

مطبوعة في:

# تحليل السلاسل الزمنية

اعداد: د. رملي محمد

أستاذ محاضر

قسم العلوم الاقتصادية

موجهة لطلبة الماستر:

• تخصص اقتصاد كمي



# فهرس المحتويات

V	Introduction تقديم
1	1. طرق الاستقطاب على المدى القصير Short-Term Extrapolation Methods
2	ا. مفاهيم وتعريف
3	1. الفرضيات التي يقوم عليه التنبؤ
3	2. الخطوات المتخذة لبناء نموذج تنبؤي
3	3. أساليب التنبؤ
8	اا. السلاسل الزمنية
8	1. تعريف السلسلة الزمنية
9	2. مركبات السلسلة الزمنية وطرق الكشف عنها
20	ااا. التنبؤ بنماذج الاستقطاب
20	1. التنبؤ بنماذج الاتجاه العام وطرق تقييمها
27	2. التنبؤ والتمهيد بالنماذج المكيفة
37	ااا. المركبة الفصلية وكيفية التعامل معها
37	1. طرق إزالة المركبة الفصلية
42	2. نمذجة المركبة الفصلية
64	2. أدوات تحليل السلاسل الزمنية Elements of Time Series Analysis
65	ا. الاستقرارية Stationary
65	1. المفهوم والخصائص
67	2. دالة الارتباط الذاتي البسيطة والجزئية
68	3. اختبارات "التشويش الأبيض" والاستقرارية
72	اا. اختبارات عدم الاستقرارية وجذر الوحدة
72	1. عدم الاستقرارية: نموذج TS ونموذج DS
74	2. اختبارات الجذر الأحادي Unit Root Tests
88	ااا. اختبارات الخطية

88	1. اختبار McLeod and Li (ML) 1983
89	2. اختبار Brock, Dechert and Scheinkman (BDS) 1987
90	3. اختبار Ramsey (1969) RESET
91	4. اختبار Keenan (1985) and Tsay (1986)
92	5. اختبار Threshold Autoregressive-Likelihood Ratio (TAR-LR)
93	6. اختبار Engle (1982)
94	IV. النماذج الخطية للسلاسل الزمنية
94	1. نماذج الانحدار الذاتي Autoregressive Models (AR)
96	2. نماذج المتوسطات المتحركة Moving Average Models (MA)
98	3. النماذج المختلطة Mixed Models ARMA(p,q)
101	4. النماذج المختلطة (الانحدار الذاتي-المتوسطات المتحركة) الموسمية SARIMA
102	V. طريقة Box and Jenkins
102	1. مرحلة البحث عن التمثيل المناسب (التعرف)
103	2. مرحلة التقدير
109	3. مرحلة التشخيص
111	4. مرحلة التنبؤ
124	3. نماذج اشعة الانحدار الذاتي Vector Autoregressive (VAR)
125	I. نماذج الانحدار الذاتي المتعدد Multivariate Autoregressive Models
125	1. الصيغة العامة لنموذج VAR
126	2. الصيغة العامة لنموذج VARMA أو ARMAX
127	II. تقدير معاملات نموذج VAR
127	1. طريقة التقدير
127	2. تحديد درجة الابطاء
128	3. التنبؤ
129	III. ديناميكية نموذج VAR
129	1. تمثيل متجه المتوسطات المتحركة VMA للسيرة VAR

130.....	2. تحليل الصدمات ودوال الاستجابة Impulse Analysis
132.....	3. تحليل التباين Variance Decomposition
133.....	IV. السببية
134.....	1. اختبار السببية حسب Granger 1969
135.....	2. اختبار السببية حسب Sims 1980
140.....	4. التكامل المشترك ونموذج تصحيح الخطأ (ECM) Cointegration and Error Correction Model
141.....	I. مفهوم التكامل المشترك Concept of Cointegration
141.....	1. خصائص درجة التكامل المشترك لسلسلة زمنية
142.....	2. شروط التكامل المشترك
143.....	3. نموذج تصحيح الخطأ (ECM) Error Correction Model
144.....	II. التكامل المشترك بين متغيرين
144.....	1. اختبار التكامل المشترك بين متغيرين
145.....	2. تقدير نموذج تصحيح الخطأ
146.....	III. تعميم التكامل المشترك ونموذج تصحيح الخطأ
146.....	1. التكامل المشترك بين k متغير
147.....	2. تقدير نموذج تصحيح الخطأ
148.....	3. نموذج تصحيح الخطأ المتعدد VECM
150.....	4. اختبار علاقة التكامل المشترك
153.....	5. اختبار ضعف المتغيرات الخارجية Weak Exogeneity
154.....	6. اختبار الفرضيات لعلاقات التكامل المشترك
154.....	7. ملخص إجراء التقدير
161.....	5. نماذج الانحدار الذاتي المشروطة بعدم تجانس التباين
161.....	Autoregressive Conditional Heteroscedastic (ARCH) Models
162.....	I. مفاهيم
163.....	1. مشكل عدم تجانس تباينات الأخطاء
164.....	2. التوزيع الشرطي للتوقع

165.....	II. صياغة نموذج ARCH.....
167.....	III. خصائص نموذج ARCH.....
169.....	IV. تعميم، اختبار وتقدير نموذج ARCH.....
169.....	1. تعميم نموذج ARCH.....
170.....	2. اختبار نموذج ARCH/GARCH.....
171.....	3. تقدير نموذج ARCH/GARCH.....
175.....	V. التنبؤ بنموذج ARCH/GARCH.....
176.....	VI. نماذج الانحدار الذاتي المشروطة بعدم تجانس الأخطاء المستحدثة.....
176.....	1. نماذج ARCH/GARCH غير المتناظرة Asymmetric ARCH/GARCH.....
179.....	2. نماذج ARCH-M / GARCH-M.....
179.....	3. نماذج GARCH غير المستقرة IGARCH.....
180.....	4. نماذج GARCH ذات الذاكرة الطويلة.....
185.....	قائمة التمارين.....
187.....	الجدول الإحصائية.....
195.....	قائمة المراجع.....

## تقديم Introduction

في الوقت الذي تكون فيه التغيرات في الساحة الاقتصادية سواء في الهيكل أو في الجوانب التقنية سريعة وتترك هامشا منخفضا للتكيف بأثر رجعي، فإن التنبؤ الاقتصادي لا يكون له أهمية ملحة، ولذلك ينبغي تحسين طرق التنبؤ قدر الإمكان من خلال النمذجة الاقتصادية القياسية.

هناك فئتان رئيسيتان من ذلك. الخط الأول من الفكر يتألف من افتراض وجود استقرار جيد لسلوك العوامل الاقتصادية وبالتالي العلاقات الاقتصادية الأولية، ثم نسعى من خلالها تحليل الماضي القريب إلى بناء نموذج قياسي يشرح العلاقات بين الظاهرة المعينة التي تتم دراستها والعوامل الداخلية والخارجية التي تحكمها. هذا المسار هو الأفضل لأنه يشرح أصل مستويات التوقعات. كما أنه أكثر دقة ومرونة ولكنه صعب ومكلف بشكل عام. في الفئة الثانية من هذه المنهجية، نفترض وجود حد معين من القصور للظواهر الشاملة. لذلك، فإننا نسمح لأنفسنا باستقراء (استقطاب) السجلات من الماضي والتي تم تعديلها مسبقا من خلال دالة تحليلية. مثل هذا الموقف فهو مقبول من حيث أنه؛ من ناحية، قد أدركنا بأنه هناك انتظام محدد في التطور الماضي للسيرورة، ومن ناحية أخرى، هناك أسباب كافية للاعتقاد بأنه هناك تعديل ولكنه بطيء نسبيا في تطور المعلمات السببية للظاهرة.

تم اقتراح العديد من طرق التعديل ولكن من الواضح أن هذه الأساليب التي يمكن وصفها بأنها وصفية لها صلاحية نسبية فقط، وتظهر الخبرة أنه يجب أن يتم الاستقطاب بحذر. وبالتالي يمكن اعتبار ان التنبؤات هي صالحة فقط على المدى القصير.

السلسلة الزمنية التي تمثل التطور الزمني للظاهرة التي سيتم دراستها من خلال ثلاثة أوجه: قد تكون دالة اتجاه عام (تحتوي على مركبة الاتجاه العام إضافة الى المركبة العشوائية) تعكس متوسط تطور الظاهرة خلال الفترة المرجعية او قد تكون نموذج عشوائي لا يحتوي الا على المركبة العشوائية، او قد تكون دالة تضمن كل مركبات السلسلة الزمنية من المركبة الموسمية او الدورية، المركبة العشوائية، ومركبة الاتجاه العام.

سوف تغطي هذه الدروس جميع مجالات تحليل السلاسل الزمنية من: نماذج الاستقطاب، اختبارات جذر الوحدة، النماذج الخطية، نماذج VAR، التكامل المشترك، نماذج VECM، نماذج ARCH، وتقدم أيضا مجموعة من التمارين، تلبية للحاجة التعليمية التي يتم وضعها على اساس الممارسة النظرية للمعرفة.

# 1. طرق الاستقطاب على المدى القصير

## Short-Term Extrapolation Methods

لا شك في أن الخطوة الأولى في أي دراسة لسيرورة ما يتطلب تمثيلها من خلال نموذج رياضي جيد يميز سلوكها الديناميكي، وهذا من معرفة القياسات التجريبية من هذه العملية. هذه الخطوة هي أولية وضرورية في تحليل السيوررات لأنها تحدد شروط الأداء والأهداف التي تهدف إلى ذلك، وللحصول على النموذج الملائم، من الضروري أولاً أن يكون لدينا بيانات موثوقة وكافية، وفي هذه الحالة، يجب أن يكون لدينا تاريخ من المشاهدات متباعد بانتظام مع مرور الزمن. ثم، بعدها البحث عن منهجية للتنبؤ.

هناك نوعان رئيسيان من الأساليب الممكنة لذلك، فالأسلوب الأول يتمثل في طرق الاستقطاب، والتي تتكون في تحديد عدد معين من المكونات في السلسلة نفسها التي يمكن توسيعها في المستقبل. أم الأسلوب الآخر، فيتمثل في الطرق التفسيرية التي تبحث عن الروابط بين السلسلة التي سيتم التنبؤ بها والسلسلة التفسيرية من خلال حسابات الارتباط. الفكرة الأساسية من هذا، في ظل العشوائية، هو أنه لا شيء يتم تحديده بدقة. في هذه الحالة، تكون الارتباطات الجيدة إلى حد ما هي الأشياء الوحيدة التي يمكننا التعامل معها لتفسيرها أو التصرف فيها. ثم يتعين بعد ذلك استخدام طرق الاستقطاب.

من خلال هذا التقديم الموجز سوف نتعرض إلى طرق الاستقطاب حسب مايلي:

أ. مفاهيم وتعريف.

ب. السلاسل الزمنية.

ج. التنبؤ بنماذج الاستقطاب.

د. المركبة الفصلية وكيفية التعامل معها.

## 1. مفاهيم وتعريف

قبل الولوج الى مفهوم وأدوات تحليل السلاسل الزمنية لابد من الإشارة الى بعض المفاهيم الأساسية والتي منها أساليب التنبؤ التي تعمل على تحديد موقعة السلاسل الزمنية. يعتبر التنبؤ على انه رؤية مستقبلية لما تكون عليه الظواهر والمتغيرات في المستقبل. بمعنى اسقاط الماضي على المستقبل من خلال الحاضر. من خلال هذا المفهوم لازالت كلمة التنبؤ تستعمل للدلالة عن اية معرفة في المستقبل، بينما هناك تمييز واضح في اللغات الحية الأخرى، وفيمايلي تعريف وجيز لهذه المفاهيم (شرابي، 2000، صفحة 9):

## - التقدير Estimation

هو عملية إدراك الواقع وصياغته في شكل نموذج رياضي- احصائي يوضح العلاقات السببية او الارتباطية بين المتغيرات المستقلة والتابعة.

## - التوقع Prevision

يعتمد على النموذج الناتج عن عملية التقدير، وبالتالي يعني الحصول على المستويات المستقبلية للظاهرة المدروسة.

## - التنبؤ Forecast

يختلف عن التوقع بكونه يهتم بالتغيرات الطارئة والظواهر الاقتصادية والاجتماعية المعقدة....، مثلا اكتشاف مصدر جديد للطاقة، ازمة اقتصادية، بينما يقتصر التوقع على المؤشرات الكمية. طبيعة موضوع التنبؤ تجعله لا يعتمد على بناء النماذج الرياضية وهو لا يمتلك منهجا علميا دقيقا مثل ما هو الشأن بالنسبة للتوقع، فعملية التنبؤ تعتمد على الخبرة الهائلة وعلى المعرفة العلمية والعملية في مجال الظاهرة المدروسة مما يجعل موضوع التنبؤ أقرب للفن من العلم.

## - التخطيط Planification

يعتبر التخطيط اشمل من عمليتي التوقع والتنبؤ، فهو يشتمل على التنبؤ بالمستقبل بما سيكون عليه مع الاستعداد لهذا المستقبل. كذلك يقوم التخطيط على اختيار بديل من عدة بدائل، بمعنى أنه إذا لم يكن هناك بدائل فلا حاجة للتخطيط للوصول إلى الهدف بأفضل النتائج وأقل التكاليف.

## 1. الفرضيات التي يقوم عليه التنبؤ

هناك مجموعة من الفرضيات التي نلخصها في الآتي (جودت، 2015، صفحة 159):

- المستقبل لا يمكن التأكد منه تماماً.
- التنبؤ يستخدم لوضع السياسات سواء كانت اجتماعية أو اقتصادية.
- هناك نقاط غير واضحة في التنبؤ (لا نستطيع أن نتنبأ بمستجدات التكنولوجيا التي تتوفر لدينا معلومات تشير إليها الآن).

