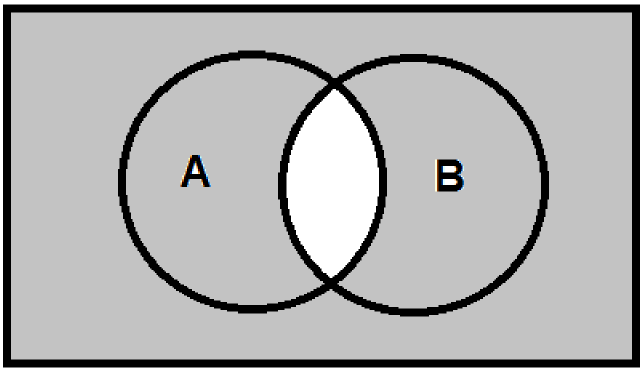
لتكن E مجموعة، من اجل كل مجموعتين A و B من المجموعة E لدينا :

$$\begin{cases} \overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B} \\ \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B} \end{cases}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}$$



$$\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}}$$



مثال

لتكن المجموعة الكلية $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ، والمجموعة $B = \{1,3,5,7,9\}$ مجموعة الاعداد الفردية المحتوات في A والمجموعة $C = \{2,3,5,7\}$ مجموعة الاعداد الاولية المحتوات في A، وعليه:

$$\begin{aligned}\overline{B \cup C} &= \overline{\{1,2,3,5,7,9\}} = \{4,6,8,10\}\\ &= \{0,2,4,6,8,10\} \cap \{0,1,4,6,8,9,10\} = \bar{B} \cap \bar{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{B \cap C} &= \overline{\{3,5,7\}} = \{0,1,2,4,6,8,9,10\}\\ &= \{0,2,4,6,8,10\} \cup \{0,1,4,6,8,9,10\} = \bar{B} \cup \bar{C}\end{aligned}$$

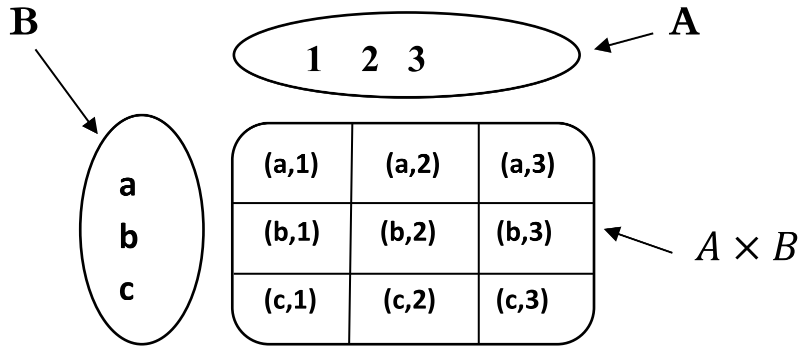
1.3.9 الجداء الديكارتي لمجموعتين Cartesian Product

تعريف

لتكن A وB مجموعتين، نسمي الجداء الديكارتي للمجموعتين A وB مجموعة الازواج (x, y) ، حيث x ينتمي الى A و y ينتمي الى B ،ويرمز له بـ: $A \times B$

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A \; and \; y \in B\}$$

مثال



الجداء الديكارتي للمجموعتين$B = \{a, b, c\}$ و $A = \{1,2,3\}$ هو مجموعة الازواج

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$

2 الفصل الثاني: التحليل التوفيقي Combinatory Analysis

الهدف من التحليل التوفيقي او ما يسمى تقنية العد هو كيفية ايجاد عدد عناصر مجموعة جزئية من مجموعة منتهية مهما كان حجمها، والتحليل التوفيقي ضروري في حساب الاحتمالات حيث يعتمد عليه في حساب الحالات الممكنة والملائمة بعد اجراء تجربة عشوائية.

2.1 أصلي مجموعة Cardinal

تعريف

أصلي مجموعة منتهية Cardinal يرمز له بـ: $\text{Card}(\ .\ )$ ، وهو عدد عناصر هذه المجموعة.

خواص

1- لتكن A وB مجموعتين منتهيتين

- أصلي المجموعات الجزئية لـ: A هو مجموعة منتهية ويساوي:

$$Card\ (\mathcal{P}(A)) = 2^{Card(A)}$$

وأصلية الجداء الديكارتي $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ هو مجموعة منتهية:

$$Card\ (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = Card\ (\mathrm{A}) \times Card\ (\mathrm{B})$$

2- أصلي متمم المجموعة A الى الفضاء E هو:

$$Card\ (\mathrm{A}^C) = Card\ (\mathrm{E}) - Card\ (\mathrm{A})$$

3- أصلي اتحاد مجموعتين مستقلتين أي: $A \cap B = \emptyset$ هو:

$$Card\ (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = Card\ (\mathrm{A}) + Card\ (\mathrm{B})$$

4- لتكن A وB مجموعتين جزئيتين من مجموعة منتهية، فان اصلي اتحادهما هو:

$$Card\ (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = Card\ (\mathrm{A}) + Card\ (\mathrm{B}) - Card\ (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

العلاقة الاخيرة تعتبر حالة خاصة من علاقة Crible de Poincaré التي تسمح بحساب اصلي اتحاد مجموعات ليست بالضرورة مستقلة لكنها جزء من مجموعة منتهية، وهي كالتالي من اجل n مجموعة:

$$Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1 \le i_2 \le \cdots \ldots \le i_k \le n} Card\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i.j}\right)\right]$$

5- أصلي فرق مجموعتين A وB هو:

$$Card\ (\mathrm{A}\backslash \mathrm{B}) = Card\ (\mathrm{A}) - Card\ (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

6- أصلي الفرق التناظري لمجموعتين AوB هو:

$$Card\ (\mathrm{A}\ \Delta\ \mathrm{B}) = Card\ (\mathrm{A}) + Card\ (\mathrm{B}) - 2\ Card\ (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

2.2 التعداد

2.2.1 المبدأ الاساسي للعد

1- قاعدة الجمع Addition Rule

إذا كان الحدثين A و B غير متلائمين، حيث الحدث A يقع بـ: m طريقة والحدث B يقع بـ: n طريقة، فان وقوع الحدث A أو B يقع بـ: $(m+n)$ طريقة.

في الحالة العامة إذا كان لدينا مجموعة من الاحداث غير متلائمة $A_i(i = 1..n)$، وكل حدث يقع بـ: $K_i(i = 1..n)$ طريقة، فان وقوع الحدث A_1 أو A_2 أو.... A_n يقع بـ: $(K_1 + K_2 + \cdots. + K_n)$ طريقة.

مثال

شخص لديه تذكرة واحدة للنقل الجماعي يمكن ان يركب في ثلاث انواع من الحافلات او نوعين من القطارات او نوع واحد من سيارات الاجرة، وبالتالي عدد الحالات الممكنة لركوب هذا الشخص هو:

$$3 + 2 + 1 = 6$$

2- قاعدة الضرب Multiplication Rule

إذا كان الحدث A يمكن ان يقع بـ: m طريقة والحدث B يمكن ان يقع بـ: n طريقة، مع امكانية وقوع الحدثين معا، فان وقوع الحدث A و B يمكن ان يقع بـ: $(m \times n)$ طريقة.

في الحالة العامة إذا كان لدينا مجموعة من الاحداث يمكن ان تقعا معا $A_i(i = 1..n)$، وكل حدث يقع بـ: $K_i(i = 1..n)$ طريقة، فان وقوع الحدث A_1 و A_2 و.... A_n يقع بـ: $(K_1 \times K_2 \times \ldots. \times K_n)$ طريقة.

مثال

ارقام الهاتف في الجزائر تتكون من 10 ارقام، الرقم الاول يكون 0 دائما، الرقم الثاني يأخذ عدد معين خاص بشركة الاتصال، الرقم الثالث غالبا يأخذ ثلاث ارقام، وبالتالي عدد الارقام الممكن تكوينها هي:

$$1 \times 1 \times 3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 30\ 000\ 000$$ رقم

2.2.2 التبديلة Permutation

تعريف

عدد التبديلات لمجموعة E ذات n عنصر هو عاملي n ويرمز له ب: $n!$ حيث:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots\dots \times n$$

نفهم مبدا التبديلة من خلال مبدا العد، فمثلا إذا كان لدينا ثلاث عدائين ما هي الحالات الممكنة لتتويجهم بالمداليات الذهبية، الفضية والبرونزية، المرتبة الاولى يمكن اخدها من عند الثلاث عدائين أي يوجد ثلاث حالات $n = 3$، اما المرتبة الثانية فنستثني العداء الاول و تبقى فقط حالتين $n - 1 = 2$ ، اما المرتبة الثالثة نستثني كذلك العداء الثاني فتبقي حالة واحدة $n - 2 = 1$، و منه عدد الحالات الممكنة هو: $n \times (n-1) \times (n-2) = 3 \times 2 \times 1 = 3!$

ملاحظات

- حساب التبديلات هو معرفة عدد الطرق الممكنة لترتيب عناصر المجموعة سواء من خلال السحب او الظهور.
- في التبديلة كل عناصر المجموعة تستعمل.
- الترتيب مهم حيث التبديلة (a,b) تختلف عن (b,a).
- تكرار العناصر غير موجود في الترتيب او السحب بدون ارجاع في عملية السحب.
- يتم حساب عدد التبديلات لمجموعة من n عنصر في حالة وجود عناصر متشابهة أي وجود k من المجموعات الجزئية المتشابهة كالاتي: $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_k!}$

- عدد الحالات الممكنة لترتيب عناصر مجموعة لكن في وضعية دائرية هو: $(n-1)!$

أمثلة

1- عدد الاعداد الممكن تشكيلها من ثلاث ارقام 1،2،3 هو: $3! = 6$ والتبديلات الممكنة هي:
123 ،132 ،213، 231 ، 312 ، 321

نلاحظ ان رقم المئات أخذ ثلاث طرق ممكنة، اما رقم العشرات أخذ طريقتين ممكنة ورقم الاحاد أخذ طريق واحدة متبقية، وبالتالي عدد التبديلات هو: $3 \times 2 \times 1 = 6$

2- عدد الكلمات الممكن تشكيلها من 4 حروف (a,b,c,d) لا يهم المعنى هو: $4! = 24$

3- عدد وضعيات الجلوس لأربع ذكور وثلاث بنات الممكنة شرط يبقي الذكور والاناث مجتمعين أي دون اختلاط الذكور والاناث هو: $3! \times 4! = 144$

4- عدد الكلمات الممكن تشكيلها من كلمة MATHEMATIQUE هو:

$$\frac{12!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 29937600$$

5- عدد الحالات الممكنة لجلوس 4 اشخاص حول طاولة مستديرة هو: $(4-1)! = 3! = 6$

2.2.3 الترتيبة Arrangement

تعريف

عدد التبديلات لـ k عنصر من مجموعة E ذات n عنصر بدون اعادة هو: A_n^k

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \backslash \quad k \leq n$$

ملاحظة

- الترتيبة ما هي الا تبديلة لعدد من العناصر التي تكون مجموعة جزئية من المجموعة الكلية .
- عدد الترتيبات لـ k عنصر من مجموعة E ذات n عنصر في حالة الاعادة هو: n^k

مثال

عدد الكلمات الممكن تشكيلها من ثلاث حروف مختلفة من حروف الابجدية هو:

$$A_{28}^{3} = \frac{28!}{(25)!} = 28 \times 27 \times 26 = 19656$$

اما إذا اسقطنا شرط عدم الاعادة فعدد الكلمات يصبح: $28^3 = 21952$

2.2.4 التوفيقة Combination

تعريف

التوفيقة هو عدد الحالات الممكنة لسحب k عنصر من مجموعة E مكونة من N عنصر بحيث لا يهم ترتيب العناصر، وتحسب عدد الحالات كالتالي:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

ملاحظات

- في حالة تم السحب مع الارجاع نكون في حالة التوفيقة مع التكرار وتحسب عدد الحالات الممكنة كالتالي: $C_{n+(k-1)}^{k} = \binom{n}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \times (n-k)!}$

امثلة

- عدد فرق كرة القدم الممكن تشكيلها من 20 متربص هو:

$$C_{11}^{20} = \binom{20}{11} = \frac{20!}{11! \times (9)!} = 167960 \text{ فريق}$$

- عدد الحالات الممكنة لتشكيل لجنة متكونة من طالبين وطالبة واحدة من قسم متكون من 10 طلبة ذكور و5 طلبة اناث هو:

$$C_{10}^{2} \times C_{5}^{1} = \frac{10!}{2! \times (8)!} \times \frac{5!}{1! \times (4)!} = 225$$

3 الفصل الثالث: الاحتمالات وطرق حسابها

3.1 التجربة العشوائية Random expriment

تعريف

نقول عن تجربة انها عشوائية إذا كانت نتائجها غير معروفة مسبقا، وفي حالة تكرار التجربة في نفس الظروف نتحصل على نتائج مختلفة.

امثلة

- رمي زهرة نرد ونلاحظ الوجه الظاهر من بين الستة أوجه.
- رمي قطعة نقد متزنة و نلاحظ الوجه الظاهر من بين الوجهين.