## 2. الخطوات المتخذة لبناء نموذج تنبؤي

هناك مجموعة من الخطوات وهي (بري، 2002، صفحة 11):

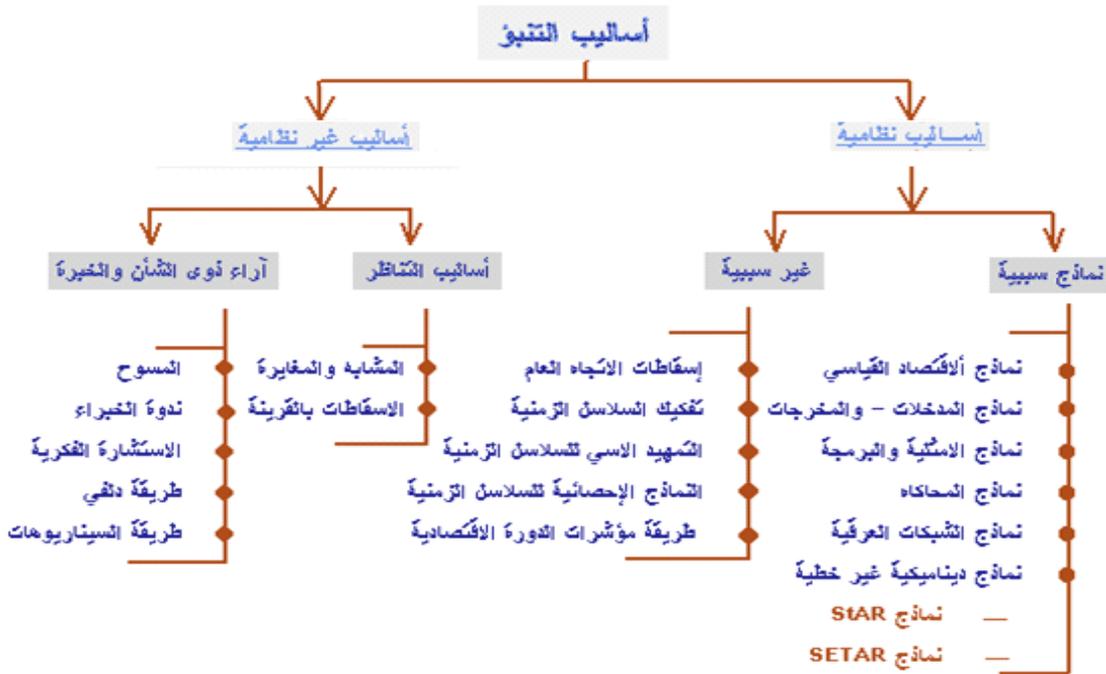
- تحديد النموذج: يتم رسم السلسلة الزمنية في شكل بياني ومن ثم اختيار نموذج رياضي معتمدين في ذلك على بعض المقاييس الإحصائية.
- تطبيق النموذج: بعد إجراء الخطوة الأولى، نقوم بتقدير معالم هذا النموذج.
- تشخيص واختيار النموذج: عن طريق إجراء اختبارات تفحصية على أخطاء التطبيق لمعرفة التطابق بين المشاهدات مع القيم المحسوبة، أي مدى صحة الفرضيات. في حالة نجاح هذا الاختبار للنموذج نقوم باعتماده على أنه النموذج النهائي ويستخدم في حساب التنبؤات المستقبلية والآن نعود للخطوة الأولى لتعيين نموذج جديد.
- حساب التنبؤات: يستخدم النموذج النهائي في توليد تنبؤات عن القيم المستقبلية ومن ثم إخطاء التنبؤ.
- استخدام التنبؤات ووضع القرارات: تقدم التنبؤات في تقرير لصانعي القرار للنظر في استخدامها في الشكل المناسب.

## 3. أساليب التنبؤ

سوف يتم الاستعانة بالمخطط التوضيحي أدناه والذي من خلاله نجد بأن السلاسل الزمنية تعتبر من

النماذج غير السببية عكس نماذج الاقتصاد القياسي والتي تعد من النماذج السببية:

الشكل 1: أساليب التنبؤ



المصدر: (حامد، 2003، صفحة 3)

سنعمل من خلال الشكل 1 عرض لهذه العناصر المكونة لأساليب التنبؤ (حامد، 2003، الصفحات 4-5):

### 1) الأساليب النظامية في التنبؤ

تعتمد على قاعدة صريحة بشأن جميع المتغيرات التفسيرية في شكل نموذج رياضي قابل للتقدير، وتنقسم إلى:

#### - النماذج السببية

يعتمد متغير موضوع البحث على متغيرات تفسيرية تفسر سلوكه، وبالاعتماد على نظرية معينة في شكل نموذج رياضي قابل للتقدير والتي تأخذ:

#### • نماذج الاقتصاد القياسي

تعتمد هذه النماذج في قياس وتفسير العلاقة بين المتغيرات استناداً إلى النظرية الاقتصادية بشأن المتغيرات التي تدخل في تفسير سلوك المتغير التابع. مثلاً تفسير دالة الاستهلاك بواسطة الدخل.

- نماذج المدخلات-المخرجات

يتم تصوير العلاقة التبادلية بين مختلف القطاعات الاقتصادية خلال العملية الإنتاجية في جداول مدخلات ومخرجات في فترة زمنية معينة من خلال كل قطاع من انتاجيته من مستلزمات الإنتاج لكل القطاعات الأخرى، وتستخدم نماذج المدخلات والمخرجات في عملية التخطيط والتنبؤ.

- نماذج الأمثلية والبرمجة الخطية

استخدام الموارد المتاحة في وصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر من خلال تعظيم أو تدنية دالة الهدف والتي تحتوي على متغيرات هيكلية يتم تحديد مستوياتها بشكل يحقق أكبر/أدنى قيمة لدالة الهدف.

- نماذج المحاكاة

هي نماذج رياضية تعكس جميع خصائص النظام الحقيقي للتعرف على الآثار المحتملة لقرارات وسياسات اقتصادية معينة تؤثر على المسار المستقبلي لبعض المتغيرات والتي تستخدم في المفاضلة بين عدد من السياسات الاقتصادية لتحقيق الهدف المبتغى.

- نماذج ديناميكية غير خطية

تعتبر بأنها قادرة على توصيف سلوك عدد كبير من السلاسل الزمنية التي لا تقدر النماذج التقليدية على توصيفها. من بين هذه النماذج، نماذج الفوضى ونماذج الكارثة وعدد من النماذج الأخرى. تستمد نظرية الفوضى والكارثة جذورها من الرياضيات والفيزياء ولا تزال تطبيقاتها في الاقتصاد قليلة ومشتتة. من أهم إسهامات نظرية الفوضى أنها أوضحت بأن المسارات الزمنية معقدة غالبا ما يمكن تمثيلها بنماذج ديناميكية حتمية مبسطة، بالإضافة الى ذلك فهناك نوع معين من السلوك يمكن الاعتقاد بأنه عشوائي وفوق قدرة النمذجة لكنه يمكن أن يمثل بنماذج الفوضى. كما انه توجد نماذج غير خطية أخرى مثل:

- نماذج SETAR

يمثل هذا النظام في صيغة انحدار ذاتي  $AR$  يتحول بين نظامين حسب قيمة المتغير موضوع البحث.

- نماذج STAR

تشبه نماذج SETAR ماعدا صيغة التحريك حيث تأخذ الدالة اللوجستية.

## - النماذج غير السببية

تعتمد على القيم التاريخية للمتغير المراد التنبؤ بقيمته المستقبلية ولا تحتاج إلى تحديد المتغيرات التي تفسر سلوكه.

## • اسقاطات الاتجاه العام

تعتبر اسقاطات الاتجاه العام من أكثر الطرق شيوعاً في التنبؤات طويلة المدى للمتغيرات الاقتصادية، ويعرف الاتجاه العام للسلسلة الزمنية على أنه النمط العام للتغير في قيم المتغير موضوع البحث مع تجاهل المتغيرات الأخرى سواء الموسمية، الدورية، أو العشوائية. كما أن تذبذبات السلسلة الزمنية ناتجة عن مكوناتها التالية:

- الاتجاه العام: الحركة العامة على المدى البعيد.

- التقلبات الموسمية: تقلبات منتظمة تكرر نفسها حسب فترة زمنية معينة.

- التقلبات الدورية: تكون حسب الدورة الاقتصادية.

- التقلبات العشوائية: تكون لأسباب عوامل الطبيعة وغيرها.

## • النماذج الإحصائية للسلاسل الزمنية

تركز هذه النماذج على الجانب العشوائي في السلسلة الزمنية، وتنقسم إلى:

- نماذج الانحدار الذاتي AR: حيث تكتب القيمة الجارية كدالة خطية في القيم السابقة لنفس المتغير.

- نماذج المتوسطات المتحركة MA: حيث تكتب القيمة الجارية للمتغير كدالة خطية في القيمة الحالية لعنصر الخطأ العشوائي وعدد من قيمه السابقة.

- نماذج Box-Jenkins: يمكن التوفيق بين النموذجين  $AR$ ,  $MA$  بنموذج  $ARMA$ ، حيث تمر هذه الطريقة بعدة مراحل قبل أي إجراء لعملية التنبؤ.

- نماذج متجه اشعة الانحدار الذاتي VAR: تستخدم في النماذج الأنية التي يوجد فيها علاقات تبادلية بين المتغيرات.

## (2) الأساليب غير النظامية

تعتمد على التقدير الذاتي -الخبرة والتقدير الشخصي- ولا تحتاج الى قاعدة او تحديد المتغيرات التي تفسر سلوك المتغير موضوع الاهتمام.

## - أساليب التناظر والمقارنة

يتم التنبؤ بمسار متغير باستخدام المسار المحتمل لنفس المتغيرات في حالات تشابه، مثلا التعرف على أثر تخفيض قيمة العملة على التضخم، وذلك من خلال التعرف على أثر تخفيض العملة لقطر مشابه جدا لاقتصاد البلد.

## - الأساليب المعتمدة على اراء ذوي الشأن والخبرة

وتنقسم الى:

## • المسوحات والاستقصاء

تهدف الى التعرف على رأي ذوي الشأن والخبرة وتوقعاتهم في بعض الأنشطة الاقتصادية لغرض التنبؤ ببعض المؤشرات الاقتصادية. مثلا التنبؤات باتجاهات السوق ومعدلات التضخم. تتم من خلال استطلاع عينة من المعنيين بذلك باستخدام استبيان خصص لذلك يوزع ويجمع اما عن طريق المراسلة او بتكليف فريق عمل يقوم بجمع المعلومات الخاصة بالاستطلاع.

## • ندو الخبراء

تتمثل في اجراء حوار بين عدد من الخبراء والمفكرين لتبادل الأفكار في المواضيع الاقتصادية التي تهم المجتمع بالدرجة الأولى وتقدم حلول لجميع المشكلات القائمة، وقد تؤدي هذه الطريقة الى تصور محدد بشأن المستقبل.

## • طريقة دلفي

تم تصميم طريقة دلفي في عام 1950 من قبل Olaf Helmer في مؤسسة Rand، وتعمل إلى تسليط الضوء على تقاربات الرأي والتوصل إلى بعض الإجماع حول مواضيع محددة، من خلال مشاوره الخبراء من خلال مجموعة من الاستبيانات. يجب أن يأخذ اختيار هؤلاء الخبراء في الاعتبار معرفتهم بالموضوع محل النظر، وشرعيتهم فيما يتعلق بلجنة الخبراء التي يمكنهم تمثيلها، وتوافرهم أثناء عملية

مسح دلفي واستقلالهم عن أي ضغوط تجارية أو سياسية أو غيرها. تهدف طريقة دلفي الى المعروفة بشكل متزايد للمتخصصين في تطوير الاستراتيجيات المتوسطة وطويلة المدى إلى جمع الرأي المبرر من خلال استبيان مفتوح من قبل لجنة من الخبراء في مختلف المجالات. تتم بناءً على الملاحظات وهذا يتجنب مواجهة الخبراء والحفاظ على هويتهم، اين يتم إرسال نتائج الاستبيان الأول إلى كل خبير وتكون مصحوبة بملخص للاتجاهات والآراء والمبررات العامة والمحددة. لذا، فإن الجميع مدعو للرد والإجابة على استبيان ثانٍ تم إعداده على أساس الآراء الأولى الواردة، وهكذا حتى تصبح الإجابات قوية قدر الإمكان (Ekionea, Bernard, & Plaisent, 2011, pp. 168-172).

#### • طريقة السيناريوهات

وصف كتابي للأحداث والأوضاع المتوقعة في المستقبل اعتمادا على خبرات الشركة والفرضيات الأكثر ترجيحاً لما سيحدث في المستقبل، تستخدم هذه الطريقة للتنبؤات متوسطة وطويلة الأجل (دلهوم، 2008-2009، صفحة 26). أي ان السيناريو يتكون من عنصرين هما الاحداث والتصرفات.

#### II. السلاسل الزمنية

ان دراسة طرق التنبؤ تتطلب منا دراسة تحليلية للسلاسل الزمنية ومركباتها وأشكالها، ولاختيار أحد هذه الطرق فانه توجد عدة معايير تؤخذ بعين الاعتبار بعد تحديد الأهداف المتوخاة من عملية التنبؤ.

#### 1. تعريف السلسلة الزمنية

هي مجموعة من المشاهدات او القياسات التي تأخذ احدى الظواهر (الاقتصادية – الاجتماعية – الطبية – الطبيعية - ..... ) على فترات زمنية متتابعة عادة ما تكون متساوية الطول (شعراوي، 2005، صفحة 5). بمعنى انها مجموعة من المشاهدات مرتبة وفق حدوثها في الزمن (السنة، الفصل، الشهر: أي وحدة الزمنية) وبالتالي هي سجل تاريخي يتم اعتماده لبناء توقعات مستقبلية. وأيضا هي قياسات المحصل عليها لهذه الظاهرة بصورة منتظمة عبر فترات زمنية. وتختلف السلسلة الزمنية عن البيانات التجريبية وبيانات الحصر في ثلاث نقاط أساسية وهي (شعراوي، 2005، الصفحات 6-7):

1- تأخذ بيانات السلسلة الزمنية على فترة زمنية طويلة نسبيا يعتقد انها تؤثر على الظاهرة او المتغير موضع الدراسة، بينما تأخذ البيانات التجريبية او بيانات الحصر (المسح) عند نقطة زمنية معينة او

على الاكثر في فترة زمنية قصيرة يعتقد انها لا تؤثر بشكل معنوي على الظاهرة او المتغير موضع الدراسة وعادة ما تسمى هذه البيانات بالبيانات المقطعية Cross Sectional Data.

2- يتم دراسة السلسلة الزمنية عادة بمعزل عن العوامل الاخرى -بخلاف الزمن- التي قد تؤثر عليها وعن الظواهر الأخرى التي قد ترتبط معها في علاقة إحصائية.

3- عادة ما تكون مشاهدات السلسلة الزمنية مرتبطة ببعضها البعض، ويأخذ الارتباط بين هذه المشاهدات اشكالا وانماطا عديدة تختلف باختلاف طبيعة الظاهرة، ومن ثم فان ترتيب المشاهدات في السلاسل الزمنية ذو أهمية خاصة ولذلك فان معظم الأساليب التي تستخدم في تحليل البيانات التجريبية او بيانات الحصر لا تكون صالحة لتحليل السلاسل الزمنية وبالتالي لا بد من ابتكار وتطوير أدوات وأساليب خاصة لتحليل السلاسل الزمنية.

## 2. مركبات السلسلة الزمنية وطرق الكشف عنها

سوف نقوم في المرحلة الأولى بتحديد المكونات الخاصة بالسلاسل الزمنية أي المركبات الجوهرية التي تحدد طبيعة السلسلة الزمنية، اما في المرحلة الموالية نعمل على حصر الطرق التي تمكن من اكتشاف هذه المركبات.

### 1) المركبات الجوهرية للسلسلة الزمنية (المكونات)

يقصد بها العناصر المكونة للسلسلة الزمنية وهي تفيد في تحديد سلوكها في الماضي والمستقبل، كما ان هذه السلاسل الزمنية تتعرض الى نوعين من التغيرات وهي:

#### - التغيرات المنتظمة

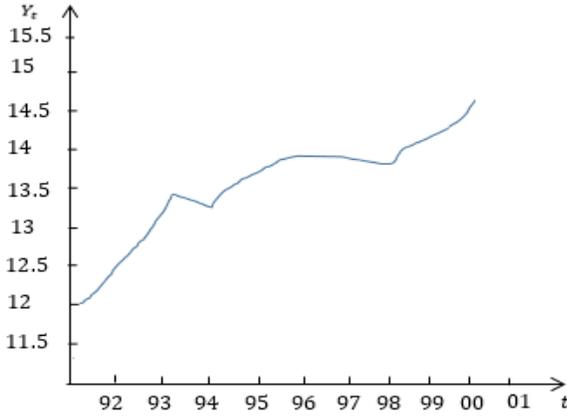
هي التغيرات التي يتركز ظهورها في مواضع ذات صفة محددة وتشمل الاتجاه العام والتغيرات الموسمية والدورية.

#### • مركبة الاتجاه العام The Trend

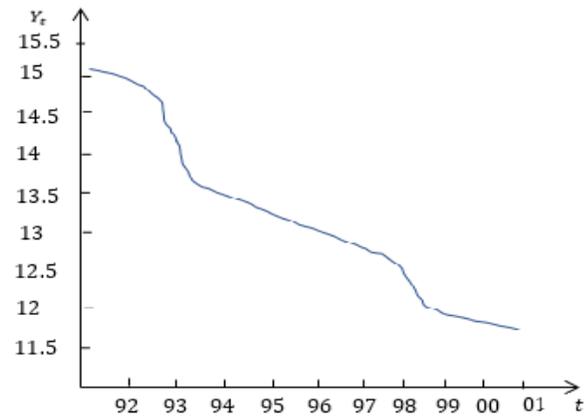
يقصد به تطور السلسلة في الأجل الطويل، وقد يكون الاتجاه العام متزايد إذا كانت قيمة الظاهرة تتزايد عبر الزمن، او قد يكون العكس، أي متناقصا إذا ما اتجهت قيمة الظاهرة إلى النقصان، وكذلك قد يأخذ الاتجاه العام شكل الخط المستقيم كما قد يأخذ شكل المنحنى، ويعكس الاتجاه

العام تأثير العوامل طويلة الأجل على السلسلة الزمنية (حسن و محمد احمد، د. ت، صفحة 363).  
ويرمز له بالرمز T.

الشكل 3: سلسلة زمنية ذات اتجاه عام متزايد



الشكل 2: سلسلة زمنية ذات اتجاه عام متناقص



#### • المركبة الفصلية (الموسمية Seasonality)

تمثل التغيرات المنتظمة القصيرة الاجل والتي تحدث خلال الفترة الزمنية الواحدة التي لا يزيد عادة طولها عن السنة، فقد تكون أسبوعية، شهرية، فصلية ويرمز له بالرمز S. مثلا: زيادة الطلب على المشروبات الغازية في فصل الصيف وينخفض عليها في فصل الشتاء.

الشكل 4: المركبة الموسمية

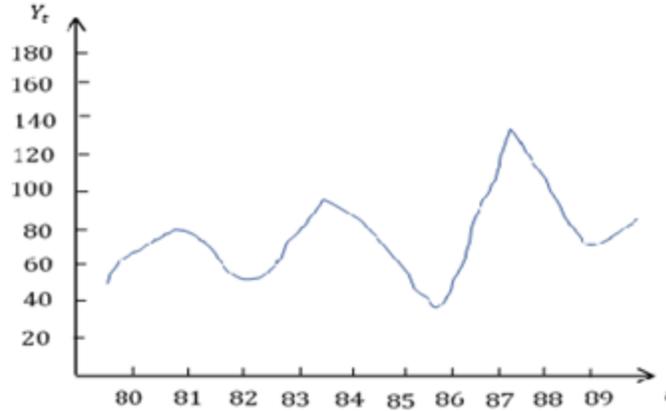


#### • المركبة الدورية (مركبة الدورة الاقتصادية Business Cycles)

تنعكس هذه المركبة في السلاسل الزمنية طويلة الاجل وتتكون من الدوال الجيبية، تبرز أثر انتقال الأحوال الاقتصادية مثلا من الكساد الى الانتعاش فالرواج فالركود.....، كذلك هي تغيرات تشبه التغيرات الموسمية إلا أنها تتم في فترات أطول نسبيا من الفترات الموسمية، وعادة يتراوح طول الفترة بين ثلاث سنوات إلى عشر سنوات، وبالتالي يصعب التعرف على التقلبات الدورية ومقاديرها لأنها

تختلف اختلافا كبيرا من دورة لأخرى سواء من حيث طول الفترة الزمنية للدورة أو اتساع تقلباتها ومداها (البلداوي و الحميدي، 2008، صفحة 227). ويرمز لها بالرمز C. هذه الظاهرة تختلف عن المركبة الفصلية من حيث انها تحدث في مجال أكبر من السنة.

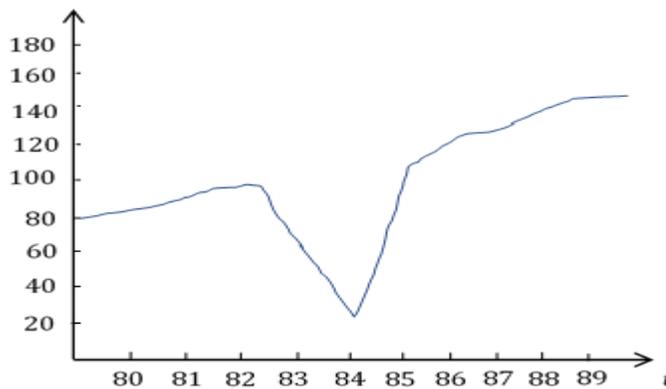
الشكل 5: المركبة الدورية



#### - التغيرات غير المنتظمة (العرضية)

تشمل المركبات العشوائية وتتمثل في التغيرات الفجائية التي تحدث فجأة أي لا يمكن التنبؤ بها أو تحديد نطاق التأثير، وهي التغيرات التي تحدث عادة نتيجة لعوامل المصادفة، فهي طارئة غير قابلة للتحديد، ومن الأمثلة عن ذلك ما يحدث للنشاط الاقتصادي في بلد ما بسبب الزلازل او الحروب ..... (لزر، 2000، صفحة 141) ويرمز لها بالرمز ε.

الشكل 6: التغيرات غير المنتظمة (العشوائية)



## 2) طرق الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية

هناك طريقتين مختلفتين للكشف عن مركبات السلسلة الزمنية، تتمثل الطريقة الأولى في الطريقة البيانية، أما الطريقة الثانية فتتمثل في استعمال الطريقة التحليلية من خلال الاختبارات الرياضية.

## - عن طريق تحليل المعلومات بيانياً

ان استعمال هذه الطريقة تتطلب دقة كبيرة في عرض بيانات السلسلة الزمنية ونهتم في هذه المرحلة بدراسة وتحليل الظروف التي تولدت عنها هذه السلسلة الزمنية. التمثيل البياني لمشاهدات السلسلة الزمنية يعكس مركباتها الأساسية بشكل أوضح ولهذا فانه إذا كان ميل اتجاه السلسلة الزمنية موجبا فانه يدفع الاتجاه نحو الأعلى وإذا كان سالبا فانه يدفع به نحو الأسفل. بينما المركبة الفصلية او الدورية، فمن خلال العرض البياني لهما تكون على شكل قمم او نتوءات بشكل منتظم، شريطة الفترة الزمنية كان تكون شهر، فصل..... او سنوات بالنسبة للمركبة الدورية، والاشكال السابقة توضح ذلك.

## - عن طريق الاختبارات الإحصائية

قد يتعذر علينا الكشف البياني للكشف عن مركبات السلسلة الزمنية، فنضطر الى استعمال الأدوات الإحصائية.

## • الكشف عن مركبة الاتجاه العام

يمكن تقسيم هذه الأدوات الى مجموعتين متباينتين للكشف. أولا الكشف عن الاتجاه العام ثم الفصلية في وقت لاحق.

## 1. الاختبارات الحرة

سميت بالاختبارات الحرة لان المتغير العشوائي لا يخضع لأي توزيع احتمالي علما انه من فرضيات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS ان المتغير العشوائي يخضع الى التوزيع الطبيعي (جلاطو، 2007، صفحة 147). هذه الاختبارات هي سهلة في حساباتها الا انه يعاب على ضعفها في الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية، وفي هذه المجموعة سنحاول ترتيب هذه المقاييس حسب الأفضلية الممكنة.

## 1.1. اختبار التوالي (تعاقب الإشارات) Run Test

يستعمل لمعرفة عشوائية السلسلة الزمنية وكذلك في التحقق من إمكانية وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية، وفرضيته هي (مولود، 2010، الصفحات 32-33):

السلسلة عشوائية:  $H_0$

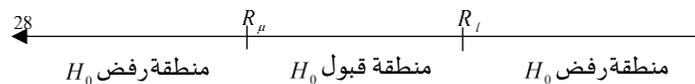
السلسلة ذات مركبة الاتجاه العام (تحتوي على مركبة الاتجاه العام إضافة الى العشوائية):  $H_1$

يتم هذا الاختبار حسب الخطوات التالية:

- ترتيب مشاهدات السلسلة الزمنية حسب الأهمية، أي من الأصغر الى الأكبر في ترتيب تصاعدي.
- حساب الوسيط، وهي المشاهدة المقابلة للرتبة  $m$  والتي تحدد بالصيغة التالية:
- حالة المشاهدات:  $T$  فردي:  $m = \frac{T+1}{2}$ ، نعبر عنها بالصيغة:  $M_d = Y_m$
- حالة المشاهدات:  $T$  زوجي:  $m = \frac{T}{2}$ ، نعبر عنها بالصيغة:  $M_d = \frac{(Y_m + Y_{m+1})}{2}$
- حيث  $Y$ : شعاع المشاهدات مرتبة تصاعديا او تنازليا و  $m$  هي دليلها.
- إعطاء إشارة سالبة للقيم الأصغر من  $M_d$  وموجبة للقيم الأكبر.
- حساب  $R$  الممثل لعدد مرات تغير الإشارة من موجب الى سالب او العكس.
- رفض  $H_0$  حسب نوع العينة:

- العينة صغيرة ( $m \leq 20$ ): إذا كان:  $R \geq R_\mu$  أو  $R \leq R_l$ ، حيث:  $R_l, R_\mu$ : القيم الحرجة المجدولة العليا والدنيا على الترتيب.

الشكل 7: اختبار التوالي



- العينة كبيرة ( $m > 20$ ): إذا كان:  $|Z| > Z_{\alpha/2}$ ، حيث:

$$|Z| = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$$

$$\mu_R = m + 1, \quad \sigma_R = \sqrt{\frac{m(m+1)}{2m-1}}$$

يتم الحصول على قيمة:  $Z_{\alpha/2}$  من جدول مساحات التوزيع الطبيعي المعياري.

## 2.1. اختبار نقطة الانعطاف

يهم هذا الاختبار بعدد مرات تغير الإشارة من موجب الى سالب او العكس من خلال حساب الفروقات من الدرجة الأولى:  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ . إذا كانت السلسلة الزمنية عشوائية دون اتجاه عام، فان توزيع عدد مرات تغير الإشارة يكون تقريباً طبيعياً حتى بالنسبة الى العينات الصغيرة مما يمكن الاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي لاستخراج القيم الطبيعية. هذا الاختبار يتم حسب الخطوات التالية (مولود، 2010، الصفحات 37-38):

- حساب الفروقات من الدرجة الأولى وإعطاء الإشارة (+) للفروقات الموجبة والإشارة (-) للفروقات السالبة.

- حساب  $U$  وهو عدد مرات تغير الإشارة في  $\Delta Y_t$ ، ويستعمل لما يكون:  $T \geq 10$

- رفض  $H_0$  (أي لا يوجد اتجاه عام) إذا كان:  $|Z| > Z_{\alpha/2}$ ، حيث:

$$|Z| = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}, \quad \begin{cases} \mu_U = \frac{2(T-2)}{3} \\ \sigma_U = \sqrt{\frac{16T-29}{90}} \end{cases}$$

## 3.1. اختبار الإشارة Sign Test

يعتمد هذا الاختبار على إشارة الفروقات من الدرجة الأولى من موجبة وسالبة، كما يفترض هذا الاختبار

التوزيع العشوائي للمعطيات، وتكون خطواته كالآتي (مولود، 2010، الصفحات 39-40):

- حساب عدد الفروقات الموجبة  $V$ .

- حساب عدد الفروقات غير الصفريّة  $n$ .

- يستعمل لما يكون:  $n \geq 20$  بنسبة معنوية  $\alpha$ .

- رفض  $H_0$  (أي لا يوجد اتجاه عام) إذا كان:  $|Z| > Z_{\alpha/2}$ ، حيث:

$$|Z| = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V}, \quad \begin{cases} \mu_V = \frac{n}{2} \\ \sigma_V = \sqrt{\frac{n}{4}} \end{cases}$$

## 4.1. اختبار Daniel

هذا الاختبار أقوى بكثير من الاختبارات السابقة، وهو يستعين بمعامل Spearman. يعتمد هذا المعامل على قياس الارتباط الخطي بين ترتيبين، الرتبي (تصاعدي مثلاً)  $R_t$  والزمني  $t$  ويكتب على الشكل التالي:  $R_t = f(t)$ ، ومنه معامل الارتباط النظري يعرف بـ:  $r_s = \frac{\text{cov}(R_t, t)}{\sqrt{V(R_t)V(t)}}$ ، أين:  $V(R_t) = V(t)$  ويعادلان

يكون في حالة العينة وبسلسلة غير مكررة المشاهدات معطى بالصيغة التالية:  $\frac{T^2 - 1}{12}$ .

$$r_s = \frac{\sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})(t - \bar{t})}{\sum_{t=1}^T (t - \bar{t})^2}$$

وفي حالة تكرار الرتبة نقوم بتعويض الرتب المكررة المتساوية بوسطها الحسابي. ولتبسيط هذا المعامل يمكن ان نقدمه في الشكل النهائي (مولود، 2010، الصفحات 42-44):

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^T d_t^2}{T(T^2 - 1)}$$

فان:  $-1 \leq r_s \leq 1$ ، وخطواته تكون: مجموع مربعات الفرق بين الترتيب التصاعدي والزمني:  $d_t = R_t - t$  وكون  $r_s$  معامل ارتباط خطي

- حساب معامل الارتباط الخطي:  $r_s$
- رفض  $H_0$  (أي لا يوجد اتجاه عام) حسب نوع العينة:
  - العينة صغيرة ( $T \leq 30$ ): إذا كان:  $|r_s| > r_{\alpha/2}$
  - العينة كبيرة ( $T > 30$ ): إذا كان:  $|Z| > Z_{\alpha/2}$ ، حيث:

$$Z = \frac{r_s - \mu_{r_s}}{\sigma_{r_s}}, \quad \mu_{r_s} = 0, \quad \sigma_{r_s} = \frac{1}{\sqrt{T-1}}$$

$$Z = \frac{r_s}{\sigma_{r_s}} = r_s \sqrt{T-1} \quad \text{بالتعويض نجد:}$$

## 2. الاختبارات غير الحرة

تتمثل هذه الطريقة في افتراض وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية إضافة إلى العشوائية مع افتراض معرفة التوزيع الاحتمالي للأخطاء العشوائية أي:

$$Y_t = f(t, \varepsilon_t)$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

وبعد تحديد شكل الدالة، يتم تقدير معالمها (سوف نتعرض لها لاحقاً)، ثم اختبار معنوية الاتجاه العام باستعمال مقاييس (الانحراف، Student، Fisher،.....) (مولود، 2010، الصفحات 45-46).