3.2 فضاء العينة او مجموعة الاساس Sample Space

تعريف

فضاء العينة او مجموعة الاساس هو مجموعة الحالات الممكنة الحصول عليها بعد اجراء التجربة العشوائية، وغالبا يرمز لمجموعة الاساس بالرمز **Ω**.

امثلة

- مجموعة الاساس الخاصة بالتجربة العشوائية لرمي زهرة نرد هي: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- مجموعة الاساس الخاصة بالتجربة العشوائية لرمي قطعة نقدية هي: $\Omega = \{pile, face\}$

ملاحظة

يمكن ان تتوافق نفس التجربة العشوائية مع عدة مجموعات اساس مثل رمي زهرة نرد مرتين ونهتم بمجموع الارقام المحصل عليها فيكون فضاء العينة كالتالي: $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

3.3 الحدث الاحتمالي Event

تعريف

الحدث الاحتمالي هو مجموعة جزئية من مجموعة الاساس Ω، أي هو مجموعة من الحالات الممكنة التحقيق.

امثلة

- الحدث: الحصول على رقم زوجي عند رمي زهرة نرد هو:$\{2,4,6\}$
- الحدث: الحصول على الوجه عند رمي قطعة نقدية هو:$\{face\}$

3.3.1 انواع الحدث الاحتمالي

- **الحدث البسيط Elementary event** A: هو الحدث الذي يحتوي عنصر واحد أي: $Card(A) = 1$
- **الحدث الاكيد Certain event** A: هو الحدث الذي يحتوي كامل عناصر مجموعة الاساسΩ أي : $Card(A) = Card(\Omega)$
- **الحدث المستحيل Impossible event** A :هو الحدث الغير ممكن حدوثه أي : $Card(A) = \emptyset$
- **الاحداث الغير متلائمة او المتنافية Disjointevents** : نقول ان الحدثين A و B غير متلائمين إذا لم يكن بينهما عناصر مشتركة، أي حدوثهما في ان واحد غير ممكن : $A \cap B = \emptyset$
- **الاحداث المتكاملة complementary events** : نقول ان الحدثين A و$\bar{A}$ متكاملين اذا كان عناصر حدوثهما يشكل المجموعة الكلية Ω **أي:** $A \cup \bar{A} = \Omega$

3.4 الفضاء الاحتمالي Probabilistic space

تعريف

الفضاء الاحتمالي الناتج عن تجربة عشوائية ε هو الزوج (Ω, C) ، حيث Ω فضاء العينة او مجموع النتائج الممكنة المتعلقة بالتجربة العشوائية ε و C هو مجموعة الحوادث المتعلقة بالتجربة العشوائية ε.

3.4.1 الاحتمال Probability

تعريف

ليكن (Ω, C) فضاء الاحتمال، الاحتمال عبارة عن تطبيق حقيقي $\mathcal{P}$ معرف على C مجموعة جزئية من Ω للحوادث، والذي يحقق الثلاث مسلمات التي تدعى مسلمات Kolomogrov التالية:

1- $\mathcal{P}: C \longrightarrow \mathbb{R}^+$

2- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

3- $\mathcal{P}(\bigcup_{n \in I} A_n) = \sum_{n \in I} \mathcal{P}(A_n)$

حيث: A_n متتالية أحداث منتهية او قابلة للعد مستقلة مثنى مثنى

- حين اذن يسمى الفضاء $(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل.

خواص

ليكن الفضاء $(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل، مهما يكن الحوادث A و B ،الخواص التالية محققة :

1- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

2- $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$

3- $\mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$

4- $\mathcal{P}(A) \in [0,1]$

5- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$

6- $A \subset B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$

3.4.2 الاحتمالات المتساوية Equiprobability

تعريف

ليكن (Ω) فضاء منتهي، نقول انه يوجد حالة تساوي الاحتمالات إذا كانت كل الحوادث البسيطة لها نفس احتمال الوقوع وبالتالي:

$$\begin{cases} \Omega = \{w_1, w_2, \dots \dots .., w_n\}, \forall\ i \in N \\ \mathcal{P}(\{w_i\}) = \dfrac{1}{N} \end{cases}$$

مثال

اذا رمينا زهرة نرد فان احتمال ظهور أي وجه هو: $\frac{1}{6}$

3.5 الاحتمال الشرطي Conditional Probability

تعريف

ليكن $(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل، اذا كان الحدث B حدث احتمالي غير معدوم أي $\mathcal{P}(B) \neq 0$. نعرف على C الحدث العشوائي A/B ويقرأ الحدث A علما B او A شرط وقوع B ،حيث احتمال وقوع الحدث A/B هو احتمال شرطي و يحسب كالتالي:

$$\mathcal{P}_B(A) = \mathcal{P}(A/B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} \quad / \, \mathcal{P}(B) > 0$$

حالة خاصة

اذا كانت التجربة العشوائية ضمن الاحتمالات المتساوية، الاحتمال الشرطي يحسب كالتالي :

$$\mathcal{P}_B(A) = \mathcal{P}(A/B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$$

مثال

نرمي قطعتين نرد و نريد معرفة ما هو احتمال ظهور الرقم 2 على الاقل مرة واحدة عند رمي احدى القطعتين، شرط ان يكون مجموع النتائج الظاهرة عند رمي القطعتين هو6.

لدينا الحدث الشرطي B :

مجموع النتائج يساوي 6 حيث:

$$B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

الحدث A : ظهور على الاقل رقم 2 مرة واحدة هو:

$$A = \{(1,2), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,1), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$

الحدث ظهور على الاقل مرة واحدة رقم 2 علما ان مجموع النتائج يساوي 6 هو $A \cap B$ حيث:

$$A \cap B = \{(2,4), (4,2)\}$$

ومنه نستنتج الاحتمال الشرطي هو:

$$\mathcal{P}_E(A) = \mathcal{P}(A/E) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)} = \frac{2}{5}$$

ملاحظات

1- من خلال قانون الاحتمال الشرطي نستنتج العلاقة التالية التي تسمى قاعدة الضرب للأحداث الغير مستقلة:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A/B)$$

ولدينا كذلك المساواة التالية: $(A \cap B) = (B \cap A)$

وعليه نحصل على:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A/B)$$

من اجل الحوادث $A_1, A_2 \ldots \ldots \ldots, A_n$ نحصل على:

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots . . \cap A_n) = \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2/A_1) \times \mathcal{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \times . \times \mathcal{P}(A_n/A_1 \cap A_2 \cap . . \cap A_{n-1})$$

2- إذا كان الاحتمال الشرطي:

$$\mathcal{P}(A/B) = \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathcal{P}(B \cap A)}{\mathcal{P}(B)} = \mathcal{P}(A)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}(B \cap A) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

$\Leftrightarrow$ A و B مستقلان

3.5.1 النظام الاحتمالي الكامل ونظرية Bayes

تعريف

لتكن $(A_i)_{i \in I}$ سلسلة حوادث منتهية او غير منتهية قابلة للعد تنتمي الى مجموعة الحوادث C نقول ان A_i تشكل نظام احتمالي كامل إذا تحققت الثلاثة شروط التالية:

- الحوادث A_i و A_j غير متلائمة مهما $i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
- $\mathcal{P}(A_i) > 0, \forall i \in I$

من خلال هذا النظام الكامل تم استنتاج نظريتين اساسيين جد مستعملين في حساب الاحتمالات وهي نظرية الاحتمالات الكلية و نظرية **Bayes**

نظرية الاحتمالات الكلية Theorem of total probability

لتكن الحوادث $(A_i)_{i\in I}$ تشكل نظام احتمالي كلي وليكن الحدث B ينتمي الى مجموعة الحوادث Cاذن :

$$\mathcal{P}(B)=\sum_{\boldsymbol{i\in I}}\mathcal{P}(B\backslash A_i)\times\mathcal{P}(A_i)$$

برهان

لدينا :

$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(B\cap\Omega)$ لان $B\subset\Omega$

وكذلك لدينا: $\bigcup_{i\in I}A_i=\Omega$

$$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}\left(B\cap\left(\bigcup\nolimits_{i\in I}A_i\right)\right)=\mathcal{P}\left(\bigcup\nolimits_{i\in I}(B\cap A_i)\right)$$
$$=\sum\nolimits_{i\in I}\mathcal{P}(B\cap A_i)=\sum_{i\in I}\mathcal{P}(B\backslash A_i)\times\mathcal{P}(A_i)$$

مثال

مؤسسة لإنتاج السيارات لديها ثلاث ورشات تنتج نفس السيارة بحيث احتمال ان السيارة تنتج في الورشة $A_i/i=1,2,3$ هو $\mathcal{P}(A_1)=0.25,\mathcal{P}(A_2)=0.35,\mathcal{P}(A_1)=0.40$ ، اما احتمال ان السيارة المنتجة في الورشة $A_i/i=1,2,3$ يكون فيها عطب هو: $\mathcal{P}(d_1)=0.05,\mathcal{P}(d_2)=0.06,\mathcal{P}(d_3)=0.08$.

هذه الاحتمالات الاخيرة هي احتمالات شرطية يمكن كتابتها من الشكل:

$\mathcal{P}(D\backslash A_1)=0.05,\mathcal{P}(D\backslash A_2)=0.06,\mathcal{P}(D\backslash A_3)=0.08$ ،

أي احتمال انتاج سيارة بها عطب علما انها منتجة في الورشة $A_i/i = 1,2,3$

لحساب احتمال الحصول على سيارة بها عطب هو:

$$\mathcal{P}(D) = \sum_{i=1,2,3} \mathcal{P}(D \backslash A_i) \times \mathcal{P}(A_i)$$

$$\mathcal{P}(D) = 0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.06 + 0.40 \times 0.08 = 0.0655 = 6.55\%$$

نظرية Bayes

لتكن الحوادث $(A_i)_{i \in I}$ تشكل نظام احتمالي كلي وليكن الحدث B ينتمي الى مجموعة الحوادث C و $\mathcal{P}(B) > 0$ ، $\forall\, i \in I$ اذن :

$$\mathcal{P}(A_i \backslash B) = \frac{\mathcal{P}(A_i \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{\mathcal{P}(B \backslash A_i) \times \mathcal{P}(A_i)}{\sum_{i \in I} \mathcal{P}(B \backslash A_i) \times \mathcal{P}(A_i)}$$

مثال

نأخذ معطيات المثال السابق ونفترض ان سيارة اخدت عشوائيا ووجد بها عطب، فما هو احتمال انتاجها في الورشات الثلاثة؟

قمنا بحساب الاحتمال الكلي:

$$\mathcal{P}(D) = \sum_{i=1,2,3} \mathcal{P}(D \backslash A_i) \times \mathcal{P}(A_i) = 0.0655$$

بالتالي حسب نظرية **Bayes**يصبح لدينا:

$$\mathcal{P}(A_1 \backslash D) = \frac{\mathcal{P}(D \backslash A_1) \times \mathcal{P}(A_1)}{\sum_{i \in I} \mathcal{P}(D \backslash A_i) \times \mathcal{P}(A_i)} = \frac{0.05 \times 0.25}{0.0655} = 0.19$$

$$\mathcal{P}(A_2 \backslash D) = \frac{\mathcal{P}(D \backslash A_2) \times \mathcal{P}(A_2)}{\sum_{i \in I} \mathcal{P}(D \backslash A_i) \times \mathcal{P}(A_i)} = \frac{0.06 \times 0.35}{0.0655} = 0.32$$

$$\mathcal{P}(A_3\backslash D)=\frac{\mathcal{P}(D\backslash A_3)\times\mathcal{P}(A_3)}{\sum_{i\in I}\mathcal{P}(D\backslash A_i)\times\mathcal{P}(A_i)}=\frac{0.08\times 0.40}{0.0655}=0.48$$

و بالتالي اكبر احتمال انها تكون منتجة في الورشة الاولى.

3.5.2 الاستقلالية Independece

تعريف

ليكن $(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل، A و B حوادث تنتمي الى C ،نقول ان الحدثين A و B مستقلين إذا:

$$\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$$

ملاحظة

بصفة عامة يمكن القول ان مجموعة الحوادث $(A_i)_{i\in I}$ مستقلة مع بعضها البعض اذا كان :

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathcal{P}(A_i)$$

مثال

نقوم برمي زهرة نرد حيث الحدث A هو الحصول على عدد زوجي ، و الحدث B هو الحصول على مضاعفات العدد 3 و عليه :

$$\mathcal{P}(A)=\frac{1}{2}\ ،\mathcal{P}(B)=\frac{2}{6}\ ،\mathcal{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

بما ان :

$$\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}=\mathcal{P}(A\cap B)$$

فان الحدثين A و B مستقلين.

4 الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية Random variables

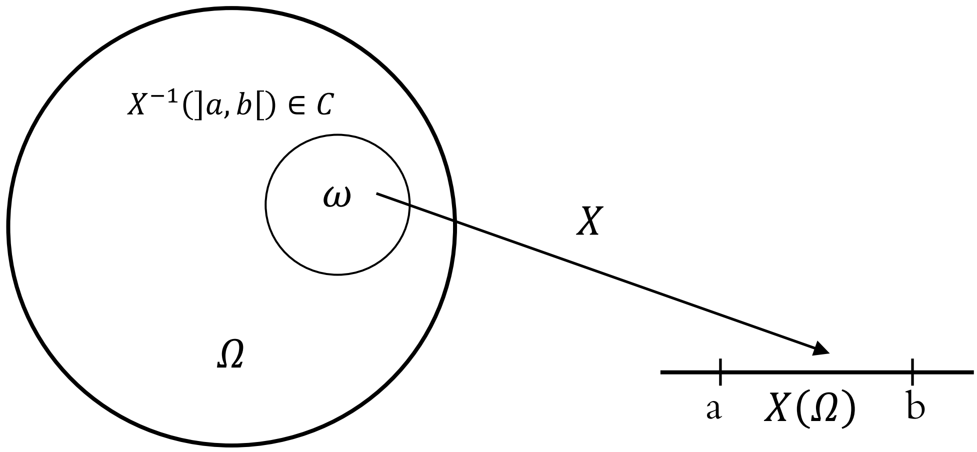
ليس غالبا نتائج التجربة العشوائية تكون عددية فيمكن ان تكون نوعية مثل نتيجة رمي قطعة نقدية، و الحاجة الي قياس مختلف المؤشرات الاحصائية كالمتوسط مثلا دعت الى ضرورة تمثيل مخرجات التجربة العشوائية بقيم عددية لسهولة التعامل معها، ولذلك ظهر مفهوم المتغير العشوائي الذي يعبر عن مخرجات التجربة العشوائية بقيم حقيقية، كما يمكننا التفريق بين نوعين من المتغيرات العشوائية، المتغيرات العشوائية المتقطعة و المتصلة .

تعريف

ليكن$(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل، نسمي المتغير العشوائي X كل تطبيق قابل للقياس بحيث:

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to X(\omega)$$

نسمي فضاء صورة المجموعة Ω المجموعة $X(\Omega)$



ملاحظات

- بما ان المجموعة Ω منتهية، تكون بالضرورة مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي $X(\Omega)$ مجموعة منتهية في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots \dots . x_k\}$
- $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\Omega) = x_i\}$

- $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\Omega) = x_i\}$
- $\forall x \in X(\Omega) \implies X^{-1}(x) \in \Omega$

مثال

نعتبر التجربة العشوائية لرمي قطعتي نقد مرة واحدة، فضاء الاساس المرافق لهذه التجربة هو:

$\Omega = \{(p.p),(p.f),(f.p),(f.f)\}$، نعرف المتغير العشوائي X عدد مرات ظهور الوجه f وبالتالي المتغير العشوائيX سوف يأخذ القيم التالية: $X = \{0,1,2\}$ حيث :

$$X\{(p.p)\} = 0$$

$$X\{(p.f)\} = 1$$

$$X\{(f.p)\} = 1$$

$$X\{(f.f)\} = 2$$

اما الصورة العكسية لمجموعة النتائج بواسطة التطبيق X هي:

$$X^{-1}\{0\} = \{(p.p)\}$$

$$X^{-1}\{1\} = \{(p.f),(f.p)\}$$

$$X^{-1}\{2\} = \{(f.f)\}$$

4.1 المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Randon Variables

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي X متغير عشوائي متقطع إذا كانت القيم المرافقة له قيم قابلة للعد أي متقطعة. حيث: $X = \{x_1, x_2, \ldots \ldots . x_i\}$، ونرمز لاحتمال وقوع الحوادث x_i بـ: $\mathcal{P}(x_i) = \mathcal{P}(X = x_i)$

4.1.1 التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع Dicreteprobability distribution

4.1.1.1 دالة الكثافة الاحتمالية Probability Mass Function

كما هو معمول به في الاحصاء الوصفي نعتمد على عدد مرات ظهور المشاهدات أي التكرار عوض نستعمل احتمال ظهور القيم، وهو ما يسمى بالتوزيع التكراري، نفس الشيء نعتمد عليه لما يكون لدينا متغير عشوائي متقطع فان التوزيع الاحتمالي او دالة الكثافة الاحتمالية $f(x_i)$ لهذا المتغير ما هو الا تكرار قيمة المتغير العشوائي نسبة الى التكرارات الاجمالية لجميع قيم المتغير العشوائي، وغالبا ما يعبر عن التوزيع الاحتمالي لمتغيرعشوائي متقطع بجدول يبين فيه قيمة المتغير العشوائي x_i ويقابلها قيمته الاحتمالية $\mathcal{P}(x_i)$.

تعريف

نقول ان $f(x_i)$ دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي متقطع اذا تحققا شرطين :

$$\forall x_i \in X, \quad f(x_i) \geq 0$$

$$\forall x_i \in X(\Omega) \implies \sum_{i=1}^{k} \mathcal{P}(x_i) = 1$$

مثال

نرمي قطعتي نرد، ونعرف المتغير العشوائي X مجموع الارقام المتحصل عليها، وعليه مجموعة الاساس هي:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2)(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2)(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2)(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2)(4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2)(5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2)(6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix}$$

حيث: $Card(\Omega) = 36$

اما مجموعة النتائج أي قيم X هي:

$$X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

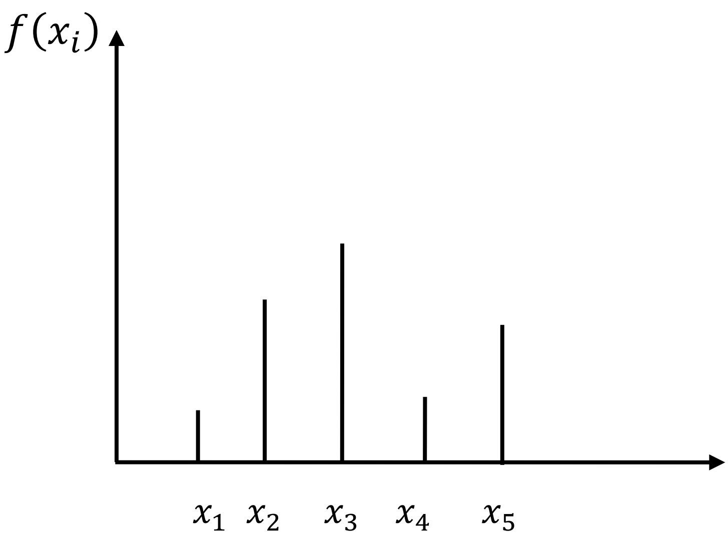
وعليه التوزيع الاحتمالي للمتغير X يعطى في الجدول التالي:

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{P}(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

يمكن التأكد من ان: $\sum_{i=1}^{11} \mathcal{P}(x_i) = 1$

4.1.1.2 التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي المتقطع

يمكن الاعتماد على الاعمدة البيانية لتمثيل دالة الكثافة الاحتمالية حيث يأخذ محور الفواصل قيم المتغير العشوائي ومحور التراتيب الاحتمالات المرافقة لقيم المتغير العشوائي.



4.1.2 دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتقطع Cumulative probability distribution function

دالة الكثافة الاحتمالية $f(x_i)$ تبين احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي X قيمة x_i أي $\mathcal{P}(X = x_i)$ لكنه في بعض الاحيان نحتاج معرفة احتمال ان يأخذ المتغير العشوائيX قيمة اقل اوتساوي من قينة معينة x_K أي معرفة $\mathcal{P}(X \leq x_K)$ وهنا نستعين بدالة التوزيع التراكمي التي تكتب من الشكل التالي:

$$F(x_k) = \mathcal{P}(X \leq x_K) = \mathcal{P}(X = x_1) + \mathcal{P}(X = x_1) + \cdots \ldots . + \mathcal{P}(X = x_K)$$

خواص دالة التوزيع التراكمي

ليكن المتغير العشوائي $X \in \mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية فان:

- $x \in \,]-\infty\,, x_1[\quad \Rightarrow F(x) = 0$
- $x \in [x_1\,, x_2[\quad \Rightarrow F(x) = f(x_1)$
- $x \in [x_2\,, x_3[\quad \Rightarrow F(x) = f(x_1) + f(x_2)$
- $x \in [x_n\,, +\infty\,[\quad \Rightarrow F(x) = 1$

في الحالة العامة

- $x \in [x_k\,, x_{k+1}[\quad \Rightarrow F(x_k) = \sum_{i=1}^{k} f(x_k)$
- $F(x)$ دالة متزايدة
- $0 \le F(x) \le 1$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\mathcal{P}(X > x) = 1 - \mathcal{P}(X \le x) = 1 - F(x)$
- $\mathcal{P}(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

مثال

دالة التوزيع التراكمي للمثال السابق تكتب من الشكل:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & if\ x \in]-\infty, 2[\\ {}^{1}/_{36} & if\ x \in [2,3[\\ {}^{3}/_{36} & if\ x \in [3,4[\\ {}^{6}/_{36} & if\ x \in [4,5[\\ {}^{10}/_{36} & if\ x \in [5,6[\\ {}^{15}/_{36} & if\ x \in [6,7[\\ {}^{21}/_{36} & if\ x \in [7,8[\\ {}^{26}/_{36} & if\ x \in [8,9[\\ {}^{30}/_{36} & if\ x \in [9,10[\\ {}^{30}/_{36} & if\ x \in [10,11[\\ {}^{35}/_{36} & if\ x \in [11,12[\\ 1 & if\ x \in [12, +\infty[\end{cases}$$

4.1.3 التوقع الرياضي Mathematical expectation

تعريف

ليكن$(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل منتهي، و X متغير عشوائي متقطع بحيث:

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots \dots . x_n\}$. نسمي التوقع الرياضي للمتغير X العدد $\mathbb{E}(X)$

المعرف كما يلي:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

ملاحظة

التوقع الرياضي ما هو الا المتوسط المرجح على اساس الاحتمالات التي يأخذها المتغير العشوائي

خواص

- مهما يكن c عدد ثابت فان :

$$\mathbb{E}(c) = c$$

- مهما يكن المتغير العشوائي $X \in [a\,,b]$ فان : $\mathbb{E}(X) \in [a\,,b]$
- ليكن k عدد حقيقي وX، Y متغيرين عشوائيين فان :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(X+k) = \mathbb{E}(X) + k$$

$$\mathbb{E}(k.X) = k \times \mathbb{E}(X)$$

- **ليكن** X، Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان :

$$\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$$

مثال

ليكن X متغير عشوائي لتجربة رمي زهرة نرد ،حيث نتائج التجربة و احتمالات وقوعها في الجدول التالي:

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

التوقع الرياضي هو:

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

4.1.4 التباين والانحراف المعياري Variance and Standardeviation

4.1.4.1 التباين Variance

تعريف

ليكن$(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل منتهي، و X متغير عشوائي متقطع بحيث $X(\Omega) =:$ $\{x_1, x_2, \dots \dots . x_n\}$. نسمي تباين المتغير X القيمة الموجبة $V(X)$ المعرفة كما يلي:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

ملاحظة

التباين يعبر عن التشتت المطلق لقيم المتغير العشوائي X حول توقعه الرياضي $\mathbb{E}(X)$

خواص

$$V(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X)^2)\big)$$

- ليكن k عدد حقيقي و X، Y متغيرين عشوائيين فان:

$$V(k.X) = k^2.V(X)$$

- اذا كان X، Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$
$$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

- اذا كان X، Y متغيرين عشوائيين غير مستقلين فان:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X)]$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) + 2[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X)]$$

نظرية Koenig

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

برهان

لدينا:

$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)^2)\right)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X)^2) \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 - 2.x_i.\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

بعد نشر المجموع على أطراف المعادلة:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2.\mathcal{P}(X = x_i) - 2.\mathbb{E}(X)\sum_{i=1}^{n} x_i\,.\mathcal{P}(X = x_i) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X)^2 \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2.\mathcal{P}(X = x_i) - 2.\mathbb{E}(X).\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2.\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X = x_i)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2.\mathcal{P}(X = x_i) - 2.\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2.1$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2.\mathcal{P}(X = x_i) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

مثال

من معطيات المثال السابق يمكن حساب تباين المتغير العشوائيX كما يلي:

$$\sigma^2 = (1-3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (2-3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (3-3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (4-3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (5-3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (6-3.5)^2 \times \frac{1}{6}$$

$$\sigma^2 = 2.916$$

4.1.4.2 الانحراف المعياري Standardeviation

تعريف

ليكن$(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل منتهي، و X متغير عشوائي متقطع بحيث $X(\Omega) =:$ $\{x_1, x_2, \dots \dots . x_n\}$. نسمي الانحراف المعياري للمتغير X القيمة الموجبة σ المعرف كما يلي:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}$$

4.2 المتغيرات العشوائية المستمرة Continuous Randon Variables

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي X متغير عشوائي مستمر إذا كانت القيم المرافقة له قيم مستمرة داخل مجال محدد. حيث: $X = a \leq x_i \leq b$ ونرمز لاحتمال وقوع الحوادث x_i بـ:$f(x_i)$

4.2.1 التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر Continuousprobability distribution

4.2.1.1 دالة الكثافة الاحتمالية Probability Mass Function

تعريف

نقول ان $f(x_i)$ دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي مستمر إذا تحققا شرطين:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0$$

$$\forall x \in X(\Omega) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

خواص

1- دالة الكثافة الاحتمالية دالة موجبة مستمرة على مجال تعريفها $I \in \mathbb{R}$

2- من اجل كل $a \in \mathbb{R}$ فان: $\mathcal{P}(X = a) = 0$

وهذا يعني ان في حالة التوزيعات الاحتمالية المستمرة لا يمكن حساب احتمال وقوع حدث كنقطة معينة وهندسيا يمكننا القول لا توجد مساحة عند نقطة ،لذلك يمكننا فقط حساب احتمال وقوع حدث محصور بين نقطتين اي مجال.