## • الكشف عن المركبة الفصلية

بنفس الطريقة التي تعرضنا إليها في كشف مركبة الاتجاه العام بيانياً، يمكننا ان نكشف عن الفصلية بذات الطريقة، مثلاً موضوع الطلب على غاز التدفئة، حيث يزداد الطلب عليه في فصل الشتاء ويقل عليه في فصل الصيف (كذلك بالنسبة إلى المركبة الدورية). هناك بعض الحالات التي يصعب فيها الكشف عن الفصلية خاصة في السلاسل الزمنية شديدة التذبذب، وبالتالي نلجأ إلى استعمال بعض المقاييس الإحصائية لكشفها.

## 1. الاختبارات الحرة

من بين الطرق التحليلية الاختبارات، نجد اختبار لا معلمي هو اختبار Kruskal Wallis لأنه لا يتطلب تقدير المتوسط والتباين في ذلك. في الواقع، لا نستخدم حتى قيم المتغير التي تم جمعها من العينات، ولكن نستخدم فقط ترتيبهم في القائمة المرتبة لجميع القيم.

## 1.1 اختبار Kruskal Wallis

يستعمل خصيصاً لكشف الفصلية، ونرمز له بالرمز  $KW$  وعلاقته معطاة بالشكل التالي (جلاطو، 2007، الصفحات 150-151):

لا توجد مركبة فصلية:  $H_0$

توجد مركبة فصلية:  $H_1$

$$KW = \frac{12}{T(T+1)} \sum_{j=1}^p \frac{R_j^2}{m_j} - 3(T+1) \sim \chi_{p-1}^2$$

-  $R_j$ : تمثل مجموع رتب الفصل  $j$ .

- $p$ : تمثل الدورة وهي تساوي 4 في المشاهدات الفصلية و12 في الشهرية.....
  - $m_j$ : تمثل عدد المشاهدات المقابلة للفصل  $z$ ، وتكون في اغلب الأحيان عدد السنوات. فاذا كانت:
  - $m_j > 5$  مع عدم وجود مركبة فصلية فان:  $KW \sim \chi^2_{p-1}$ .
  - رفض  $H_0$  (أي لا توجد مركبة فصلية) إذا كان:  $KW > \chi^2_{p-1}$ .
- حتى لا يكون هذا الاختبار مغالطا، يجب ازالة مركبة الاتجاه العام من السلسلة الزمنية حسب الطريقة المناسبة سواءً بالطريقة الانحدارية او طريقة الفروقات [انظر في الفصل الاول. III. 2. 2.].\* 4. 4. 1 قبل محاولة الكشف عن المركبة الفصلية.

حالة خاصة: لاستخدام المقياس السابق  $KW$  يجب توفر عدد من المشاهدات لا بأس به الذي على الأقل يعادل  $(m_j \times p)$ ، ويجب مسبقا معرفة نوع العلاقة التي تربط بين مركبات السلسلة الزمنية (مولود، 1998، الصفحات 36-37):

$$Y = T \times C \times S \times \varepsilon: \text{الحالة الجدائية:}$$

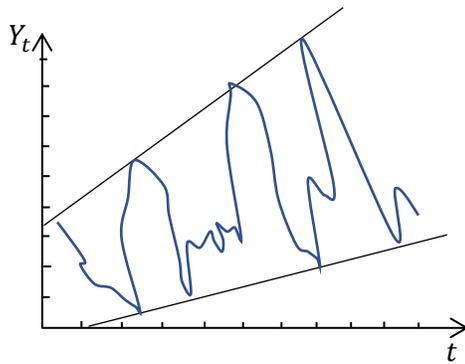
$$Y = T + C + S + \varepsilon: \text{الحالة التجميعية:}$$

هذا الاختبار  $KW$  يكون مغالطا في حالة وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية، ولذا يجب ازالتها قبل الاختبار وهذه العملية تشترط المعرفة المسبقة ويمكن اعتماد اسلوبين:

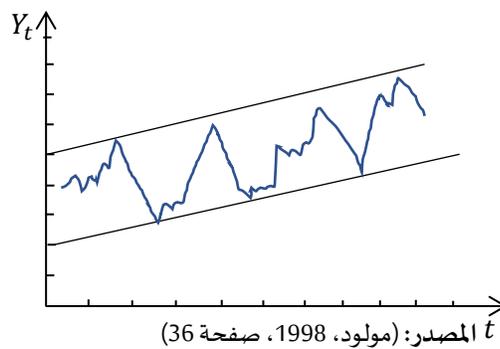
#### • الأسلوب البياني

تكون السلسلة الزمنية من نوع الحالة التجميعية إذا كانت ذبذباتها محصورة بين خطين متوازيين، بينما الحالة الجدائية تكون العكس.

الشكل 9 الحالة الجدائية



الشكل 8: الحالة التجميعية



#### • الأسلوب الانحداري

هنا يتم الاعتماد على تقدير المعادلة التالية:

$$\sigma_i = a\bar{Y}_i + b, \quad i = \overline{1, m} \quad \text{عدد السنوات: } m$$

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Y_{ij}, \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}, \quad j = \overline{1, p} \quad \text{عدد الفصول: } p$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i \bar{Y}_i - m \bar{\sigma} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^m \bar{Y}_i^2 - m \bar{Y}^2}$$

يتم اخذ القرار حسب نوع الحالات التالية:

- تكون السلسلة الزمنية مختلطة إذا كان:  $0.05 \leq \hat{a} \leq 0.10$

- تكون السلسلة الزمنية تجميعية إذا كان:  $\hat{a} < 0.05$

- تكون السلسلة الزمنية جدائية إذا كان:  $\hat{a} > 0.10$

#### • طريقة الوسط السنوي

يتم تحديد شكل السلسلة الزمنية حسب مايلي (جلاطو، 2007، صفحة 154):

- حساب الوسط الحسابي لكل سنة.

- حساب الفرق بين القيم الأصلية الخاصة بكل سنة والوسط السنوي المقابل لها.

اذ كانت الفروقات تشكل متتالية حسابية او قيم متقاربة، فان نموذج السلسلة الزمنية هو شكل تجميعي،

اما إذا كانت تشكل متتالية هندسية، فان الشكل هو جدائي.

#### • طريقة الانحراف المعياري السنوي

يتم تحديد الانحراف المعياري لكل سنة ونستنتج نوع الشكل حسب الآتي (جلاطو، 2007، صفحة 154):

- إذا تساوت او تقاربت قيم الانحرافات المعيارية السنوية، فإننا امام نموذج تجميعي.

- إذا تباعدت قيم الانحرافات المعيارية السنوية، فإننا امام نموذج جدائي (مضاعف).

## 2. الاختبارات غير الحرة

في هذا النوع نجد:

## 1.2. الطرق الانحدارية

يتم افتراض وجود المركبة الفصلية في السلسلة الزمنية بـ  $p$  من المؤشرات، ويتم التعبير عنها بنفس عدد المتغيرات التمثيلية التي يتم تقدير معالمها بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS ثم اختبارها احصائيا.

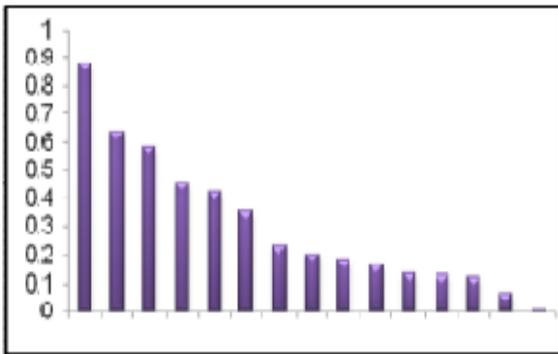
## 2.2. دالة الارتباط الذاتي

تعتمد على فكرة الارتباط بين المشاهدات لفترات مختلفة، وتظهر الفصلية في شكل قمم وبتوءات في فترات زمنية تعادل  $p$ ، أي انه تظهر قمة في دورة تعادل  $p$  ونفس الشيء بالنسبة للانخفاضات. يتم حساب

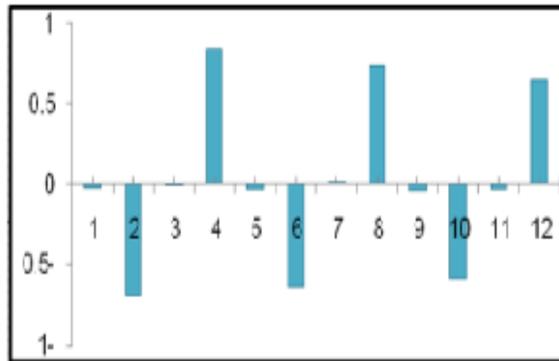
معاملات دالة الارتباط الذاتي للمتغير وفق العلاقة التالية (مولود، 2010، صفحة 55)، أين  $k = \overline{1, K}$ :

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

الشكل 11: دالة ارتباط ذاتي بدون مركبة فصلية



الشكل 10: دالة ارتباط ذاتي بوجود مركبة فصلية



المصدر: (مولود، 2010، صفحة 56)

الشكل 10 يمثل دالة الارتباط الذاتي لمتغير ما، حيث تظهر القمة كل بعد أربع فترات زمنية ونفس الشيء

بالنسبة للانخفاضات، بينما الشكل 11 هو لدالة ارتباط ذاتي بدون مركبة فصلية.

<sup>1</sup> في هذا الشأن، يفضل الإحصائيون وبشكل متفق عليه تحديد الفجوة الزمنية  $K$  على أساس أنها تمثل ربع حجم العينة، أي:  $K = \frac{T}{4}$

## III. التنبؤ بنماذج الاستقطاب

في جانب التنبؤ بنماذج الاستقطاب، فإنه يوجد نوعين من النماذج. النماذج الأولى تكمن في تحديد نماذج الاتجاه العام المختلفة مع طرق تقييمها ثم التنبؤ بها، أما النوع الثاني فهي نماذج مكيفة.

## 1. التنبؤ بنماذج الاتجاه العام وطرق تقييمها

تهتم هذه المجموعة من النماذج بالمركبة النظامية في السلسلة الزمنية والمتمثلة في شكل اتجاه عام قد يكون ممثلاً في دالة خطية أو أسية أو لوغاريتمية.

## 1 نموذج الاتجاه العام الخطي Linear Trend Model

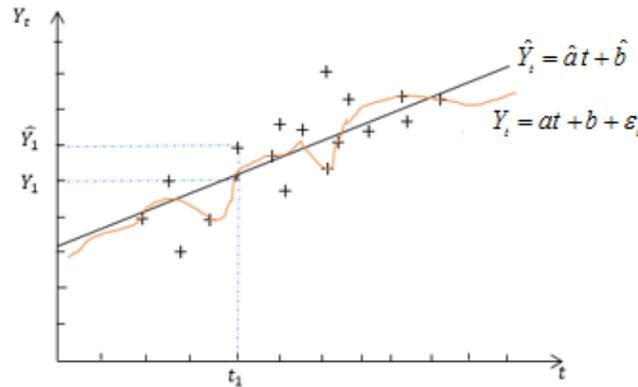
يمكن التعبير عن السلسلة الزمنية التي تنمو بمقدار مطلق ثابت عبر الزمن بالعلاقة:  $Y_t = f(t, \varepsilon_t)$ ، أي:

$$Y_t = at + b + \varepsilon_t \quad [1]$$

من خلال الشكل 12، وعند الزمن  $t_1$ ، نجد أنه يقابله قيمتين: القيمة الأصلية (الفعلية):  $Y_1$  والقيمة

النظرية:  $\hat{Y}_1$ .

الشكل 12: تقدير نموذج الاتجاه العام الخطي



مقدار الاختلاف يعبر عن الخطأ المرتكب  $\varepsilon_t$  أي:  $Y_t - \hat{Y}_t = \varepsilon_t$ ، وكون العلاقة [1] خطية يمكن تقديرها عن طريق المربعات الصغرى الاعتيادية OLS.

## - طريقة المعادلات الطبيعية

يطرح التساؤل ما هو أحسن مقياس (منحنى) الذي يمثل الاتجاه العام؟ المنحنى الأمثل هو الذي يكون فيه الفرق بين  $Y_t$  و  $\hat{Y}_t$  أقل ما يمكن ويشمل عدد أكبر ممكن من المشاهدات الفعلية  $Y_t$ . إذن يجب أن تكون الانحرافات  $D_t$  (الفرق بين  $Y_t$  و  $\hat{Y}_t$ ) أقل ما يمكن:

$$D_1 \rightarrow \text{Min}, D_2 \rightarrow \text{Min}, \dots, D_T \rightarrow \text{Min}$$

وبالتالي المجموع  $S$  يؤول الى التدنية  $\text{Min}$ ، أي:

$$S = \{D_1 + D_2 + \dots + D_T\}$$

$$S = \sum_{t=1}^T D_t$$

يمكن ان تكون القيم:  $D_t \leq 0$  وبالتالي تؤدي الى نتائج خاطئة، أي ان القيم السالبة تلغي القيم

الموجبة والمجموع يؤول الى الصفر، فلأجل هذا نقوم بتربيع الانحرافات:  $S = \sum_{t=1}^T D_t^2$  أي:

$$\text{Min } S = \sum_{t=1}^T D_t^2 = \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^T (Y_t - at + b)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{t=1}^T t (Y_t - \hat{a}t - \hat{b}) = 0$$

$$\sum_{t=1}^T t Y_t = \hat{a} \sum_{t=1}^T t^2 + \hat{b} \sum_{t=1}^T t$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{a}t - \hat{b}) = 0$$

$$\sum_{t=1}^T Y_t = \hat{a} \sum_{t=1}^T t + \sum_{t=1}^T \hat{b}$$

$$\bar{Y} = \hat{a} \bar{t} + \hat{b}$$

$$\hat{b} = \bar{Y} - \hat{a} \bar{t}$$

$$\sum_{t=1}^T t Y_t = \hat{a} \sum_{t=1}^T t^2 + (\bar{Y} - \hat{a} \bar{t}) \sum_{t=1}^T t$$

$$\sum_{t=1}^T t Y_t = \hat{a} \sum_{t=1}^T t^2 + \bar{Y} \sum_{t=1}^T t - \hat{a} \bar{t} \sum_{t=1}^T t$$

$$\sum_{t=1}^T t Y_t = \hat{a} \sum_{t=1}^T t^2 + T \bar{t} \bar{Y} - \hat{a} T \bar{t}^2$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^T t Y_t - T \bar{t} \bar{Y}}{\sum_{t=1}^T t^2 - T \bar{t}^2} = \frac{\text{cov}(t, y)}{V(t)} = \frac{\sum_{t=1}^T (t - \bar{t})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (t - \bar{t})^2}$$

- عن طريقة المصفوفات: ليكن النموذج:  $Y_t = b + at + \varepsilon_t$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = b + a1 + \varepsilon_1 \\ Y_2 = b + a2 + \varepsilon_2 \\ Y_3 = b + a3 + \varepsilon_3 \\ \vdots \\ Y_T = b + aT + \varepsilon_T \end{cases}$$

$$Y = X \times A + \varepsilon$$

لحل هذا النموذج من اجل مقدرات  $\hat{a}$  و  $\hat{b}$  يكون:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y$$