3- من اجل كل a, b حيث: $-\infty < a < b < +\infty$ فان:

$$\mathcal{P}(a < X < b) = \mathcal{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

4- $\mathcal{P}(X < a) = \mathcal{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$

5- $\mathcal{P}(X > a) = \mathcal{P}(X \geq a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$

مثال

لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x & if \quad 0 < x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

نتأكد ان $f(x)$ دالة كثافة احتمالية:

الشرط الاول: نلاحظ ان كل قيم x على المجال $]0,1[$ موجبة تماما، حيث، $f(0) = 0$

و $f(1) = 2$ والدالة متزايدة وعلية كل قيم مجال تعريف الدالة تحقق الشرط.

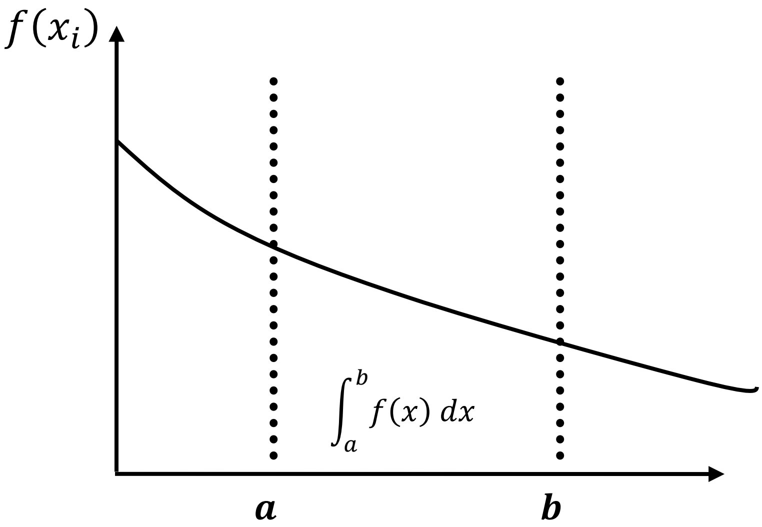
الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2x \ \ dx = 2\int_0^1 x \ \ dx = 2 \times \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 \times \left[\frac{1}{2} - 0\right] = 1$$

ومنه$f(x)$ دالة كثافة احتمالية

4.2.1.2 التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي المستمر

لتمثيل دالة الكثافة الاحتمالية يأخذ محور الفواصل قيم المتغير العشوائي المستمر ومحور التراتيب الاحتمالات المرافقة لقيم المتغير العشوائي، وتحث المساحة المحصورة بين a و b والتي تكون تحت منحنى دالة الكثافة القيمة $\int_a^b f(x)\,dx$:



4.2.1.3 دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المستمر Cumulative probability distribution function

تعريف

دالة التوزيع التراكمي التي نرمز لها بـ: $F_X(x)$ للمتغير العشوائي المستمر حيث :

$x \in X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ ، هي قيمة الاحتمال لان يكون المتغير العشوائي X اقل من قيمة محدد x وتكتب كالتالي:

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \qquad \forall x \in X(\Omega)$$

خواص

- $F(x)$ دالة متزايدة
- المشتقة الاولى لـ: $F(x)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية$f(x)$ أي: $\frac{\partial F(x)\, dx}{\partial x} = f(x)$
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
- $\mathcal{P}(X > x) = 1 - \mathcal{P}(X \leq x) = 1 - F(x)$
- $\mathcal{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

مثال

دالة التوزيع التراكمي الخاصة بدالة المثال السابق:

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x & if \quad 0 < x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

هي:

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 2.t\ dt$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} 2.t\ dt$$

$$F_X(x) = t^2]_0^x = \quad x^2$$

وعليه:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if\ x < 0 \\ x^2 & if \quad 0 < x < \ 1 \\ 1 & if\ x > 1 \end{cases}$$

4.2.2 التوقع الرياضي Mathematical expectation

تعريف

ليكن$(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل، و X متغير عشوائي مستمر بحيث :
$X(\Omega) = a \leq x \leq b$. نسمي التوقع الرياضي للمتغير X العدد $\mathbb{E}(X)$ المعرف كما يلي:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\ \ dx$$

ملاحظة

لدينا العزم الغير المكزي من الدرجة 2 هو:

$$m_2 = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . f(x)\ \ dx$$

كما يمكن كتابة الصيغة العامة لكل العزوم الغير مركزية من الدرجة k ما يلي :

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k . f(x)\ \ dx$$

مثال

نقوم بحساب التوقع الرياضي الخاص بالمتغير العشوائي للمثال السابق حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x & if \quad 0 < x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

لدينا :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f(x)\ \ dx = \int_{-\infty}^{0} x . 0\ \ dx + \int_{0}^{1} x . 2x\ \ dx + \int_{1}^{+\infty} x . 0\ \ dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{0}^{1} 2x^2\ \ dx = \frac{2}{3}\ x^3 \Big]_1^1 = \frac{2}{3}$$

4.2.3 التباين والانحراف المعياري Variance and Standardeviation

4.2.3.1 التباين Variance

تعريف

ليكن$(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل، و X متغير عشوائي مستمر بحيث :

$X(\Omega) = a \leq x \leq b$. نسمي التباين للمتغير X العدد $V(X)$ المعرف كما يلي:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2 . f(x)\ \ dx$$

ملاحظة

العزم المركزي من الدرجة الثانية μ_2 يعطينا التباين:

$$\mu_2 = \mathbb{E}\left(\left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2 . f(x)\ dx$$

الصيغة العامة لكل العزوم المركزية من الدرجة k هي:

$$\mu_k = \mathbb{E}\left(\left(x - \mathbb{E}(X)\right)^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^k . f(x)\ dx$$

خواص

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X)^2)\big)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2 . f(x)\ dx = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

مثال

من معطيات المثال السابق يمكن حساب تباين المتغير العشوائيX كما يلي:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

نقوم اولا بحساب:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . f(x)\ dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{0} x^2 . 0\ \ dx + \int_{0}^{1} x^2 . 2x\ \ dx + \int_{1}^{+\infty} x^2 . 0\ \ dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{0}^{1} 2 . x^3\ \ dx = \frac{2}{4} . x^4\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$V(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

4.2.3.2 الانحراف المعياري Standardeviation

تعريف

ليكن $(\Omega, C, \mathcal{P})$ فضاء محتمل، و X متغير عشوائي مستمر بحيث :

$X(\Omega) = a \leq x \leq b$. نسمي الانحراف المعياري للمتغير X القيمة الموجبة σ المعرف كما يلي:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}$$

5 الفصل الخامس :التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة Special discret probability distributions

هناك عدة تجارب عشوائية او ظواهر عشوائية لها توزيع احتمالي متشابه او خاص بحيث من خلال هذا التوزيع يمكن معرفة الاحتمال و مختلف معلمات هذه الظواهر و من بين التوزيعات المتقطعة الشهيرة أي التي يكون فيها المتغير العشوائي متقطع نجد :

5.1 التوزيع المتقطع المنتظم Uniform discrete distribution

5.1.1 دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع التوزيع المنتظم على الفضاء الاحتمالي المنتهي $X(\Omega) = \{1,2, \dots \dots . n\}$ و نرمز له بـ: $X \sim U_d[1,2 \dots \dots n]$، اذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي تكتب من الشكل:

$$\forall k \in X(\Omega) \ / \ f_X(x) = \mathcal{P}[X = k] = \frac{1}{n}$$

5.1.2 دالة التوزيع التراكمي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع التوزيع المنتظم على الفضاء الاحتمالي المنتهي $X(\Omega) = \{a, b\}$، فان دالة توزيع الكثافة الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if \ \ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & if \ \ a \le x \le b \\ 1 & if \ \ \ x > b \end{cases}$$

5.1.3 التوقع الرياضي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع التوزيع المنتظم على الفضاء الاحتمالي المنتهي $X(\Omega) = \{1,2, \dots \dots ..., n-1, n\}$، فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

وبصفة عامة نأخذ الفضاء الاحتمالي :

$X(\Omega) = \{a, a+1, \dots \dots ..., b-1, b\}$،فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

البرهان

لدينا علاقة التوقع الرياضي:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

بما ان X يتبع التوزيع المنتظم فان كل الاحتمالات التي يأخذها المتغير X متساوية وتساوي $\frac{1}{n}$ و بالتالي :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \cdots \dots \dots \dots n \times \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = (1 + 2 + \cdots \dots \dots .. n) \times \frac{1}{n}$$

ونعلم ان العلاقة $(1 + 2 + \cdots \dots \dots .. n)$ عبارة عن متتالية حسابية يقدر مجموعها ب: $\frac{n \times (n+1)}{2}$

ومنه يصبح لدينا:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n \times (n+1)}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

5.1.4 التباين والانحراف المعياري

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع التوزيع المنتظم على الفضاء الاحتمالي المنتهي $X(\Omega) = \{1,2, \ldots \ldots .., n-1, n\}$، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

وبصفة عامة نأخذ الفضاء الاحتمالي :

$X(\Omega) = \{a, a+1, \ldots \ldots .., b-1, b\}$، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = \frac{(b-a) \times (b-a+2)}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(b-a) \times (b-a+2)}{12}}$$

البرهان

لدينا علاقة التباين تساوي:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

نقوم اولا بحساب$\mathbb{E}(X^2)$ حيث:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{n} + 2^2 \times \frac{1}{n} + \cdots \dots \dots \dots n^2 \times \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = (1^2 + 2^2 + \cdots \dots + n^2) \times \frac{1}{n}$$

ونعلم ان العلاقة $(1 + 2 + \cdots \dots \dots ..n)$ عبارة عن متتالية مربعة يقدر مجموعها ب: $\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ وعليه يصبح لدينا:

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6} \times \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{(n+1) \times (2n+1)}{6}$$

وبالتالي:

$$V(X) = \frac{(n+1) \times (2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{2n^2 + n + 2n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$$

بعد توحيد المقامات يصبح لدينا:

$$V(X) = \frac{4n^2 + 2n + 4n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12}$$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

وبالتالي:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

مثال

لتكن التجربة العشوائية رمي قطعة نرد ذات ستة اوجه،وليكن المتغير العشوائي X يعبر عن نتيجة الوجه الظاهر، نلاحظ ان مجموعة قيم Xهي:$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$ حيث ان كل احتمالات الظهور لقيمة Xمتساوية أي:

$$\forall k \in X(\Omega) \ / \ \mathcal{P}[X = k] = \frac{1}{n}$$

وبالتالي المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المتقطع المنفصل ونكتب:$X \sim U_d[1,6]$

دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & if \quad -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{6} & if \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & if \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & if \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & if \quad 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & if \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & if \quad 6 \leq x < +\infty \end{cases}$$

معلمات المتغير العشوائي X هي:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$$

$$V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$$

5.2 توزيع برنولي Bernoulli distribution

5.2.1 دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع Bernoulli بمعلمة $p \in]0,1[$ و نرمز له بـ: $X \sim \mathcal{B}(p)$، اذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي تكتب من الشكل :

$$f_X(x) = \mathcal{P}(X = x) = \begin{cases} p & if \quad x = 1 \\ q = 1 - p & if \quad x = 0 \end{cases}$$

كما يمكن كتابة هذه الدالة من خلال العلاقة التالية:

$$f_X(x) = \mathcal{P}(X = x) = p^x \times (1 - p)^{1-x} \quad \forall x \in \{0,1\}$$

ملاحظة

المتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع Bernoulli هي المتغيرات التي تكون نتائج تجاربها العشوائية تظهر حالتين فقط مثل نجاح او فشل ، بحيث يكون احتمال احد النتائج هو p و الاحتمال الاخر هو $1 - p$، ويعرف المتغير العشوائي على فضاء الاحتمالي $X(\Omega) = \{0,1\}$. بحيث $X = 1$ في حالة النجاح و $X = 0$ في حالة الفشل.

5.2.2 دالة التوزيع التراكمي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع Bernoulli بمعلمة $p \in]0,1[$ ،على الفضاء الاحتمالي المنتهي $X(\Omega) = \{0,1\}$، فان دالة توزيع الكثافة الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if \ x < 0 \\ 1 - p & if \ 0 \leq x < 1 \\ 1 & if \quad x \geq 1 \end{cases}$$

5.2.3 التوقع الرياضي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع Bernoulli بمعلمة $p \in]0,1[$ ، فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = p$$

البرهان

لدينا علاقة التوقع الرياضي:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}(X) = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$$

5.2.4 التباين والانحراف المعياري

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع Bernoulli بمعلمة $p \in]0,1[$ ، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = p \times q$$

$$\sigma(X) = \sqrt{p \times q}$$

البرهان

لدينا علاقة التباين تساوي:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

نقوم اولا بحساب $\mathbb{E}(X^2)$ حيث:

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times p + 0^2 \times q = p$$

وعليه:

$$V(X) = p - p^2 = p \times (1 - p) = p \times q$$

مثال

نريد اختيار طالب واحد من بين 40 طالب اجتازوا امتحان الاحصاء مع العلم ان 15 طالب تحصلوا على المعدل، نعرف المتغير العشوائي X بنجاح او فشل هذا الطالب في امتحان الاحصاء.

- المتغير العشوائي Xيأخذ قيمتين اما 1 نجاح الطالب في مادة الاحصاء او 0 فشل الطالب فب مادة الاحصاء وبالتالي X يتبع توزيع Bernoulli بمعلمة $p = \frac{15}{40} = 0.375$
- دالة توزيعه الاحتمالي تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.375 & if \quad x = 1 \\ 0.625 & if \quad x = 0 \end{cases}$$

كما يمكن كتابة هذه الدالة من خلال العلاقة التالية:

$$f_X(x) = 0.375^x \times 0.625^{1-x} \quad \forall x \in \{0,1\}$$

- دالة التوزيع التراكمي تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if \ \ x < 0 \\ 0.625 & if \ \ 0 \leq x < 1 \\ 1 & if \quad x \geq 1 \end{cases}$$

- توقعه الرياضي يساوي:

$$\mathbb{E}(X) = 0.325$$

- التباين وانحرافه المعياري يساوي:

$$V(X) = 0.375 \times 0.625 = 0.234$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0.234} = 0.484$$

5.3 توزيع ثنائي الحد Binomial distribution

5.3.1 دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع ثنائي الحدبمعلمات $(n,p)/p \in]0,1[$ ونرمز له ب: $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ ،اذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \mathcal{P}(X = x) = C_x^n \times p^x \times q^{n-x} \quad /\forall x \in X(\Omega), n \in \mathbb{N}^*$$

ملاحظات

- المتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع ثنائي الحد تنتج عن التجارب العشوائية التي تتكرر عدة مرات أي nمرة، بحيث نتائج كل تجربة عشوائية واحدة تظهر حالتين فقط مثل نجاح او فشل ، بحيث يكون احتمال احد النتائج غالبا النجاح هو p و الاحتمال الاخر هو $1-p$، ويعرف المتغير العشوائي على فضاء الاحتمالي $X(\Omega) = \{0,1, \dots \dots .., n\}$.

- $X = \mathrm{k}$ عدد مرات ظهور النجاح بعد n محاولة.

- يعتبر توزيع Bernoulli حالة خاصة من توزيع ثنائي الحدبحيث التجربة العشوائية لا تتكرر الا مرة واحدة أي $n = 1$ ويمكن كتابة $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$

خواص التوفيقة

$$C_k^n = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

$$C_n^n = C_n^0 = 1$$

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

$$C_{k+1}^{n+1} = \frac{n+1}{k+1} \times C_k^n$$

دستور ثنائي الحد Binomial Theorem

هو عبارة رياضية للعالم Isaac Newton يتم من خلالها حساب مجموع ثنائي مرفوع الى قوة n، وتعطى بالشكل التالي:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \times x^k \times y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \times x^{n-k} \times y^k$$

خاصية

إذا كان المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين و يتبعان توزع ثنائي الحد بحيث $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ و $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$، فان مجموعهما يتبع توزيع ثنائي الحد بمعلمتين: $n+m, p$ حيث:

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$$

5.3.2 دالة التوزيع التراكمي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع ثنائي الحدبمعلمات $(n,p)/p \in]0,1[$، فان دالة توزيع الكثافة الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if \ \ x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} C_k^n \times p^k \times q^{n-k} & if \ \ 0 \leq x < 1 \\ 1 & if \ \ \ \ x > 1 \end{cases}$$

5.3.3 التوقع الرياضي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع ثنائي الحدبمعلمات $(n,p)/p \in]0,1[$ ، فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = n.p$$

البرهان

لدينا علاقة التوقع الرياضي:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{n} x \times C_x^n \times p^x \times q^{n-x}$$

$$\mathbb{E}(X) = n \times p \sum_{x=1}^{n} C_{x-1}^{n-1} \times p^{x-1} \times q^{n-x}$$

لان لدينا:

$$p^x = p \times p^{x-1}$$

كذلك لدينا:

$$x \times C_x^n = x \times \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = x \times \frac{n \times (n-1)!}{x \times (x-1)! \times \big(n-1-(x-1)\big)!}$$

بعد الاختزال نجد:

$$x \times C_x^n = n \times C_{x-1}^{n-1}$$

وبالتالي بعد تطبيق صيغة ثنائي الحد، حيث:

$$\sum_{x=1}^{n} C_{x-1}^{n-1} \times p^{x-1} \times q^{n-1-(x-1)} = (p+q)^{n-1}$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\mathbb{E}(X) = n \times p \times (p+q)^{n-1}$$

ومنه:

$$\mathbb{E}(X) = n \times p$$

لان: $p + q = 1$

5.3.4 التباين والانحراف المعياري

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع ثنائي الحدبمعلمات $(n,p)/p \in]0,1[$، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = n.p.q$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n.p.q}$$

البرهان

لدينا علاقة التباين تساوي:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

نقوم اولا بحساب $\mathbb{E}(X^2)$ حيث:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \times C_x^n \times p^x \times q^{n-x}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{n} (x.(x-1)+x) \times C_x^n \times p^x \times q^{n-x}$$

لان لدينا:

$$x^2 = x.(x-1)+x$$

وبالتالي:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x.(x-1) \times C_x^n \times p^x \times q^{n-x} + \sum_{x=1}^{n} x \times C_x^n \times p^x \times q^{n-x}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \underbrace{n \times p \sum_{x=1}^{n} (x-1) \times C_{x-1}^{n-1} \times p^{x-1} \times q^{n-x}}_{(1)} + \underbrace{n \times p \sum_{x=1}^{n} C_{x-1}^{n-1} \times p^{x-1} \times q^{n-x}}_{(2)}$$

الجزء (2) تم حسابه سابقا حيث يساوي: $n \times p$

اما الجزء (1)يكافئ:

$$(1) \Leftrightarrow n \times p \sum_{x=1}^{n} p \times (n-1) \times \frac{(x-1)}{(x-1)} \times C_{x-2}^{n-2} \times p^{x-2} \times q^{n-x}$$

$$(1) \Leftrightarrow n \times p \times p \times (n-1) \sum_{x=1}^{n} C_{x-2}^{n-2} \times p^{x-2} \times q^{n-x}$$

ولدينا:

$$\sum_{x=1}^{n} C_{x-2}^{n-2} \times p^{x-2} \times q^{n-x} = (p+q)^{n-2} = 1$$

ومنه:

$$(1) \Leftrightarrow n \times p \times p \times (n-1) = n \times p^2 \times (n-1)$$

وبالتالي:

$$\mathbb{E}(X^2) = n \times p^2 \times (n-1) + n \times p$$

وعليه:

$$V(X) = n \times p^2 \times (n-1) + n \times p - n^2.p^2$$

$$V(X) = n^2.p^2 - n.p^2 + n.p - n^2.p^2$$

$$V(X) = -n.p^2 + n.p$$

$$V(X) = n(p - p^2)$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

$$V(X) = npq$$

لان: $1 - p = q$

مثال

نرمي قطعة نقد متزنة 10 مرات،ونعرف المتغير العشوائي Xعدد مرات ظهور الوجه.

- المتغير العشوائي X يأخذ قيمتين اما 1 ظهور الوجه او 0 عدم ظهور الوجه، بما ان التجربة تكررت عشر مرات فان المتغير X يتبع توزيع ثنائي الحد بمعلمات $p = 0.5$ و$n = 10$ حيث:

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(10{,}0.5)$ ، دالة توزيعه الاحتمالي تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = C_k^{10} \times 0.5^k \times 0.5^{10-k}$$

اما دالة التوزيع التراكمي تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if \;\; x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} C_k^{10} \times 0.5^k \times 0.5^{10-k} & if \;\; 0 \le x < 1 \\ 1 & if \;\; x > 1 \end{cases}$$

- احتمال ظهور الوجه خمس مرات هو:

$$f_X(5) = C_5^{10} \times 0.5^5 \times 0.5^{10-5}$$

$$f_X(5) = \frac{10!}{5! \times (10-5)!} \times 0.5^5 \times 0.5^5$$

$$f_X(5) = 0.246$$

- احتمال ظهور الوجه على الاكثر مرتين أي يظهر مرتين او مرة واحدة او لا يظهر هو:

$$f_X(X \leq 2) = \quad F_X(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{2} C_k^{10} \times 0.5^k \times 0.5^{10-k}$$
$$= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2)$$
$$= C_0^{10} \times 0.5^0 \times 0.5^{10} + C_1^{10} \times 0.5^1 \times 0.5^9$$
$$+ C_2^{10} \times 0.5^2 \times 0.5^8$$
$$= 0.0546$$

- توقعه الرياضي يساوي:

$$\mathbb{E}(X) = 10 \times 0.5 = 5$$

- التباين وانحرافه المعياري يساوي:

$$V(X) = 10 \times 0.5 \times 0.5 = 2.5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2.5} = 1.581$$

5.4 توزيع Poisson distribution Poisson

5.4.1 دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع Poisson بمعلمة λ ،على الفضاء الاحتمالي $X(\Omega) = \mathbb{N}$، ونرمز له ب: $X \leadsto \mathcal{P}(\lambda)$ ،اذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \mathcal{P}(X = x) = exp(-\lambda).\frac{\lambda^x}{x!}$$

برهان

من اجل إثبات ان $\mathcal{P}(X = x) = exp(-\lambda).\frac{\lambda^x}{x!}$ انها دالة توزيع احتمالي يكفي تبيان :

$$\sum_{x=0}^{+\infty} exp(-\lambda).\frac{\lambda^x}{x!} = 1$$

لدينا:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} exp(-\lambda).\frac{\lambda^x}{x!} = exp(-\lambda)\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$$

ونعلم ان النشر المحدود للدالة الاسية يكتب من الشكل:

$$exp(\lambda) = \frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots \ldots. + \frac{\lambda^n}{n!} + \cdots \ldots = \sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$$

وعليه يصبح لدينا:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} exp(-\lambda).\frac{\lambda^x}{x!} = exp(-\lambda) \times exp(\lambda) = 1$$

ملاحظات

- المتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع Poisson تنتج عن التجارب العشوائية التي تعبر عن بعض الظواهر النادرة الحدوث خلال فترة زمنية معينة او منطقة معينة مثل عدد المكالمات الهاتفية الواردة خلال فترة زمنية معينة او عدد السيارات المارة على الحدود الإقليمية خلال فترة زمنية معينة و كذلك عدد المنتجات الفاسدة خلال انتاج كمية معينة ، عدد حوادث المرور خلال السنة ..الخ

- المعلمة λ تكون موجبة تماما أي $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ وهي تعبر عن معدل ظهور الحدث المعني خلال فترة زمنية معينة.