بحيث  $(X'X)$  غير شاذة  $\det \neq 0$  وقابلة للقلب، اين:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & 1 & 1 \dots T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \dots T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & 1 & 1 \dots T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \dots T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum t Y_t \end{bmatrix}$$

## (2) النموذج الاسي The Exponential Model

هناك حالات أخرى يأخذ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية شكل الدالة الاسية، خاصة بالنسبة للمتغيرات القابلة للنمو بوتائر ثابتة على امتداد فترات زمنية معينة، وتكون الصيغة العامة للدالة الاسية على النحو التالي (راتول، 2006، الصفحات 223-224):

$$Y_t = ab^t \varepsilon_t$$

حيث:  $a, b$  ثوابت،  $\varepsilon_t$  الخطأ العشوائي ويتم تقديرها عن طريق المعادلة التالية:

$$Y_t = ab^t$$

باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS يتم تقدير معالم هذه المعادلة بعد تحويلها الى

الصيغة الخطية باستخدام اللوغاريتم، أي:

$$\ln(Y_t) = \ln(a) + \ln(b)t$$

للإشارة هناك عدة اشكال، فلو اخذنا النموذج التالي:

$$Y_t = a e^{rt + \varepsilon_t}$$

فان التحويل الى الصيغة الخطية نحصل على:

$$\ln(Y_t) = \ln(A) + rt + \varepsilon_t$$

حيث:  $Ln(a), r$  معالم النموذج يجب تقديرها، وبنفس تقنية المربعات الصغرى الاعتيادية OLS:

$$Ln(Y_t) = Z_t, \quad Ln(A) = a$$

$$Z_t = a + rt + \varepsilon_t$$

$$\hat{Z}_t = \hat{a} + \hat{r}t$$

$$\hat{r} = \frac{\sum_{t=1}^T (t - \bar{t})(z_t - \bar{z})^2}{\sum_{t=1}^T (t - \bar{t})^2}$$

$$\hat{a} = \bar{z} - \hat{r}\bar{t}$$

### (3) دالة القطع المكافئ The Quadratic Trend Model

من بين الدوال القريبة للدوال الخطية، دالة القطع المكافئ التي تعتبر امتداد لنموذج الاتجاه العام الخطي المستعمل في تحليل السلاسل الزمنية ويكتب على الشكل التالي (مولود، 2010، الصفحات 75-76):

$$Y_t = B_0 + B_1t + B_2t^2 + \varepsilon_t$$

يتميز هذا الأخير عن الشكل الأول والثاني في كونه غير خطي المتغيرات، وهذا لا يطرح مشكلة في التقدير، حيث نعيد تسمية  $t^2$  بـ  $X_t$  ونعيد كتابة المعادلة:  $Y_t = B_0 + B_1t + B_2X_t + \varepsilon_t$ ، ويمكن تقدير معالمها بواسطة طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS او طريقة المصفوفات:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum t & \sum X_t \\ \sum t & \sum t^2 & \sum t X_t \\ \sum X_t & \sum t X_t & \sum X_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum t Y_t \\ \sum X_t Y_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = (XX)^{-1} XY$$

$$(K \times 1) = (K \times K) \cdot (K \times 1)$$

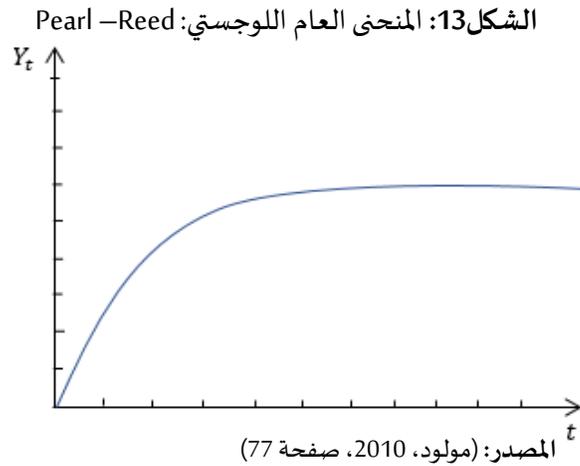
### (4) النموذج اللوجستي The Logistic Curve Model

يتمثل الانحدار بشكل عام في دراسة اعتماد متغير يعرف بالمتغير التابع على متغير واحد او أكثر يعرف بالمتغير المستقل او المتغيرات المستقلة وذلك بغرض التنبؤ، لكن تكمن المشكلة المفاهيمية في استخدام المربعات الصغرى ذات المتغيرات التابعة الثنائية تنشأ من حقيقة ان الاحتمالات يجب ان تتراوح قيمها بين قيمتين حديتين هما 1 و 0. وحسب قانون الاحتمال يجب ان لا تخرج قيمة الاحتمال عن هذا المجال، وحيث ان انحدار المربعات الصغرى هو نموذج خطي يسمح لخط الانحدار ان يمتد الى موجب (او سالب) مالا نهاية، فان استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS مع البيانات ذات المتغير الثنائي قد يفاجأ من خلاله

قيم متوقعة للمتغير التابع تتجاوز 1 او تقل عن 0، وهذا طبعا مخالف لقانون الاحتمال. لحل هذا الاشكال لابد من تحويلات الانحدار اللوجستي لحل هذه الصعوبات (البيروتي، 2009، الصفحات 70-78). يستعمل النموذج اللوجستي في تفسير الظواهر الاقتصادية التي يتوقف نموها بعد فترة زمنية معينة وصيغته هي كالاتي (مولود، 2010، الصفحات 76-77):

$$Y_t = \frac{1}{B_0 + B_1 B_2^t}$$

$B_0, B_1, B_2$ : معالم النموذج التي يجب تقديرها والتي تعطي المنحنى التالي إذا كان:  $0 < B_0 < 1$  ,  $B_1 > 0$



اين  $\frac{1}{B_0}$ : تمثل مستوى الاشباع Saturation Level. تتميز هذه الدالة عن سابقتها في انها غير خطية المعالم وغير قابلة للتحويل الى الشكل الخطي، ولهذا يجب تقديرها بطريقة غير خطية. الاستعمال الشائع للدالة اعلاه في علم البيولوجيا اقتبس من أجل قياس تطور نمو بعض السلع الاستهلاكية المعمرة التي تصل في يوم ما إلى مستوى الإشباع.

##### 5) طرق تقييم نماذج التنبؤ ذات الاتجاه العام

يتم دراسة صلاحية النموذج المقدر قبل الانتقال الى عملية التنبؤ، وذلك من خلال دراسة معامل التحديد ومعامل الارتباط وكذلك اختبارات المعنوية لـ: Fisher, Student.

## - معامل التحديد

يسمى بمقياس جودة التوفيق ويعمل على قياس القدرة التفسيرية للنموذج، ويمثل النسبة بين التغير في القيم المقدرة على التغير الكلي ويعطى بالعلاقة التالية:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{\hat{a}^2 \sum_{t=1}^T (t - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

SST: Total Variation; Sum of Squares Total.

التباين الكلي؛ مجموع المربعات الكلية

SSE: Unexplained Variation; Sum of Squares Error. مجموع مربعات الأخطاء

SSR: Explained Variation; Sum of Squares Due to Regression مجموع المربعات

الناجم عن الانحدار

هذا المعيار يكون محصوراً:  $0 \leq R^2 \leq 1$ ، ويكون مقبولاً كلما  $R^2$  اقتربت من 1 والعكس صحيح. وفي

حالة وجود نموذج خطي متعدد، فإنه يفضل استعمال مقياس جودة التوفيق المعدل (معامل التحديد

المصحح/المعدل).

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSR / (T - k)}{SST / (T - 1)}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(T - 1)}{(T - k)} (1 - R^2)$$

$k$ : عدد المعالم،  $T$ : عدد المشاهدات.

نشير بأنه لا نغير لهذا المعامل اهتماماً كبيراً كونه قد يكون مغالطاً في الكثير من الحالات، خاصة عند

خضوع السلسلة الزمنية لتحويلات رياضية مثل طريق الفروقات كما قد يأخذ قيماً خارج مجاله المحدد

في حالة عدم توفر الحد الثابت في النموذج (مولود، 2010، صفحة 79).

- معامل الارتباط

يمثل الجذر التربيعي لمعامل التحديد:  $r = \pm\sqrt{R^2}$

- اختبارات المعنوية

إذا قمنا باختبار معنوية المعالم المقدرة كل واحدة على حدى فإننا نلجأ الى:

• اختبار Student

تحدد بالصيغة التالية [انظر في الفصل الثاني. 3. 2. 3. V]:

$$t_j = \frac{\hat{B}_j - B_j}{Se_{(\hat{B}_j)}} \rightsquigarrow t_{\alpha/2, T-k}$$

$Se_{(\hat{B}_j)}$ : يمثل الانحراف المعياري للمعلمة المعينة.

مثلا في نموذج خطي بسيط:  $\hat{Y}_t = \hat{a}t + \hat{b}$ ، نجد:

$$H_0 : B_1 = 0$$

$$H_1 : B_1 \neq 0$$

نقيد تحت الفرضية الصفرية  $H_0$  أي تصبح الإحصاءة  $t_1$  كمايلي:

$$t_1 = \frac{\hat{B}_j}{Se_{(\hat{B}_j)}}$$

فاذا كانت:  $t_1 > t_{tab} = t_{\alpha/2, T-k}$  فان المعلمة  $\hat{B}_j$  هي معنوية Significant. مع العلم ان الانحراف المعياري

للمعلمتين المقدرتين  $\hat{a}, \hat{b}$  هما على التوالي:

$$Se_{(\hat{a})} = \sqrt{\frac{s^2}{\sum_{t=1}^T (t - \bar{t})^2}}, \quad Se_{(\hat{b})} = s \sqrt{\frac{\bar{t}^2}{\sum_{t=1}^T (t - \bar{t})^2} + \frac{1}{T}}$$

$$s^2 = \frac{SSE}{T-k} = \frac{\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2}{T-2}$$

بشكل عام ومصفوفي يكون:  $Se_{(\hat{B}_j)} = s.a_{jj}$ ، حيث  $a_{jj}$  يمثل العنصر القطري Diagonal  $j$  في المصفوفة

$(X'X)^{-1}$  ذات البعد  $(k \times k)$  مع ان:  $k$  هي عدد المعالم المقدرة في النموذج.

## • اختبار Fisher

عند اختبار معنوية المعالم جملة واحدة فإننا نستعين بإحصائية  $F$ ، الذي يحدد بالصيغة التالية [انظر أيضا في الفصل الثاني. 2.3.7]:

$$F_{cal} = \frac{(SSE_0 - SSE_a) / (dl_o - dl_a)}{SSE_a / dl_a} \curvearrowright F_{(dl_o - dl_a, dl_a)}$$

$$F_{cal} = \frac{(SSE_0 - SSE_a) / m}{SSE_a / T - k} \curvearrowright F_{(m, T-k)}$$

حيث:  $SSE_0$  تمثل مجموع مربعات البواقي المقيدة تحت الفرضية  $H_0$  و  $SSE_a$  مجموع مربعات البواقي غير المقيدة تحت الفرضية  $H_1$ ، فاذا كانت:  $F_{cal} > F_{tab} = F_{(m, T-k)}$  فإن النموذج صالح لعملية التنبؤ او المعالم المقدرة ذات معنوية.

## 2. التنبؤ والتمهيد بالنماذج المكيفة

"رغم ان طرق التمهيد انها لا تستند الى أي نظرية إحصائية والتي تعتمد على الحدس والتجربة والمنطق الا انها اثبتت نجاحا خاصا في التنبؤ قصير الاجل، وتعتبر طرق التمهيد عموما بانها تكيفية Adaptive بمعنى ان التنبؤ يعدل مع كل ظهور قيمة جديدة مما يجعله مبنيا على صيغة تتطور باستمرار بدلا من الاعتماد على صيغة او معادلة ثابتة لا تستوعب ما يتوفر عن معلومات جديدة عن السلسلة مع مرور الزمن او لا تستوعبها بدرجة كافية (البشير، 2016، صفحة 59)".

## (1) التنبؤ

في جانب التنبؤ بنماذج الاستقطاب سابقا، رأينا ان النماذج الأولى تكمن في تحديد نماذج الاتجاه العام المختلفة مع طرق تقييمها ثم التنبؤ بها، اما النوع الثاني هنا فيكمن في النماذج المكيفة، وهذا النوع من النماذج يتلائم والسلاسل الزمنية التي تتميز بالاستقرارية والعشوائية (تتذبذب حول وسط حسابي ثابت معين) أي انها خالية من مركبة الاتجاه العام والفصلية في مرحلة أولية (نصل اليها بنفس الاختبارات السابقة) وفي مرحلة لاحقة تتطور هذه النماذج لتتلاءم والسلاسل الزمنية بمركباتها العشوائية. الاتجاه العام والفصلية ضمن نماذج أنية Holt-Winters حيث يتم تقييم معالم الاتجاه العام/ المؤشرات الفصلية، وهذه النماذج تكيف نفسها أليا لكل وضع جديد ويتم تقييم معالم الاتجاه العام/ المؤشرات الفصلية من جديد. من بين هذه النماذج (مولود، 1998، صفحة 63):

## - نماذج المتوسطات المتحركة

تعتمد على فكرة المتوسط الحسابي سواءً البسيط او المرجح ويمكن تقسيمها الى قسمين:

## • نماذج المتوسطات المتحركة البسيطة

$$\hat{Y}_{T+1} = \frac{1}{n} (Y_T + Y_{T-1} + Y_{T-2} + \dots + Y_{T-n+1})$$

$$\hat{Y}_{T+1} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} Y_{T-r}$$

مثلا: إذا كانت:  $n = 4$  فإننا نحصل على:

$$\hat{Y}_{T+1} = \frac{(Y_T + Y_{T-1} + Y_{T-2} + Y_{T-3})}{4}$$

$$\hat{Y}_T = \frac{(Y_{T-1} + Y_{T-2} + Y_{T-3} - Y_{T-4})}{4}$$

$$\hat{Y}_{90} = \frac{(Y_{89} + Y_{88} + Y_{87} + Y_{86})}{4} \quad \text{مثلا:}$$

تعتبر  $Y_{89}$  أحدث مشاهدة يمكن استعمالها. رغم سهولة تطبيق طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة

الا انه هناك انتقادات موجهة لهذا النموذج، وهي (مولود، 1998، صفحة 63):

- غياب وسائل إحصائية ملائمة للحكم على قوة النموذج الإحصائية والتنبؤية.
- ينتقد على أساس انه يعتبر ان  $Y_t$  في المستقبل ماهي الا المتوسط الحسابي للقيمة السابقة فقط (لهذا من الواجب تعديله او تكييفه ليعطي نموذج أفضل).
- النتيجة تتوقف بشكل أساسي على القيمة  $n$  التي تختار عفويا والمتعارف عليه ( $n = 4$  فصليا،  $n = 12$  شهريا....) وفي الحالات الأخرى تختار عفويا.