خاصية

إذا كان المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين ويتبعان توزيع Poisson بحيث $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ و $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\gamma)$،فان مجموعهما يتبع توزيع Poisson بالمعلمة $\lambda + \gamma$ حيث:

$$X + Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda + \gamma)$$

5.4.2 دالة التوزيع التراكمي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع Poisson بمعلمة λ ،على الفضاء الاحتمالي $X(\Omega) = \mathbb{N}$، فان دالة توزيع الكثافة الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{x} exp(-\lambda).\frac{\lambda^x}{x!} \quad / \forall\ x \geq 0$$

5.4.3 التوقع الرياضي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع Poisson بمعلمة λ ، فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

البرهان

لدينا علاقة التوقع الرياضي:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{n} x \times exp(-\lambda).\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\mathbb{E}(X) = exp(-\lambda)\sum_{x=1}^{n} x \times \frac{\lambda.\lambda^{x-1}}{x.(x-1)!}$$

لان:

$$x! = x.(x-1)! \quad \text{و} \quad \lambda^x = \lambda.\lambda^{x-1}$$

ليصبح لدينا:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda.exp(-\lambda)\sum_{x=1}^{n}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

نقوم بتغيير متغير ونضع :

$$x - 1 = y$$

حيث لما $x = 1$ يستلزم $y = 0$ ، واعتمادا على النشر المحدود للدالة الاسية تصبح العلاقة تساوي:

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \sum_{y=0}^{n}\frac{\lambda^{y}}{y!} = exp(\lambda)$$

ومنه:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda.exp(-\lambda).exp(\lambda) = \lambda$$

5.4.4 التباين والانحراف المعياري

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع توزيع Poisson بمعلمة λ ، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = \lambda$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

البرهان

لدينا علاقة التباين تساوي:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

نقوم اولا بحساب $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$ حيث:

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \sum_{x=1}^{+\infty} x(x-1).\,e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty} x.\,(x-1).\frac{\lambda^2.\lambda^{x-2}}{x.\,(x-1).\,(x-2)!}$$

لان:

$$x! = x.\,(x-1).\,(x-2)! \quad \text{و} \quad \lambda^x = \lambda^2.\lambda^{x-2}$$

بعد الاختزال يصبح لدينا:

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \lambda^2.\,e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

واعتمادا على النشر المحدود للدالة الاسية تصبح العلاقة تساوي:

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \lambda^2.\,e^{-\lambda}.\,e^{\lambda} = \lambda^2$$

نعلم ان:

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

ومنه نستنتج ان:

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

وبما ان:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

فان:

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

مثال

مركز استعلامات يستقبل حوالي 50 مكالمة هاتفية خلال الساعة الواحدة ولنفترض ان عدد المكالمات خلال مدة زمنية معينة يتبع توزيع Poisson.

إذا اخدنا وحدة قياس الزمن هي الساعة فان معلمة التوزيع $\lambda = 50$ ، اما اذا اخدنا وحدة قياس الزمن الدقيقة فالمعلمة تصبح $\lambda = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$ ومنه المتغير X يتبع توزيع Poisson بمعلمةλ ، حيث :

$\lambda = \mathbb{E}(X) = V(X) = \frac{5}{6}$ ونكتب $X \sim \mathcal{P}\left(\frac{5}{6}\right)$ حيث دالة توزيعه الاحتمالي تكتب من الشكل:

$$\mathcal{P}(X = x) = exp\left(-\frac{5}{6}\right).\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^x}{x!}$$

اما دالة التوزيع التراكمي تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{x} exp\left(-\frac{5}{6}\right).\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^x}{x!}$$

- احتمال استقبال ثلاث مكالمات في الدقيقة هو:

$$f_X(3) = exp\left(-\frac{5}{6}\right).\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{3!}$$
$$f_X(3) = 0.0419$$

- احتمال استقبال على الاقل مكالمتين في الدقيقة هو:

$$f_X(X \geq 2) = 1 - f_X(X < 2)$$

$$1 - F_X(1) = \sum_{i=0}^{1} exp\left(-\frac{5}{6}\right).\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^x}{x!}$$

$$1 - F_X(1) = f_X(0) + f_X(1)$$

$$1 - F_X(1) = exp\left(-\frac{5}{6}\right).\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^0}{0!} + exp\left(-\frac{5}{6}\right).\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^1}{1!}$$

$$1 - F_X(1) = 0.796$$

ومنه:

$$f_X(X \geq 2) = 0.203$$

5.5 التوزيع الهندسي Geometric distribution

5.5.1 دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المتقطع X يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة $p \in]0,1[$، على الفضاء الاحتمالي $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$، ونرمز له ب: $X \leadsto \mathcal{G}(p)$، اذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \mathcal{P}(X = x) = p.(1 - p)^{x-1} = p.q^{x-1}$$

برهان

من اجل إثبات $\mathcal{P}(X = x) = p.(1 - p)^{x-1}$ انها دالة توزيع احتمالي يكفي تبيان:

$$\sum_{x=1}^{+\infty} p.(1-p)^{x-1} = 1$$

لدينا:

$$\sum_{x=1}^{+\infty} p.(1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{+\infty} p.q^{x-1} = p.\sum_{x=1}^{+\infty} q^{x-1}$$

$$= p.\sum_{x=0}^{+\infty} q^{x}$$

تم تغيير الحد الاول من 1 الى 0 ، ونعلم ان مجموع المتتالية الهندسية التالي $\sum_{x=0}^{+\infty} q^x$ يساوي :

$$\sum_{x=0}^{+\infty} q^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1-q^x}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

وعليه تصبح العلاقة كما يلي:

$$p.\sum_{x=0}^{+\infty} q^x = p.\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

ملاحظات

- المتغيرات العشوائية التي تتبع التوزيع الهندسي تنتج عن التجارب العشوائية ثنائية الحد أي ظهور الحدث A باحتمال p وعدم ظهوره باحتمال $1-p$حيث تتكرر التجربة العشوائية الى غاية ظهور الحدث A والمتغير العشوائي X هو عدد تكرار التجربة العشوائية. وعليه قيم المتغير العشوائي تكون من الشكل

$X(\Omega) = \{1,2,3 \ldots\ldots..i \ldots\ldots.+\infty\}$.

5.5.2 دالة التوزيع التراكمي

تعريف

إذا كان المتغير المتقطع X يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة $p \in]0,1[$ ،على الفضاء الاحتمالي $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$، فان دالة التوزيع التراكمي تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if\ x < 1 \\ 1 - q^x & if\ 1 \leq\ x < \infty \\ 1 & if\ \ x \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

5.5.3 التوقع الرياضي

تعريف

إذا كان المتغير المتقطع X يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة $p \in]0,1[$، فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

البرهان

لدينا علاقة التوقع الرياضي:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \times \mathcal{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x \times p.\, q^{x-1}$$

$$\mathbb{E}(X) = p. \sum_{x=1}^{+\infty} x.\, q^{x-1}$$

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{x=0}^{+\infty}(x+1).\,q^x$$

سابقا قمنا ببرهان العلاقة التالية:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} q^x = \frac{1}{1-q}$$

لدينا المشتقة الاولى للمجموع $\sum_{x=0}^{+\infty} q^x$ هي:

$$\left(\sum_{x=0}^{+\infty} q^x\right)' = \sum_{x=0}^{+\infty} x.\,q^{x-1} = \sum_{x=1}^{+\infty}(x+1).\,q^x$$

هذا يستلزم ان:

$$\sum_{x=1}^{+\infty}(x+1).\,q^x = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{x=0}^{+\infty}(x+1).\,q^x = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

5.5.4 التباين والانحراف المعياري

تعريف

إذا كان المتغير المتقطع X يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة $p \in]0,1[$، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

البرهان

لدينا علاقة التباين تساوي:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

نقوم اولا بحساب $\mathbb{E}(X^2)$ حيث:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 \times p.\, q^{x-1}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = p.\sum_{x=1}^{+\infty} x^2.\, q^{x-1}$$

قمنا سابقا بتبيان العلاقة التالية:

$$\sum_{x=1}^{+\infty}(x+1).\, q^x = \frac{1}{(1-q)^2}$$

نقوم بإعادة اشتقاق الطرفين أي المشتقة الثانية:

$$\left(\sum_{x=1}^{+\infty}(x+1).\, q^x\right)' = \left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)' \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{+\infty} x.\,(x+1).\, q^{x-1} = \frac{2.\,(1-q)}{(1-q)^4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x=1}^{+\infty} x^2.\, q^{x-1} + \sum_{x=1}^{+\infty} x.\, q^{x-1} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\sum_{x=1}^{+\infty} x^2.\, q^{x-1} = \frac{2}{(1-q)^3} - \sum_{x=1}^{+\infty} x.\, q^{x-1}$$

كما برهنا سابقا ان:

$$\sum_{x=1}^{+\infty} x.\, q^{x-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

وعليه:

$$\sum_{x=1}^{+\infty} x^2 . q^{x-1} = \frac{2}{(1-q)^3} - \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = p.\sum_{x=1}^{+\infty} x^2 . q^{x-1} = p.\left(\frac{2}{(1-q)^3} - \frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{2p}{(1-q)^3} - \frac{p}{(1-q)^2}$$

وبالتالي:

$$V(X) = \frac{2p}{(1-q)^3} - \frac{p}{(1-q)^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{2p}{(p)^3} - \frac{p}{(p)^2} - \frac{1}{(p)^2}$$

$$V(X) = \frac{2-p-1}{p^2}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

مثال

إذا كان لدينا صندوق يحتوي على 6 كرات بيضاء و 10 كرات سوداء، ونقوم بالتجربة العشوائية التي من خلالها نقوم بسحب كرة مع الارجاع و نكرر التجربة الى غاية ظهور كرة بيضاء. نعرف المتغير العشوائي X بعدد مرات تكرار التجربة أي عدد مرات السحب الى غاية ظهور الكرة البيضاء.

- في هذه الحالة المتغير X يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة $p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ونكتب $X \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$

حيث دالة توزيعه الاحتمالي تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \mathcal{P}(X = x) = \frac{1}{3}.\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}^{x-1}$$

اما دالة التوزيع التراكمي تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if\ x < 1 \\ 1 - \dfrac{2^x}{3} & if\ 1 \leq\ x < \infty \\ 1 & if\quad x \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

- التوقع الرياضي يقدر بـ:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

- والتباين والانحراف المعياري يقدران بـ:

$$V(X) = \frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{27}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{27}{2}}$$

- احتمال ان تتكرر التجربة ثلاث مرات هو:

$$\mathcal{P}(X = 3) = \frac{1}{3}.\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{3}.\frac{2^2}{3}$$
$$f_X(3) = 0.444$$

6 الفصل السادس: التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة

Special Continuous probability distributions

كما تطرقنا في الفصل السابق الى بعض التوزيعات المتقطعة الخاصة، كذلك في هذا الفصل سوف نستعرض اهم التوزيعات الخاصة المستمرة والتي لها اهمية بالغة في دراسة الاحصاء الاستدلالي و كذلك القياس الاقتصادي، ومن بين هذه التوزيعات ما يلي:

6.1 التوزيع المستمر المنتظم Uniform continuous distribution

6.1.1 دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a,b]$ اذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & if\ x \in [a,b] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ونرمز له بـ: $X \leadsto U_d[a,b]$

6.1.2 دالة التوزيع التراكمي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a,b]$ ، فان دالة توزيع التراكمي تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if\ \ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & if\ \ a \le x < b \\ 1 & if\ \ \ x \ge b \end{cases}$$

برهان

لدينا:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t).dt = \int_{-\infty}^{a} 0.dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}.dt$$

$$F_X(x) = \frac{1}{b-a}.\int_{a}^{x} 1.dt = \left.\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

6.1.3 التوقع الرياضي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a,b]$ ، فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2}$$

البرهان

لدينا:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} x.\frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{+\infty} 0\,dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b-a}\ .\left.\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b-a} \times \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \times \frac{(b-a)\times(b+a)}{2} = \frac{b+a}{2}$$

6.1.4 التباين والانحراف المعياري

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a,b]$ ، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

البرهان

لدينا علاقة التباين تساوي:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

نقوم اولا بحساب $\mathbb{E}(X^2)$ حيث:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\ dx = \int_{a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a} dx = \int_{b}^{+\infty} 0\ dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{b-a} \times \frac{x^3}{3}\Big]_a^b$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{b-a} \times \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{1}{b-a} \times \frac{(b-a)\times(b^2+ab+a^2)}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

وبالتالي:

$$V(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

بعد توحيد المقامات يصبح لدينا:

$$V(X) = \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{12}$$

$$V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

وبالتالي:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(b - a)^2}{12}}$$

مثال

نفرض ان المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[2,8]$ ،
نرمز له بـ: $X \rightsquigarrow U_d[2,8]$

- دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & if\ x \in [2,8] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- دالة توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير X تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & if \;\; x < 2 \\ \dfrac{x-2}{6} & if \;\; 2 \le x < 6 \\ 1 & if \;\; x \ge 6 \end{cases}$$

- التوقع الرياضي للمتغير X يساوي :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2+8}{2} = 5$$

- التباين والانحراف المعياري للمتغير X يساويان:

$$V(X) = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(8-2)^2}{12}} = 1.73$$

- احتمال ان يقع X في المجال $[4,6]$ هو:

$$\mathcal{P}(4 \le X \le 6) = \quad F_X(6) - \quad F_X(4) = \frac{6-2}{6} - \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$$

6.2 التوزيع الاسي Exponentialdistribution

6.2.1 دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع الاسي بمعلمة $\lambda > 0$ اذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \lambda . e^{-\lambda x} \qquad \forall \; x \ge 0$$

ونرمز له بـ: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

ملاحظات

- يستعمل التوزيع الاسي غالبا في الظواهر التى نعبر من خلالها على زمن انتظار وقوع حدث ما، مثل مدة تعطل الاجهزة حيث هذا التعطل يكون مستقل عن مدة حياة الجهاز أي مستقل عن اهتلاك الجهاز بل يكون العطل مفاجئ، وهذا غالبا يكون في الاجهزة الكهربائية او مثل زمن الانتظار من اجل الحصول على خدمة معينة وبشكل عام صفوف الانتظار.
- المعلمة λ تمثل معدل تعطل الاجهزة.
- مقلوب المعلمة $\theta = \frac{1}{\lambda}$ يمثل المعدل الزمني المتوسط لتعطل الجهاز (Mean Time Between Failure)