## • نماذج المتوسطات المتحركة المرجحة الاسية

لاحظنا سابقا بان نموذج المتوسطات المتحركة البسيطة يعطي نفس الوزن للمتغير  $Y_t$  في مختلف الفترات، لكن نموذج المتوسطات المتحركة المرجحة الاسية يخصص الوزن الأكبر للقيم الحالية عن سابقاتها، بمعنى ان تأثير  $Y_{t-1}$  أكبر من تأثير  $Y_{t-s}$  حيث تأثير  $s < 1$ ، كما انه يتخلص من إشكالية  $n$ . يكتب بالشكل التالي (مولود، 1998، الصفحات 64-67):

$$\tilde{Y}_t = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} (1-\alpha)^r Y_{t-(r+1)}$$

$$0 < \alpha < 1$$

- $\alpha$ : تمثل معلمة التكييف، وكلما اقتربت من 1 كان التعديل أسرع والعكس.
- استعمال هذا النموذج في عملية التنبؤ يكون على الشكل التالي:

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + \alpha(1-\alpha)Y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{T-2} + \alpha(1-\alpha)^3 Y_{T-3} \dots$$

$$\hat{Y}_{T+1/T} = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} (1-\alpha)^r Y_{T-r} \quad [1]$$

حيث  $\hat{Y}_{T+1/T}$ : هو تنبؤ  $Y$  للفترة  $T+1$  انطلاقاً من الفترة الحالية  $T$ .

$$\hat{Y}_{T+2} = \alpha Y_{T+1} + \alpha(1-\alpha)Y_T + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^3 Y_{T-2} + \dots$$

$$\hat{Y}_{T+2} = \alpha \hat{Y}_{T+1} + (1-\alpha) [\alpha Y_T + \alpha(1-\alpha)Y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{T-2} + \dots]$$

$$\hat{Y}_{T+2} = \alpha \hat{Y}_{T+1} + (1-\alpha) \hat{Y}_{T+1}$$

$$\hat{Y}_{T+2} = \hat{Y}_{T+1} (\alpha + 1 - \alpha)$$

$$\hat{Y}_{T+2} = \hat{Y}_{T+1}$$

$$\hat{Y}_{T+L} = \hat{Y}_{T+1}$$

عموما نستنتج أن:

من خلال الاستنتاج الأخير نجد ان التنبؤات متساوية، وهذا باستعمال المعادلة [1] الامر الذي يسبب عراقيل كثيرة منها لانهاية العلاقة الرياضية ولذلك يجب تبسيطها الى الشكل التالي:

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} (1-\alpha)^r Y_{T-r}$$

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + \alpha(1-\alpha)Y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{T-2} + \dots$$

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha) \underbrace{[\alpha Y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)Y_{T-2} + \dots]}_{\hat{Y}_{T/T-1}}$$

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha) \hat{Y}_{T/T-1}$$

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha) \hat{Y}_T$$

$$\hat{Y}_{T+1} = \hat{Y}_T + \alpha (Y_T - \hat{Y}_T)$$

$$\hat{Y}_{T+1} = \hat{Y}_T + \alpha (\varepsilon_t) \quad [2]$$

المعادلة [2] تعتبر تنبؤ الفترة القادمة ما هو الا تنبؤ الفترة المستقبلية مضافا اليه مقدار التعديل وهو مكون من نسبة معينة من الخطأ (الباقى).

(2) التمهيد

يعتبر التمهيد على انه تهذيب السلسلة الزمنية من خلال إزالة الحوادث العارضة (التذبذبات الحادة والعشوائية).

- طرق تمهيد السلسلة الزمنية

لتمهيد السلسلة الزمنية هناك ثلاث طرق مختلفة والتي تتمثل في طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة، طريقة المتوسطات المتحركة الممركزة وطرق التمهيد الاسي، والتي سوف نوضحها كالاتي:

• طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة

تعمل هذه الطريقة على تمهيد السلسلة الزمنية باعتماد المشاهدات الماضية، والتي تحدد بالصيغة التالية:

$$\tilde{Y}_t = \frac{1}{n}(Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2} + \dots + Y_{t-n+1})$$

$$\tilde{Y}_t = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} Y_{t-r}$$

مثلا لدينا معطيات خاصة حول تطور متغير اجتماعي ما المبينة في الجدول 1، والمطلوب تمهيدها بواسطة اسلوب المتوسطات المتحركة لما  $n = 4$ .

الجدول 1: تطور متغير اجتماعي ما

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Y_t$	24	28	26	30	34	26	28	20	34	30

بتطبيق طريقة المتوسطات المتحركة لأجل تمهيد السلسلة الزمنية نجد السلسلة الجديدة الممهدة كمايلي:

$$\tilde{Y}_4 = \frac{1}{4}(Y_4 + Y_3 + Y_2 + Y_1) = \frac{1}{4}(30 + 26 + 28 + 24) = 27$$

$$\tilde{Y}_5 = \frac{1}{4}(Y_5 + Y_4 + Y_3 + Y_2) = \frac{1}{4}(34 + 30 + 26 + 28) = 29.5$$

$$\tilde{Y}_6 = \frac{1}{4}(Y_6 + Y_5 + Y_4 + Y_3) = \frac{1}{4}(26 + 34 + 30 + 26) = 24$$

$$\tilde{Y}_7 = \frac{1}{4}(Y_7 + Y_6 + Y_5 + Y_4) = \frac{1}{4}(28 + 26 + 34 + 30) = 29.5$$

$$\tilde{Y}_8 = \frac{1}{4}(Y_8 + Y_7 + Y_6 + Y_5) = \frac{1}{4}(20 + 28 + 26 + 34) = 27$$

$$\tilde{Y}_9 = \frac{1}{4}(Y_9 + Y_8 + Y_7 + Y_6) = \frac{1}{4}(34 + 20 + 28 + 26) = 27$$

$$\tilde{Y}_{10} = \frac{1}{4}(Y_{10} + Y_9 + Y_8 + Y_7) = \frac{1}{4}(30 + 34 + 20 + 28) = 33$$

انتقدت هذه الطريقة على أساس انها لم تأخذ المشاهدات المستقبلية في عملية التمهيد.

### • طريقة المتوسطات المتحركة الممركزة

تأخذ طريقة المتوسطات المتحركة الممركزة النقد الخاص بطريقة المتوسطات المتحركة البسيطة والتي تكون:

$$\tilde{Y}_t = \frac{1}{n} \sum_{r=-\frac{(n-1)}{2}}^{\frac{n-1}{2}} Y_{t-r} \quad \text{- حالة } n \text{ فردي:}$$

$$\tilde{Y}_5 = \frac{1}{5}(Y_{t+2} + Y_{t+1} + Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2}) \quad \text{مثلا، إذا كانت } n = 5 \text{ فان:}$$

$$\tilde{Y}_t = \frac{1}{n} \sum_{r=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} D_t Y_{t-r} \quad \text{- حالة } n \text{ زوجي:}$$

حيث  $D_t$  متغير تمثيلي Dummy Variable يأخذ:

$$D_t = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } r = \pm \frac{n}{2} \\ 1 & \text{if } r = -\frac{n}{2} < r < \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$\tilde{Y}_4 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}Y_{t+2} + Y_{t+1} + Y_t + Y_{t-1} + \frac{1}{2}Y_{t-2}) \quad \text{مثلا، إذا كانت } n = 4 \text{ فان:}$$

تستعمل الطريقتان، المتوسطات المتحركة البسيطة والمتوسطات المتحركة الممركزة لإزالة التذبذبات الحادة (الفصلية) والعشوائية من السلسلة الزمنية (مولود، 1998، صفحة 70).

### • طرق التمهيد الأسي

طرق التمهيد الأسي منبثقة من نموذج Brown والذي يخصص وزن أكبر للقيم الحديثة زمنيا عن سابقتها، حيث ينخفض الترجيح المعين لمعطيات الفترات السابقة أسيا مع تقادم البيانات، لذا تلقى البيانات الاحداث ترجيحا اعلى عن البيانات الاقدم، ولنجاح هذه الطرق فانه يجب ان يكون (يحياوي، 2014، الصفحات 26-27):

- افق التنبؤ قصير نسبيا.
- يوجد القليل من المعلومات الخارجية المتاحة عن علاقات السبب والنتيجة بين عنصر وبين العوامل المستقلة التي تؤثر فيه.
- الجهد القليل في التنبؤ المطلوب، ويقاس الجهد بواسطة كل من سهولة تطبيق النموذج والمتطلبات الحسابية المطلوبة للتنفيذ.
- سهولة تحديث التنبؤ بتوفر بيانات حديثة التي يمكن إنجازها بواسطة إدخالها ببساطة.

### 1. نموذج التمهيد الأسّي الأحادي

يتم تطبيق هذا النموذج عندما لا يكون هناك اتجاه عام او فصلي في السلسلة الزمنية، أي المعطيات تحول الى متوسطات بمعنى ان السلسلة الزمنية التي تسلك مسار عشوائي حول وسط حسابي ثابت (يحياوي، 2014، الصفحات 27-28)، وتحدد بالعلاقة الآتية:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t &= \alpha Y_t + (1-\alpha)Y_{t-1} + (1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \dots \\ \tilde{Y}_t &= \alpha \sum_{r=0}^{\infty} (1-\alpha)^r Y_{t-r} \end{aligned} \quad [1]$$

نظرا لعيوبها بسبب لانهائية العلاقة الرياضية نقوم بتبسيطها:

- نؤخر العملية بفترة زمنية تساوي 1 ونضربها بـ  $(1-\alpha)$  نجد:

$$(1-\alpha)\tilde{Y}_{t-1} = \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + (1-\alpha)^2 Y_{t-2} + (1-\alpha)^3 Y_{t-3} + \dots \quad [2]$$

- نقوم بطرح المعادلة [2] من المعادلة [1] نجد:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t - (1-\alpha)\tilde{Y}_{t-1} &= \alpha Y_t \\ \tilde{Y}_t &= \alpha Y_t + (1-\alpha)\tilde{Y}_{t-1}, \quad t = \overline{2, T} \end{aligned}$$

ومنه نحتاج إلى قيم ابتدائية لانطلاق عملية التمهيد، لذا نفترض:  $\tilde{Y}_1 = Y_1$ ، ويكتب النموذج التنبؤي المستقبلي للفترة:  $T+1$  الى الفترة:  $T+L$  كمايلي:

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha y_T - (1-\alpha)\tilde{Y}_T \quad [3]$$

أين نعوض أثناء التنبؤ  $\hat{Y}_T$  في المعادلة [3] بـ  $\tilde{Y}_T$  ومنه:

$$\hat{Y}_{T+L} = \dots = \hat{Y}_{T+1}$$

يجب أن تكون الفترة  $L$  قصيرة جدا حتى لا يفقد التنبؤ مصداقيته.

## 2. نموذج التمهيد الأسّي الثنائي

تسمى بنماذج Brown الأسّي الخطي ذو المعلمة الواحدة تعطي هذه الطريقة أوزاناً نسبية متناقصة للبيانات التاريخية، وهي تفضل عن طريقة المتوسطات المتحركة الخطية في حالة استخدامها كأسلوب للتنبؤ في كثير من الحالات، حيث تستخدم لتعويض الفترات الزمنية المفقودة في الحساب عند استخدام المتوسطات المتحركة، وتكون الصيغة الرياضية له كما يلي (الشويرف و البيباص، 2015، الصفحات 12-14):

$$Y_t = b + at + \varepsilon_t$$

السلسلة  $Y_t$  تحتوي على المركبة العشوائية والاتجاه العام حيث:  $b + at$  تمثل مركبة الاتجاه العام الخطي،  $\varepsilon_t$  تمثل المركبة العشوائية، ويمكن تمهيدها وفق هذا النموذج للتمهيد الأسّي الثنائي على مرحلتين:

$$\tilde{Y}_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha) \tilde{Y}_{t-1} \quad \text{- المرحلة الأولى:}$$

$$\tilde{\tilde{Y}}_t = \alpha \tilde{Y}_t + (1 - \alpha) \tilde{\tilde{Y}}_{t-1} \quad \text{- المرحلة الأولى:}$$

ويتم حساب المعلمتين كما يلي:

$$b = 2\tilde{Y}_t - \tilde{\tilde{Y}}_t$$

$$a = \frac{\alpha}{1 - \alpha} (\tilde{Y}_t - \tilde{\tilde{Y}}_t)$$

والنموذج التنبؤي يكون:

$$\hat{Y}_{T+L} = b + a(T + L)$$

الجدير بالذكر أنه كلما اقتربت قيم  $\alpha$  من الصفر كلما كانت قيم التمهيد أكثر معنوية للفترات الزمنية المتتالية في السلسلة الزمنية.

## 3. نموذج التمهيد الأسّي الثلاثي

التمهيد الأسّي الثلاثي هو تمهيد لطريقة التمهيد الأسّي الأحادي إذا كان الاتجاه العام غير خطي، حيث يتم تمهيد بيانات السلسلة الأصلية ثلاث مرات متتالية. وهو أسلوب Brown التربيعي ذو المعلمة الواحدة، ويعطي بالعلاقات التالية (الشويرف و البيباص، 2015، صفحة 15):

$$\tilde{Y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) \tilde{Y}_{t-1}$$

$$\tilde{\tilde{Y}}_t = \alpha \tilde{Y}_t + (1 - \alpha) \tilde{\tilde{Y}}_{t-1}$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{Y}}}_t = \alpha \tilde{\tilde{Y}}_t + (1 - \alpha) \tilde{\tilde{\tilde{Y}}}_{t-1}$$

$$\begin{aligned}
a_t &= 3\tilde{Y}_t - 3\tilde{Y}_t + \tilde{\tilde{Y}}_t \\
b_t &= \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2} \left[ (6-5\alpha)\tilde{Y}_t - (10-8\alpha)\tilde{Y}_t + (4-3\alpha)\tilde{\tilde{Y}}_t \right] \\
c_t &= \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} \left( \tilde{Y}_t - 2\tilde{Y}_t - \tilde{\tilde{Y}}_t \right) \\
Y_{t-1} &= a_t + b_t + c_t
\end{aligned}$$

#### 4. طريقة Holt

طريقة Holt مناسبة في الحالة التي تكون فيها السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة الاتجاه العام، أي أنها تستعمل في الظروف السابقة مثل نموذج التمهيد الاسي الثنائي، ويتم التنبؤ فيها باستخدام ثابتي التمهيد، أحدهما خاص بالعشوائية والآخر بالاتجاه العام ولهذا تسمى أحيانا طريقة Holt ذات المعلمتين، وتكتب على الشكل التالي (البشير، 2016، صفحة 72):

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t &= \alpha Y_t + (1-\alpha)(\tilde{Y}_{t-1} + r_{t-1}) \\
r_t &= \gamma(\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_{t-1}) + (1-\gamma)r_{t-1}
\end{aligned} \quad [1]$$

حيث:

- $\tilde{Y}_t$ : تمثل القيمة الممهدة عند الزمن  $t$ .
  - $r$ : تمثل الاتجاه العام.
  - $\gamma$ : تمثل قيمة المعلمة التي تخلص من العشوائية المتبقية، وذلك بعد تعديلها بالتمهيد الاسي الأحادي.
- للتخلص من اشكالية قيم الانطلاق يقترح الصيغتان التاليتان (مولود، 1998، الصفحات 75-76):

$$(2) \begin{cases} \tilde{Y}_2 = Y_2 \\ r_2 = Y_2 - Y_1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad (1) \begin{cases} \tilde{Y}_1 = Y_1 \\ r = 0 \end{cases}$$

تنطلق عملية التمهيد من الفترة 2 في الحالة (1) ومن الفترة 3 في الحالة (2) ولأغراض التنبؤ نكتب المعادلتين السابقتين في المعادلة التالية:

$$\hat{Y}_{T+L} = \tilde{Y}_T + L r_T$$

وهو تقريبا نفس النموذج الخطي حيث:  $r_T = \tilde{Y}_T - \tilde{Y}_{T-1}$  لما:  $\gamma = 1$  في المعادلة [1].

## 5. طريقة التفكيك

تتمثل في إزالة مركبة الاتجاه العام من السلسلة الزمنية بطريقة ملائمة ثم تمهيد السلسلة الناتجة والخالية من المركبة المنزوعة بطريقة التمهيد الاسي الاحادي.

## 1.5. طرق ازالة مركبة الاتجاه العام

لإزالة مركبة الاتجاه العام من السلسلة الزمنية هناك طريقتان، الأولى تتمثل في طريقة الفروقات والثانية تتمثل في الطريقة الانحدارية.

## - طريقة الفروقات من الدرجة الأولى

نقوم بحساب:  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = W_t$ ، أين تصبح:  $\Delta Y_t$  خالية من مركبة الاتجاه العام، فان لم تكن ننتقل الى حساب الفروقات من الدرجة الثانية، أي:  $\Delta^2 Y_t$  ابتداءً من:  $t = 3, 4, \dots, T$ .  
نأخذ مثلاً: سلسلة زمنية معبر عنها بـ:  $Y_t = b + aX_t + \gamma t + \varepsilon_t$ ، مع  $a + \gamma_t$  تمثل مركبة الاتجاه العام التي نريد ازلتها، حيث بطريقة الفروقات ينتج لنا:

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= Y_t - Y_{t-1} \\ Y_t &= b + aX_t + \gamma t + \varepsilon_t \\ Y_{t-1} &= b + aX_{t-1} + \gamma(t-1) + \varepsilon_{t-1} \\ \Delta Y_t &= a(X_t - X_{t-1}) + \gamma(t - (t-1)) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \\ \Delta Y_t &= a(X_t - X_{t-1}) + \gamma + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \\ W_t &= \gamma + aZ_t + v_t\end{aligned}$$

السلسلة الزمنية الجديدة  $W_t$  هي خالية من مركبة الاتجاه العام.

## - الطريقة الانحدارية

لنعتبر النموذج التالي الذي يحتوي على مركبة الاتجاه العام والمركبة العشوائية:  $Y_t = b + \gamma t + \varepsilon_t$ ، فإذا أردنا ازالة الاتجاه العام يكون حسب مايلي (مولود، 1998، الصفحات 78-80):

- تقدير بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS والحصول على مركبة الاتجاه العام:

$$\hat{Y}_t = \hat{b} + \hat{\gamma}t$$

- الازالة، حيث يتم طرح تقدير الاتجاه العام  $\hat{Y}_t$  من السلسلة الاصلية  $Y_t$ :

$$Y_t - \hat{Y}_t = \varepsilon_t$$

تكون  $\varepsilon_t$  خالية من الاتجاه العام. ويمكن تمهيد  $\varepsilon_t$  بطريقة التمهيد الاسي الاحادي المذكور سابقا في التنبؤ كمايلي:

$$\hat{\varepsilon}_T = \alpha \varepsilon_T + (1-\alpha)\tilde{\varepsilon}_T$$

ويتم التنبؤ النهائي وفق العلاقة الشاملة التالية:

$$\hat{Y}_{T+1} = \hat{b} + \hat{\gamma}(T+1) + \hat{\varepsilon}_{T+1}$$

قبل تطبيق الطريقة المناسبة سواء طريقة الفروقات او الطريقة الانحدارية يجب معرفة مسبقا أصل مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية التي قد تكون ناتجة عن:

### 1. نموذج الانتقال العشوائي Rand Walk Trending

$$Y_t = Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta + \varepsilon_t$$

### 2. الزمن

والتي تكتب بـ

$$Y_1 = Y_0 + \delta + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = Y_1 + \delta + \varepsilon_2 = (Y_0 + \delta + \varepsilon_1) + \delta + \varepsilon_2 = Y_0 + 2\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

⋮

$$Y_t = Y_0 + \delta(t) + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

$$Y_t = Y_0 + \delta(t) + e_t$$

"وهو نفس النموذج المذكور سابقا إذا وضعنا:  $\delta = a, Y_0 = b$  معنى أن النموذجين يسلكان سلوكا متشابهها ولكن طريقة التعامل معهما تختلف كون تقدير العلاقة الثانية بمتغيرين التابع والمستقل غير مستقرين يطرح مشاكل كبيرة أشار اليهما كل من (Granger & Newbold, 1974) تحت اسم الانحدار الزائف Spurious Regression ولهذا يفضل استخدام طريقة الفروقات لإزالة مركبة الاتجاه العام".

## IV. المركبة الفصلية وكيفية التعامل معها

رأينا في السابق كيفية التعامل مع مركبة الاتجاه العام بطريقتين، الأولى تتمثل في إزالة هذه المركبة في السلسلة ثم التمهيد والتنبؤ بالسلسلة الناتجة ويتم التنبؤ النهائي في الأخير بإضافة مركبة الاتجاه العام (النماذج الآتية) مباشرة وفق نموذج Holt ذو المعلمتين. بنفس المنهجية يمكن التعامل مع الفصلية ويمكن إزالتها ثم ردها في الأخير للحصول على التنبؤ النهائي كما يمكن نمذجتها مباشرة وفق نموذج Holt-Winters او طريقة Buys-Ballot.

## 1. طرق إزالة المركبة الفصلية

لإزالة المركبة الفصلية لابد ان نراعي الى أهمية حساب او عدم حساب المؤشرات الفصلية والتي تكون على النحو التالي:

## (1) إزالة المركبة الفصلية بدون حساب مؤشرات

هذه الطرق الموالية لا تتطلب منا حساب المؤشرات الفصلية، وحيث من خلال ما رأينا من طرق المتوسطات الحسابية المختلفة وطريقة الفروقات، فانه يتم تطبيقها مباشرة على السلسلة الزمنية المراد إزالة المركبة الفصلية منها. من بين هذه الطرق، نجد:

## - طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة او الممركزة

تعتبر طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة او الممركزة صالحة لإزالة الفصلية والعشوائية من السلسلة الزمنية، ولتوضيح ذلك. نفترض انه لدينا سلسلة زمنية ذات مركبين الاتجاه العام والعشوائية وفي شكل تجميحي، أي (مولود، 1998، الصفحات 82-83):

$$Y_t = T_t + S_t$$

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad , \quad E(\varepsilon_t)^2 = \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(Y_t) = T_t \quad , \quad V(Y_t)^2 = \sigma^2$$

فاذا أردنا إزالة الفصلية بواسطة طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة مثلا، فنقوم بحساب تباين  $\tilde{Y}_t$  للسلسلة الممهدة، ونجده:

$$V(\tilde{Y}_t) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} Y_{t-r}\right)^2$$

$$V(\tilde{Y}_t) = \frac{1}{n} \sigma^2$$

$$V(\tilde{Y}_t) = \frac{\sigma^2}{n}$$

ومنه تباين السلسلة الممهدة يكون اقل من تباين السلسلة الاصلية:  $\frac{\sigma^2}{n} > \sigma^2$ ، الا ان الطريقتان لا تهتمان

بحساب المعاملات الفصلية.

### - طريقة الفروقات

مثل ما استعملنا هذه الطريقة مع مركبة الاتجاه العام، كذلك يمكن تطبيقها على الفصلية دون حساب المؤشرات، وتكتب رياضيا على الشكل التالي:

$$\Delta^p Y_t = Y_t - Y_{t-p}$$

$$\Delta^p Y_t = (1 - L^p) Y_t$$

حيث المعطيات الفصلية:  $p = 4$  والمعطيات الشهرية  $p = 4$ ، وعملية التنبؤ في هذه الحالة تتم بطريقة عكسية ويمكن تلخيصها بالمراحل التالية (مولود، 1998، الصفحات 83-84):

1. في العلاقة الفروقات من الدرجة  $p$ ، يتم استبدال  $t$  بـ  $t+1$  كما يلي:

$$\Delta^p Y_t = Y_t^a = Y_t - Y_{t-p}$$

$$\hat{Y}_{T+1}^a = \hat{Y}_{T+1} - Y_{T-p+1} \quad \text{بعد التعويض تصبح:}$$

2. التنبؤ بطريقة ملائمة للحصول على  $\hat{Y}_{T+1}^a$  كأن تكون باستعمال نموذج التمهيد الاسي الاحادي مثلا ان بقيت السلسلة بعد ازالة العشوائية فقط.

3. حساب التنبؤ  $\hat{Y}_{T+1}$ ، حيث:

$$\hat{Y}_{T+1} = \hat{Y}_{T+1}^a + Y_{T-p+1}$$

(2) إزالة المركبة الفصلية بواسطة حساب مؤشراتهما

تعتبر الطرق الموالية عكس الطرق السابقة والتي تتطلب ضرورة حساب المؤشرات الفصلية لأجل المركبة الفصلية، ومن بين هذه الطرق، نجد:

## - طريقة النسب الموسمية

تعتمد هذه الطريقة على حساب الوسط الحسابي العام لأجل المؤشرات الفصلية، إلا أنها تفرق بين الشكل الجدائي والتجميعي ويمكن تلخيص هذه الطريقة فيما يلي (مولود، 2010، الصفحات 87-88):

1. حساب الوسط الحسابي لملاحظات كل سنة  $i$ :

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Y_{ij} \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p}$$

حيث:  $i$  مؤشر السنة،  $p$  مؤشر الفصل

2. حساب الوسط الحسابي العام:

$$\bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{Y}_i$$

3. حساب الوسط الحسابي لكل فصل/شهر عبر السنوات، كأن تجمع الملاحظات الخاصة بالفصل

/الشهر لكل السنوات ونقسمه على عدد هذه الأخيرة  $m$  أي:

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_{ij}$$

4. حساب المؤشر الفصلي  $j$ :

$$S_j = \frac{\bar{Y}_j}{\bar{Y}}$$

5. حساب السلسلة الخالية من الفصلية كما يلي:

$$Y_{ij}^a = \frac{Y_{ij}}{S_j}$$

وللتنبؤ في هذه الحالة يتم وفق هذا الشكل:

$$\hat{Y}_{T+1,j}^a = \frac{Y_{T+1,j}}{S_j}$$

أين المؤشر الفصلي  $j$  هنا أضيف لغرض تبين المشاهدة المقابلة بالمؤشر الفصلي المعني  $j$  (أي ربط

المشاهدة بالمؤشر الفصلي المقابل لها) ومنه:

$$\hat{Y}_{T+1,j} = \hat{Y}_{T+1,j}^a S_j$$

$$\hat{Y}_{T+L,j} = \hat{Y}_{T+L,j}^a S_j$$

وعلى العموم:

- طريقة المتوسطات المتحركة النسبية

تتميز عن سابقتها في التفرقة بين الشكل الجدائي والتجميحي للسلسلة الزمنية (مولود، 1998، الصفحات 93-90):

$$Y_{ij} = T_{ij} C_{ij} S_{ij} \varepsilon_{ij}$$

1. تطبيق طريقة المتوسطات الممركزة للتمهيد أي عزل المركبة الفصلية والعشوائية عن السلسلة وتكون السلسلة الناتجة بالشكل:

$$\tilde{Y}_{ij} = T_{ij} C_{ij}$$

2. تقسيم السلسلة الاصلية على السلسلة الناتجة:

$$Z_{ij} = \frac{Y_{ij}}{\tilde{Y}_{ij}} = \frac{T_{ij} C_{ij} S_{ij} \varepsilon_{ij}}{L_{ij} C_{ij}}$$

بحيث السلسلة الناتجة تحتوي على المركبتين  $S_{ij}, \varepsilon_{ij}$  فقط أي:

$$Z_{ij} = S_{ij} \varepsilon_{ij}$$

3. حساب المؤشر الفصلي بقسمة مشاهدات الفصل الخاصة بكل سنة للسلسلة الاخيرة على عدد السنوات ناقص واحد  $(m-1)$ ، أي:

$$S_j = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} Z_{ij}$$

4. نشترط أن يكون عدد مجموع المؤشرات الفصلية يعادل عدد مشاهدات كل سنة، أي:  $p$ .

$$\sum_{j=1}^p S_j = p$$

فإذا لم يتحقق الشرط، نجري عملية التحويل لحساب المؤشرات الفصلية المعدلة. أي:

$$X = \sum_{j=1}^p S_{ij} \neq p$$

$$s_j = S_j \frac{p}{X} \quad \text{فان:}$$

$$s_j = \frac{S_j}{\bar{S}} \quad \text{اين:}$$

$$\bar{S} = \frac{X}{p} = \frac{\sum_{j=1}^p S_{ij}}{p}$$

5. حساب السلسلة الخالية من الموسمية بقسمة السلسلة الاصلية على المؤشر الفصلي المقابل إن تحقق الشرط، أو على المؤشر المعدل في الحالة الأخرى:

$$Y_{ij}^a = \frac{Y_{ij}}{S_j}$$

• الحالة التجميعية:  $Y_{ij} = T_{ij} + C_{ij} + S_{ij} + \varepsilon_{ij}$

$$\tilde{Y}_{ij} = T_{ij} + C_{ij} \quad .1$$

$$Z_{ij} = Y_{ij} - \tilde{Y}_{ij} = S_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad .2$$

$$S_j = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} Z_{ij} \quad .3$$

$$\sum_{j=1}^p S_j = 0 \quad .4$$

وإذا لم يتحقق الشرط فإننا نقوم بحساب:  $s_j = S_j - \bar{S}$  وبالتالي:  $Y_{ij}^a = Y_{ij} - S_j$

- الطرق الانحدارية

نفترض أنه لدينا سلسلة زمنية ذات مركبة فصلية مثلًا:  $p=4$ ، وعشوائية فقط وفي شكل تجميعي. في هذه الحالة نعبّر عنها بالمتغيرات التمثيلية Dummy Variables (مولود، 2010، الصفحات 97-99):

- يمكن نمذجتها، أي المركبة الفصلية في الشكل التالي:

$$Y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$$

- في مثالنا أعلاه يصبح النموذج:

$$Y_t = \alpha + \sum_{j=1}^3 \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \alpha + \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \varepsilon_t$$

- إذ كانت المشاهدة خاصة بالفصل الأول:  $D_{1t} = 1$   
 - إذ كانت المشاهدة خاصة بالفصول الأخرى:  $= 0$   
 - إذ كانت المشاهدة خاصة بالفصل الثاني:  $D_{2t} = 1$   
 - إذ كانت المشاهدة خاصة بالفصول الأخرى:  $= 0$   
 - إذ كانت المشاهدة خاصة بالفصل الثالث:  $D_{3t} = 1$   
 - إذ كانت المشاهدة خاصة بالفصول الأخرى:  $= 0$   
 - إذ كانت المشاهدة خاصة بالفصل الرابع:  $D_{4t} = 1$   
 - إذ كانت المشاهدة خاصة بالفصول الأخرى:  $= 0$