6.2.2 دالة التوزيع التراكمي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الاسي بمعلمة $\lambda > 0$، فان دالة التوزيع التراكمي تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

برهان

لدينا:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t).dt = \int_{0}^{x} \lambda.e^{-\lambda t}.dt$$

$$F_X(x) = \lambda . \int_{a}^{x} e^{-\lambda t}.dt = \lambda \times \left(\frac{1}{-\lambda}\right).e^{-\lambda t}\Big]_0^x = -e^{-\lambda t}\Big]_0^x$$
$$= \left[-e^{-\lambda x} + e^{-\lambda 0}\right] = 1 - e^{-\lambda x}$$

6.2.3 التوقع الرياضي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الاسي بمعلمة $\lambda > 0$، فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

البرهان

لدينا:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x. f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x. \lambda. e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx$$

نكامل بالتجزئة، نضع:

$$u = x \Longrightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-\lambda x} \Longrightarrow v = \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}$$

وعليه:

$$\int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{-\lambda} \times x. e^{-\lambda x}\Big]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= (0 - 0) - \frac{1}{\lambda^2} \times e^{-\lambda t}\Big]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda^2} \times (0 - 1) = \frac{1}{\lambda^2}$$

لان:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n. e^x = 0 \qquad \text{نهاية شهيرة}$$

وبالتالي:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

6.2.4 التباين والانحراف المعياري

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الاسي بمعلمة $\lambda > 0$، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}$$

البرهان

لدينا علاقة التباين تساوي:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

نقوم اولا بحساب $\mathbb{E}(X^2)$ حيث:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x^2.\lambda.e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx$$

نكامل بالتجزئة، نضع:

$$u = x^2 \Longrightarrow u' = 2x$$

$$v' = e^{-\lambda x} \Longrightarrow v = \frac{1}{-\lambda}e^{-\lambda x}$$

وعليه:

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{-\lambda}\times x^2.e^{-\lambda x}\Big]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{-\lambda}x.e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= (0-0) + \frac{2}{\lambda}\times\int_0^{+\infty} x.e^{-\lambda x}\,dx$$

نعيد مرة اخرى التكامل بالتجزئة للعلاقة $\int_0^{+\infty} x.e^{-\lambda x}\,dx = I$، نضع:

$$u = x^2 \Longrightarrow u' = 2x$$

$$v' = e^{-\lambda x} \Longrightarrow v = \frac{1}{-\lambda}e^{-\lambda x}$$

$$I = \frac{1}{-\lambda}\times x.e^{-\lambda x}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{1}{-\lambda}e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= (0-0) - \frac{1}{\lambda^2}\times e^{-\lambda t}\Big]_0^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda^2}\times(0-1) = \frac{1}{\lambda^2}$$

وعليه يصبح لدينا:

$$\mathbb{E}(X^2) = \lambda\times\frac{2}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

وبالتالي:

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال

نفرض ان زمن انتظار المسافرين من اجل ختم جواز السفر عند شرطة الحدود يتبع التوزيع الاسي بمتوسط 10 دقائق . لذلك يمكن التعبير عن زمن الانتظار بالمتغير العشوائي المستمر X الذي يتبع التوزيع الاسي بمعلمة $\lambda = 0.1$ لان لدينا $\frac{1}{\lambda} = 10$،أي $\lambda = 0.1$ نرمز له بـ: $X \sim \mathcal{E}(0.1)$

- دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = 0.1. e^{-0.1x} \qquad \forall\, x \geq 0$$

- دالة توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير Xتكتب من الشكل:

$$F_X(x) = 1 - e^{-0.1x}$$

- التوقع الرياضي للمتغير X يساوي :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0.1} = 10$$

- التباين والانحراف المعياري للمتغير X يساويان:

$$V(X) = \frac{1}{0.1^2} = 100$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{0.1^2}} = 10$$

- احتمال ان ينتظر مسافر لمدة 20 دقيقة للمرور هو:

$$\mathcal{P}(X > 20) = 1 - \mathcal{P}(X < 20) = 1 - \quad F_X(20)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-0.1\times 20}\right)$$

$$\mathcal{P}(X > 20) = 0.135$$

6.3 توزيع غاما Gamma distribution

قبل عرض خصائص توزيع Gamma سوف نتطرق الى دالة Gamma الرياضية :

تعريف

الدالة Gamma المنسوبة الى Euler المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ تكتب من الشكل:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1}. e^{-x}\, dx$$

ملاحظات

1– دالة Gamma هي تعميم لدالة العاملي لجميع الاعداد الحقيقية الموجبة حيث مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^{+*}$ بينما مجموعة تعريف دالة العاملي هي فقط الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

برهان

لتبيان ان دالة Gamma ما هي الا تعميم لدالة العاملي لا بد ان تكتب من الشكل:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 1 = n!$$

نحاول ايجاد التكامل الغير محدود للدالة Gamma باستعمال التكامل بالتجزئة:

لدينا: $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} . e^{-x}\, dx$

نضع:

$$u = x^{n-1} \Longrightarrow u' = (n-1).\, x^{n-2}$$

$$v' = e^{-x} \Longrightarrow v = -e^{-x}$$

ومنه:

$$\Gamma(n) = -x^{n-1}.\, e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n-1).\, x^{n-2} . e^{-x} dx$$

$$\Gamma(n) = 0 + (n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} . e^{-x} dx$$

العلاقة $\int_0^{+\infty} x^{n-2} . e^{-x}\, dx$ ماهي الا $\Gamma(n-1)$ ، نقوم بالتكامل بالتجزئة مرة اخرى بوضع:

$$u = x^{n-2} \Longrightarrow u' = (n-2).\, x^{n-3}$$

$$v' = e^{-x} \Longrightarrow v = -e^{-x}$$

ويصبح لدينا:

$$\Gamma(n-1)=\int_0^{+\infty} x^{n-2}\,.\,e^{-x}dx=-x^{n-2}.\,e^{-x}]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}(n-2).\,x^{n-3}\,.\,e^{-x}dx$$

$$\Gamma(n-1)=0+(n-2)\int_0^{+\infty} x^{n-3}\,.\,e^{-x}dx=(n-2).\,\Gamma(n-2)$$

من خلال المكاملة بالتراجع نتحصل على:

$$\Gamma(n)=(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\ldots\ldots\times\Gamma(1)$$

يكفي الان ان نبين ان: $\Gamma(1)=1$

لدينا:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} x^{1-1}\,.\,e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=-e^{-x}]_0^{+\infty}=0-(-1)=1$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\Gamma(n)=(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\ldots\ldots\times 1=(n-1)!$$

ومنه نستنتج ان:

$$n!=\Gamma(n+1)$$

نستنتج كذلك:

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$$

لدينا كذلك :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

حيث: $\pi\approx 3.1415$ ثابت الدائرة

6.3.1 دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع Gamma بمعلمتين $n, \lambda > 0$ اذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} . e^{-\lambda x} . x^{n-1} \qquad / \, x \geq 0$$

ونرمز له بـ: $X \sim \Gamma(n, \lambda)$

يمكن التأكد من دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Gamma حيث:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} . e^{-\lambda x} . x^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} . x^{n-1}\, dx = I$$

نقوم بتغيير متغير حيث نضع:

$$\lambda x = y \Rightarrow x = \frac{y}{\lambda} \Rightarrow \mathrm{dx} = \frac{1}{\lambda} dy$$

ومنه:

$$I = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \times \int_0^{+\infty} e^{-y} . \frac{y^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \frac{1}{\lambda} dy = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \times \frac{1}{\lambda^n} \times \int_0^{+\infty} e^{-y} . y^{n-1}\, dy.$$

مع العلم ان:

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} . y^{n-1}\, dy = \Gamma(n)$$

وبالتالي:

$$I = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \times \frac{\Gamma(n)}{\lambda^n} = 1$$

ملاحظة

- من اجل $n = 1$ يصبح توزيع Gamma توزيع اسي حيث:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^1}{\Gamma(1)} . e^{-\lambda x} . x^{1-1} = \lambda . e^{-\lambda x}$$

6.3.2 دالة التوزيع التراكمي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع Gamma بمعلمتين $n, \lambda > 0$، فان دالة التوزيع التراكمي تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} . \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!}$$

6.3.3 التوقع الرياضي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع Gamma بمعلمتين $n, \lambda > 0$، فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{\lambda}$$

6.3.4 التباين والانحراف المعياري

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع Gamma بمعلمتين $n, \lambda > 0$، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}$$

مثال

- دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = 0.1. e^{-0.1x} \qquad \forall\, x \geq 0$$

- دالة توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير Xتكتب من الشكل:

$$F_X(x) = 1 - e^{-0.1x}$$

- التوقع الرياضي للمتغير X يساوي :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0.1} = 10$$

- التباين والانحراف المعياري للمتغير X يساويان:

$$V(X) = \frac{1}{0.1^2} = 100$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{0.1^2}} = 10$$

- احتمال ان ينتظر مسافر لمدة 20 دقيقة للمرور هو:

$$\mathcal{P}(X > 20) = 1 - \mathcal{P}(X < 20) = 1 - \quad F_X(20)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-0.1\times 20}\right)$$
$$\mathcal{P}(X > 20) = 0.135$$

6.4 التوزيع الطبيعي Normal distribution

يعتبر هذا التوزيع اهم التوزيعات الاحتمالية التي يتم استخدامها في اغلب الظواهر الاقتصادية و الاحصائية لان اغلب هذه الظواهر المتعلقة بسلوك الانسان تأخذ متجه طبيعي مثل وزن الانسان ، قامة الانسان ، دخل الفرد ..الخ ،كذلك غالبية التوزيعات الخاصة التي قمنا بدراستها في هذا الفصل و الفصل السابق سواء المنفصلة او المستمرة يمكن تقريبها للتوزيع الطبيعي عند توفر بعض الشروط و اهم هذه الشروط يجب ان تكون العينة الاحصائية كبيرة نسبيا.

6.4.1 دالة الكثافة الاحتمالية

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع الطبيعي بمعلمتين μو σ اذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ونرمز له بـ: $X \backsim \mathcal{N}(\mu\,, \sigma)$

يمكن التأكد من دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي من خلال حساب التكامل على مجال التعريف $\mathbb{R}$

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = I$$

نقوم بتغيير متغير فنضع:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Longrightarrow dz = \frac{1}{\sigma} dx$$

يصبح لدينا:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

لإيجاد هذا التكامل الاخير هناك طريقتين:

الطريقة الاولى :

نلاحظ ان الدالة $e^{-\frac{z^2}{2}}$ دالة زوجية متناظرة بالنسبة الى $z = 0$ حيث:

$$f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} = f(-z)$$

وبالتالي يصبح:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right]$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

نقوم بتغيير اخر للمتغير نضع:

$$u = \frac{z^2}{2} \Rightarrow z = \sqrt{2u} \Rightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{2u}} du$$

يصبح لدينا:

$$I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{2u}} du$$

$$I=\frac{2}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}\, e^{-u}\ \ du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}\, e^{-u}\ \ du$$

رأينا سابقا ان:

$$\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}\, e^{-u}\ \ du=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

ومنه يصبح لدينا:

$$I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times\sqrt{\pi}=1$$

الطريقة الثانية :

باستعمال تكامل Gausse حيث نعلم ان:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt=\sqrt{2\pi}$$

وعليه يصبح لدينا:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\sqrt{2\pi}=1$$

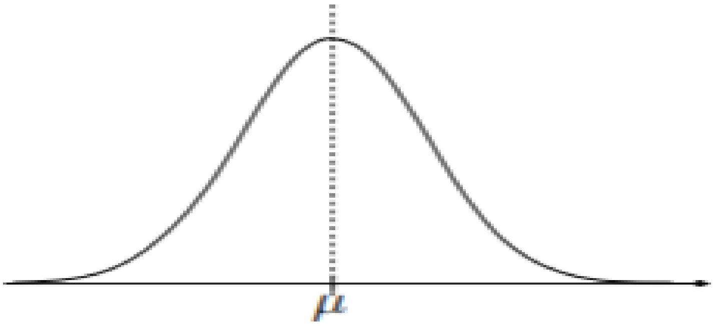
ملاحظات

1- التوزيع الطبيعي متناظر حول وسطه الحسابي μ بتباين قدره σ^2 أي ان:

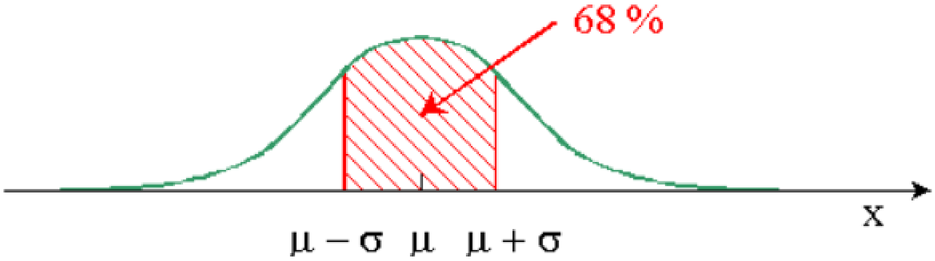
$$f(\mu+\sigma)=f(\mu-\sigma)$$

2- في التوزيع الطبيعي المنوال هو نفسه الوسط الحسابي μ

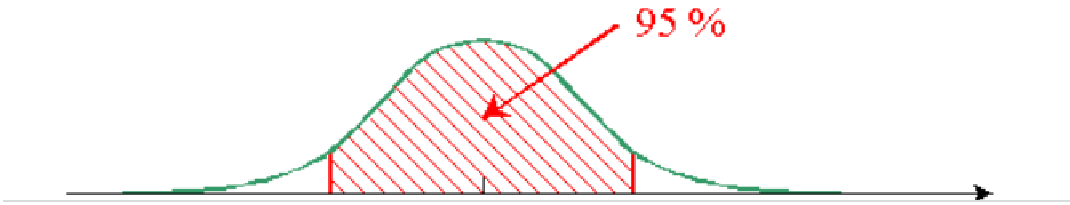
3- التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي يشبه الناقوس أي على شكل جرس:



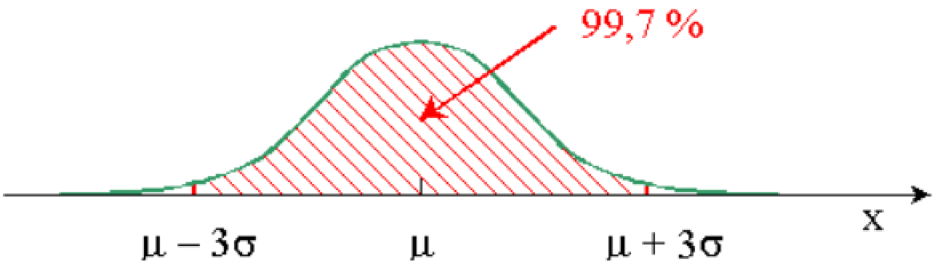
4- 68 % من المشاهدات تقع في المجال $[\mu - \sigma ، \mu + \sigma]$



95% من المشاهدات تقع في المجال $]\mu - 2\sigma ، \mu + 2\sigma[$



99.7% من المشاهدات تقع في المجال $]\mu - 3\sigma ، \mu + 3\sigma[$



6.4.2 دالة التوزيع التراكمي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمعلمتين μوσ ، فان دالة التوزيع التراكمي تكتب من الشكل:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

ملاحظة

دالة التوزيع التراكمي ليست لها صيغة تحليلية مألوفة كباقي التوزيعات الاخرى السابقة ولذلك في حالة حساب الاحتمالات التراكمية لا بذ من اللجوء الى جدول احصائي خاص بالقانون الطبيعي لأجل ايجاد الاحتمال.

6.4.3 التوقع الرياضي

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمعلمتين μوσ ، فان التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

البرهان

لدينا:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

نقوم بتغيير متغير ، نضع :

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = z\sigma + \mu \Rightarrow dx = \sigma dz$$

يصبح لدينا:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z\sigma + \mu). e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

نقوم بتفكيك التكامل لجزئين:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z. e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = I$$

الجزء الاول :

نعلم ان :

$$\int f' \times e^f = e^f$$

ومنه نحصل على:

$$\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z. e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -e^{-\frac{z^2}{2}} \Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0$$

الجزء الثاني :

$$\mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = II$$

نقوم بتغيير متغير حيث نضع:

$$\frac{z^2}{2} = y \Rightarrow z = \sqrt{2y} \Rightarrow dz = \frac{dy}{\sqrt{2y}}$$

تذكير بمشتقة الدالة الجدرية:

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

ومنه:

$$II = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{2y}} = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} . e^{-y}\, dy$$
$$= \mu . \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^{-\frac{1}{2}} . e^{-y}\, dy = \mu . \sqrt{2} \int_{0}^{+\infty} y^{-\frac{1}{2}} . e^{-y}\, dy$$
$$= \mu . \sqrt{2} . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \mu . \sqrt{2} . \sqrt{\pi} = \mu . \sqrt{2\pi}$$

ومنه نحصل على:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \mu . \sqrt{2\pi} = \mu$$

6.4.4 التباين والانحراف المعياري

تعريف

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمعلمتين μ و σ ، فان التباين والانحراف المعياري يحسب بالعلاقات التالية:

$$V(X) = \sigma^2$$

$$\sigma(X) = \sigma$$

البرهان

لدينا علاقة التباين تساوي:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

نقوم اولا بحساب$\mathbb{E}(X^2)$حيث:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

نقوم بتغيير متغير ، نضع :

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = z\sigma + \mu \Rightarrow dx = \sigma dz$$

$$x^2 = (z\sigma + \mu)^2 = z^2\sigma^2 + 2z\sigma\mu + \mu^2$$

وعليه:

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2\sigma^2 + 2z\sigma\mu + \mu^2). e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

نقوم بتفكيك التكامل الى ثلاث اجزاء:

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 . e^{-\frac{z^2}{2}} dz + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{+\infty} z. e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right]$$

الجزء الاول:

$$I = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 . e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

نضع:

$$\frac{z^2}{2} = y \Longrightarrow z^2 = 2y \Longrightarrow z = \sqrt{2y} \Longrightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{2y}} dy$$

ومنه يصبح لدينا:

$$I=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}2y.e^{-y}\frac{1}{\sqrt{2y}}dy=\sigma^2\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}y^{\frac{1}{2}}.e^{-y}\,dy$$

$$=\sigma^2 2.\sqrt{2}\int_{0}^{+\infty}y^{\frac{1}{2}}.e^{-y}\,dy$$

$$I=\sigma^2.2.\sqrt{2}.\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

ولدينا:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

ونعلم ان: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ومنه:

$$I=\sigma^2.2.\sqrt{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sigma^2\sqrt{2\pi}$$

الجزء الثاني:

$$II=2\sigma\mu\int_{-\infty}^{+\infty}z.e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=2\sigma\mu\left[-e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=2\sigma\mu[0-0]=0$$

الجزء الثالث: حيث قمنا بحسابه سابقا ووجدنا:

$$III=\mu^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\mu^2\sqrt{2\pi}$$

وبالتالي نجد:

$$\mathbb{E}(X^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma^2\sqrt{2\pi}+\mu^2\sqrt{2\pi}\right]=\sigma^2+\mu^2$$

وفي الاخير نتحصل على:

$$V(X)=\mathbb{E}(X^2)-\left(\mathbb{E}(X)\right)^2\Leftrightarrow V(X)=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$$

6.4.5 القانون الطبيعي المعياري Standard distribution

يمكن تحويل أي دالة كثافة احتمالية للقانون الطبيعي بمعلمتين μو σ الى كثافة احتمالية معيارية وذلك من خلال تغيير المتغير حيث نأخذ :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ويصبح هذا المتغير Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري.

تعريف

نقول ان المتغير العشوائي المستمر Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمعلمتين $\mu = 0$ و$\sigma = 1$ اذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$$

ونرمز له بـ: $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0\,,1)$

خواص

- متوسط التوزيع الطبيعي المعياري: $\mathbb{E}(Z) = 0$
- تباين التوزيع الطبيعي المعياري :$V(Z) = 1$
- $F(Z) = \mathcal{P}\ (Z \leq z)$ يتم الحصول على هذا الاحتمال من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال 1

اذا كانت علامات الطلبة في مادة الاحصاء تتبع التوزيع الطبيعي بمعدل 11 و انحراف معياري 3، فان:

- نسبة الطلبة الذين تنحصر علاماتهم بين النقطة 8 و 14 هي :

$$\mathcal{P}\ (8 \leq x \leq 14)$$

نقوم بوضع المتغير المعياري zعوض x نحصل على :

$$\mathcal{P}\left(\frac{8-11}{3} \leq \frac{x-11}{3} \leq \frac{14-11}{3}\right) = \mathcal{P}\,(-1 \leq z \leq 1)$$
$$= \mathcal{P}\,(z \leq 1) - \mathcal{P}\,(z \leq -1)$$
$$= \mathcal{P}\,(z \leq 1) - 1 + \mathcal{P}\,(z \leq 1) = 2\mathcal{P}\,(z \leq 1) - 1$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد ان :

$$\mathcal{P}\,(z \leq 1) = 0.8413$$

ومنه :

$$\mathcal{P}\,(8 \leq x \leq 14) = 0.6826$$

- نسبة الطلبة الذين تفوق علاماتهم 16 هي :

$$\mathcal{P}\,(x \geq 16) = 1 - \mathcal{P}\,(x \leq 16)$$

نقوم بوضع المتغير المعياري zعوض x نحصل على :

$$1 - \mathcal{P}\left(\frac{x-11}{3} \leq \frac{16-11}{3}\right) = 1 - \mathcal{P}\left(z \leq \frac{5}{3}\right)$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد ان :

$$\mathcal{P}\left(z \leq \frac{5}{3}\right) = 0.9515$$

ومنه:

$$\mathcal{P}\,(x \geq 16) = 0.0485$$

مثال 2

تنتج مزرعة حوالي 2000 دجاجة كل ثلاث اشهر، من خلال التجربة لوحظ في ظل الظروف الملائمة ان وزن الدجاج يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 2 كغ و انحراف معياري 450 غ

-. عدد الدجاج المنتج الذي يفوق وزنه 2300 غ هو :

$$\mathcal{P}\ (x \geq 2300) = 1 - \mathcal{P}\ (x \leq 2300)$$

نقوم بوضع المتغير المعياري zعوض x نحصل على :

$$1 - \mathcal{P}\ \left(\frac{x - 2000}{450} \leq \frac{2300 - 2000}{450}\right) = 1 - \mathcal{P}\ \left(z \leq \frac{2}{3}\right)$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد ان :

$$\mathcal{P}\ \left(z \leq \frac{2}{3}\right) = 0.7454$$

ومنه:

$$\mathcal{P}\ (x \geq 2300) = 0.2546$$

وبالتالي عدد الدجاج هو :

$$0.2546 \times 2000 \cong 509$$

عدد الدجاج المنتج الذي يقل وزنه عن 1700 غ هو :

$$\mathcal{P}\ (x \leq 1700)$$

نقوم بوضع المتغير المعياري zعوض x نحصل على :

$$\mathcal{P}\ \left(\frac{x - 2000}{450} \leq \frac{1700 - 2000}{450}\right) = \mathcal{P}\ \left(z \leq -\frac{2}{3}\right)$$
$$= 1 - \mathcal{P}\ \left(z \leq \frac{2}{3}\right)$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد ان :

$$\mathcal{P}\ \left(z \leq \frac{2}{3}\right) = 0.7454$$

ومنه :

$$\mathcal{P}\ (x \leq 1700) = 0.2546$$

وبالتالي عدد الدجاج هو :

$$0.2546 \times 2000 \cong 509$$

ملاحق

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

z	0.841	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
$\Phi(z)$	0.8000	0.9000	0.9500	0.9750	0.9800	0.9900	0.9950	0.9975	0.9990	0.9995

المراجع و المصادر

باللغة العربية

1- امير حنا هرمز (1990)، الاحصاء الرياضي، دار الكتب للطباعة و النشر ، جامعة الموصل.

2- انيس اسماعيل كنجو (2000)، الاحصاء والاحتمالات ، مكتبة العبيكان ، الرياض

3- جبار عبد مضحي (2011)، مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار المسيرة للنشر و التوزيع، عمان

4- جلال مصطفى الصياد (2008)، نظرية الاحتمالات، دار حافظ،ط6، جدة

5- مبارك اسير ديب (2009)، مبادىء الاحتمالات و الاحصاء، جامعة تشرين.

6- موراي شيبجل و اخرون (2004)، الاحتمالات و الاحصاء ، ملخصات شوم ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر.

باللغة الاجنبية

1- Christophe Hurlin, Valerie Mignon (2015), Statistique et probabilités en économie et gestion, DUNOD, Paris.

2- Daniel Tredon, Myriam Maumy-Bertrand, Frediric Bertrand (2009), Mathématique, statistique et probabilités, DUNOD, Paris.

3- Renée Veysseyre (2014), Statistique et probabilité pour l'ingénieur, DUNOD, Paris.

4- Jean-pierreLecoutre (2008), TD statistique et probabilité, DUNOD, Paris.

5- Jean-pierreLecoutre (2016), statistique et probabilité, DUNOD, Malakoff.

6- Seymour Lipschuiz (1973), Probabilités, SERIE SCHAUM, Paris.

7- Grégoire Dupont (2015), Probabilités et statistiques pour l'enseignement, DUNOD, Paris.

8- Brigitte Tribout (2013), Statistique pour économistes et gestionnaires, PEARSON, France.

9- Francoise Benoist et autre (2011), Mathématiques ECS 1ER Année,DONOD ,Paris.

10- Francois Aubin, René Signoret (2016),L'essetiel des probabilités et statistiques,ELLIPSES,Paris.