للإشارة في الحالة الجدائية، فإنه يكتب كمايلي:

$$Y_t = \alpha \prod_{j=1}^{p-1} \gamma_j^{D_{jt}}$$

لا يسمح بدخول متغير تمثيلي إضافي لمصفوفة المتغيرات الشارحة والتي نسميها في الغالب بـ  $X$ . كونه يجعل العمود الأول (الأحادي العناصر) = شعاع لمجموع عناصر الأعمدة الأربعة الأخرى (أحادية العناصر) وهذا يترك المصفوفة هذه ناقصة الرتبة وبالتالي فإن المصفوفة  $(X'X)$  تكون ذات محدد معدوم ولا يمكن قلبها من أجل الحل الوحيد

- غياب المؤشر الفصلي الرابع وهذا بوجود الحد الثابت  $\alpha$

وللحصول على المؤشر الفصلي  $p$  الرابع في هذا المثال نستعين بشرط الطريقة السابقة:

• الحالة التجميعية:  $\sum_{j=1}^{p-1} S_j + S_p = 0$  ومنه:  $S_p = -\sum_{j=1}^{p-1} S_j$  ، حيث:  $S_p$  يمثل:  $\gamma_p$

• الحالة الجدائية:  $S_p = p - \sum_{j=1}^{p-1} S_j$

## 2. نمذجة المركبة الفصلية

يمكن نمذجة الفصلية مباشرة وذلك من خلال استعمال طريقة Holt-Winters او طريقة Buys Ballot

### (1) طريقة Holt-Winters

بافتراض أن الشروط الأولية والمعلمات هي نفسها لمعادلتي Holt، تضيف طريقة Holt-Winters ثابتا ثالثا للتمهيد ومؤشرات موسمية ممهدة إلى نموذج التمهيد الأسّي الثنائي. تستخدم هذه الطريقة الأوزان لتمهيد الاتجاه المماثل للتجانس الأسّي الأحادي، والثنائي وتستخدم طريقة المعادلات التالية (Islam & Watanapalachaikul, 2012, pp. 44-45):

$$\tilde{Y}_t = \alpha Y_t^a + (1 - \alpha)(\tilde{Y}_{t-1} + r_{t-1})$$

$$r_t = \gamma(\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_{t-1}) + (1 - \gamma)r_{t-1}$$

$$S_t = \beta(Z_t) + (1 - \beta)S_{t-p}$$

مع مراعاة الى الحالة التجميعية او الجدائية حسب نوع المركبات التي تحكم السلسلة الزمنية (مولود، 1998، الصفحات 102-104):

• الحالة التجميعية: يكون لدينا

$$Y_t^a = Y_t - S_{t-p}$$

$$Z_t = Y_t - \tilde{Y}_t$$

- الحالة الجدائية: حيث يكون لدينا

$$Y_t^a = \frac{Y_t}{S_{t-p}}$$

$$Z_t = \frac{Y_t}{\bar{Y}}$$

- تمتاز هذه الطريقة في أنها ذاتية التعديل وبالتالي تكون مؤشراتها الفصلية ليست بالضرورة مساوية لمؤشرات السنة التي قبلها أو بعدها.

- يتم حساب المعلمات:  $\alpha, \beta, \gamma$  على اساس تصغير مجموع البواقي:  $\sum \varepsilon_i^2$ ، اين:  $\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$  وبدوها  $\hat{Y}_i$  تحسب في الحالتين التجميعية والجدائية على الترتيب:

$$\hat{Y}_t = (\tilde{Y}_t + r_t) + S_{t-p}$$

$$\hat{Y}_t = (\tilde{Y}_t + r_t) S_{t-p}$$

$$t = (p+1), \dots, T$$

ولأهمية هذه الطريقة مع صعوبة تطبيقها يدويا نود توضيح بعض الأمور منها:

- مشكل نقاط الانطلاق التي يمكن حلها بأحد الاقتراحات التالية:
- وضع كل القيم الابتدائية مساوية لـ 0: وهذا يكون مقبولا في حالة توفر كمية معتبرة من المشاهدات.
- حساب القيم الابتدائية: تبدأ عملية التمهيد من الفترة:  $p+1$ . لذلك وجب توفر القيم الابتدائية للعملية كمايلي:

$$\tilde{Y}_p = Y_p \quad [1]$$

$$r_t = Y_p - Y_{p-1} \quad [2]$$

$$S_t = \frac{Y_t}{\bar{Y}} \quad [3]$$

$$t = \overline{1, P} \quad , \quad \bar{Y} = \sum_{t=1}^P Y_t$$

- صيغة معادلة التنبؤ: وهنا يجب الاشارة إلى الاحتفاظ بالمؤشرات الفصلية الأخيرة لاستعمالها في التنبؤ المستقبلي وتكون معادلة التنبؤ:

$$\hat{Y}_{T+L} = (\tilde{Y}_T + L r_t) + S_{(T+L)-P} \quad \bullet \text{ الحالة التجميعية:}$$

$$\hat{Y}_{T+L} = (\tilde{Y}_T + L r_t) S_{(T+L)-P} \quad \bullet \text{ الحالة الجدائية:}$$

## (2) طريقة Buys-Ballot

يمكن نمذجة السلسلة الزمنية باستعمال طريقة Buys-Ballot والتي تكون مراحلها كمايلي  
:(Bourbonnais & Terraza, 1998, pp. 15-19)

## - التمثيل البياني للسلسلة الزمنية وإنشاء جدول Buys-Ballot

في بعض الأحيان يكون التحليل البياني لسلسلة زمنية ما يكفي لإبراز الموسمية. ومع ذلك، إذا لم تكشف هذه المراجعة أو في حالة الشك، فإن جدول Buys-Ballot يسمح بتحليل أكثر تفصيلا لذلك، حيث تسمح هذه الطريقة البسيطة للغاية باكتشاف الموسمية وأيضا تحديد طبيعتها، وذلك من خلال حساب المتوسطات والانحرافات المعيارية لكل سنة وأيضا بالنسبة لكل فصل، ويحتوي أيضا على المتوسط الحسابي العام والانحراف المعياري العام.

## - تحليل التباين واختبار Fisher

لا يتيح الفحص المرئي للرسم البياني أو الجدول دائما تحديد وجود موسمية بشكل مؤكد. علاوة على ذلك، المعالجة التلقائية التي قد تكون ضرورية في حالة وجود عدد كبير من السلاسل الزمنية لأجل الاختبار فإنها تكون صعبة. إن اختبار Fisher القائم على تحليل التباين يتغلب على هذين العيبين. يفترض هذا الاختبار ان السلسلة الزمنية تكون بدون اتجاه عام أو بدون موسمية إضافية. وفي حالة وجودهما سيتم ازالتهما عن طريق الانحدار بمرور الوقت (الموسمية التحديدية الإضافية)، أو عن طريق إجراء الترشيح (الموسمية العشوائية الإضافية).

ليكن لدينا:

-  $N$ : عدد السنوات.

-  $p$ : عدد الفصول.

-  $X_{ij}$ : قيم السلسلة الزمنية من أجل:  $j = \overline{1, P}, i = \overline{1, N}$ ، يفترض أن:  $X_{ij} = m_{ij} + \varepsilon_{ij}$ ، مع ان:  $\varepsilon_{ij}$

البواقي التي تعتبر عشوائية تكون مستقلة، أي:  $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

-  $m_{ij}$ : هي العناصر المكونة للسلسلة الزمنية التي تكتب على الشكل:  $m_{ij} = a_i + b_j$ ، حيث  $a_i$  يقيس

تأثير السنة في سطر جدول Buys-Ballot و  $b_j$  يقيس تأثير الفصل  $p$  في عمود جدول Buys-Ballot.

يتم اختبار تأثيرين غير موجودين مقابل تأثيرين معنويين حاليين:

- إذا كان تأثير الفصل معنويا، تكون السلسلة موسمية.

- إذا كان تأثير السنة معنوياً، فهذا يشير إلى تفسيرين:

• سلسلة الانطلاق لم يتم تحويلها، وبالتالي لديها احتمالات افقية Horizontal Bearings.

• تم تحويل السلسلة، وتوجد تغييرات في الاتجاه في السلسلة.

مسار الاختبار يكون على النحو التالي:

$$-1 \text{ حساب التباين الكلي للجدول: } S_T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P (X_{ij} - X_{..})^2, \text{ مع: } X_{..} = \frac{1}{Np} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P X_{ij} \text{ المتوسط الحسابي}$$

العام للسلسلة الزمنية بـ  $N \times p$  مشاهدة.

$$- \text{ } X_{i.} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p X_{ij} \text{ يمثل المتوسط الحسابي للسنة } i.$$

$$- \text{ } X_{.j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij} \text{ يمثل المتوسط الحسابي للفصل } j.$$

- مثل:  $X_{ij} = m_{ij} + \varepsilon_{ij}$ ، مع:  $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ، و  $m_{ij}$  يساوي تأثير الفصل مضاف الية تأثير

السنة، فإننا نتحصل على:

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_i \sum_j (X_{ij} - X_{..})^2 \\ &= \sum_i \sum_j (X_{ij} - X_{i.} + X_{i.} - X_{.j} + X_{.j} + X_{..} - X_{..} - X_{..})^2 \\ &= \sum_i \sum_j \left[ (X_{i.} - X_{..}) + (X_{.j} - X_{..}) + (X_{ij} - X_{i.} - X_{.j} + X_{..}) \right]^2 \\ &= \sum_i \sum_j (X_{i.} - X_{..})^2 + \sum_i \sum_j (X_{.j} - X_{..})^2 + \sum_i \sum_j (X_{ij} - X_{i.} - X_{.j} + X_{..})^2 + \text{حد مجال معدوم} \\ &= p \sum_i (X_{i.} - X_{..})^2 + N \sum_j (X_{.j} - X_{..})^2 + \sum_i \sum_j (X_{ij} - X_{i.} - X_{.j} + X_{..})^2 \end{aligned}$$

$$S_T = S_A + S_p + S_R$$

year    period    residual

الجدول 2 يلخص المفاهيم السابقة:

الجدول 2: ملخص لحساب المتوسطات الحسابية عبر السنوات والفصول لجدول Buys-Ballot

السنة \ الفصل	1	...	$j$	...	$p$	المتوسطات الحسابية للسنوات
1	$X_{11}$	...	$X_{1j}$	...	$X_{1p}$	
...		...	...	...	...	
$i$	$X_{i1}$	...	$X_{ij}$	...	$X_{ip}$	$X_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p X_{ij}$
...	...	...	...	...	...	
$N$	$X_{N1}$	...	$X_{Nj}$	...	$X_{Np}$	
المتوسطات الحسابية للفصول			$X_{.j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij}$			$X_{..} = \frac{1}{Np} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p X_{ij}$

(المصدر: (Bourbonnais &amp; Terraza, 1998, p. 18)

مع الجدول 3 يعمل على تحليل التباين لكشف عن التغيرات الموسمية والاتجاه العام.

الجدول 3: تحليل التباين لكشف عن التغيرات الموسمية والاتجاه العام

مجموع المربعات	درجة الحرية	التسمية	التباين
$S_p = N \sum_{j=1}^p (X_{.j} - X_{..})^2$	$p-1$	تباين الفصول	$V_p = \frac{S_p}{p-1}$
$S_A = N \sum_{i=1}^N (X_i - X_{..})^2$	$N-1$	تباين السنوات	$V_A = \frac{S_A}{N-1}$
$S_R = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (X_{ij} - X_i - X_{.j} + X_{..})^2$	$(p-1)(N-1)$	تباين البواقي	$V_R = \frac{S_R}{(p-1)(N-1)}$
$S_T$	$N(p-1)$	التباين الكلي	$V_T = \frac{S_T}{N \times p - 1}$

(المصدر: (Bourbonnais &amp; Terraza, 1998, p. 18)

من خلال نتائج الجدول 3 نحاول بناء اختبار الفرضيات:

2- حساب اختبار تأثير الموسمية:

لا توجد تأثيرات موسمية:  $H_0$ يوجد تأثيرات موسمية:  $H_1$

حساب إحصائية Fisher، أي:  $F_{cal} = \frac{V_p}{V_R}$  ومقارنتها بالمجدولة:  $F_{v_1, v_2}^\alpha = F_{p-1, (N-1)(p-1)}^\alpha$ ، فإذا كانت:

$F_{cal} > F_{v_1, v_2}^\alpha$  فإننا نرفض الفرضية  $H_0$  وبالتالي السلسلة الزمنية تتأثر بالموسمية.

3- حساب اختبار تأثير الاتجاه العام:

لا يوجد تأثيرات لاتجاه العام:  $H_0$

يوجد تأثيرات لاتجاه العام:  $H_1$

حساب إحصائية Fisher، أي:  $F_{cal} = \frac{V_A}{V_R}$  ومقارنتها بالمجدولة:  $F_{v_3, v_2}^\alpha = F_{N-1, (N-1)(p-1)}^\alpha$ ، فإذا كانت:

$F_{cal} > F_{v_3, v_2}^\alpha$  فإننا نرفض الفرضية  $H_0$  وبالتالي السلسلة الزمنية تتأثر بمركبة الاتجاه العام.

## تمارين الفصل

### تمرين 1

الجدول الموالي يبين معطيات حول المبيعات الشهرية لأجهزة العرض الضوئي لمؤسسات ما:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	الشهر
180	190	180	220	240	280	300	170	160	320	300	350	المبيعات

المطلوب: اختبر وجود أو عدم وجود مركبة الاتجاه العام باستخدام اختبار تعاقب الاشارات

### الحل

السلسلة عشوائية:  $H_0$

السلسلة ذات مركبة الاتجاه العام:  $H_1$

1. نرتب السلسلة تصاعدياً، حسب الجدول التالي:

12	11	9	9	8	7	6	5	3	3	2	1	الرتبة
350	320	300	300	280	240	220	190	180	180	170	160	المشاهدة

2. حساب الوسيط  $m$ :

$$m = \frac{T}{2} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow \frac{(Y_m + Y_{m+1})}{2} = \frac{(Y_6 + Y_{6+1})}{2} = \frac{220 + 240}{2} = 230$$

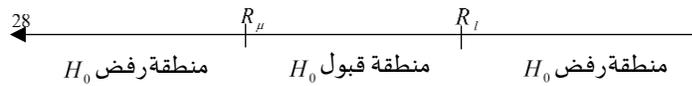
3. حساب  $R$ :

180	190	180	220	240	280	300	170	160	320	300	350	$M_d = 230$
+	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+	

اذن، تكون:  $R = 5$ 4. رفض  $H_0$  حسب نوع العينة:

العينة صغيرة ( $m \leq 20$ ): إذا كان:  $R \geq R_\mu$  أو  $R \leq R_l$ ، حيث:  $R_l = 2$ ,  $R_\mu = 10$ : القيم الحرجة المجدولة العليا والدنيا على الترتيب لاختبار  $R$ .

نلاحظ ان:  $R = 5$  تقع ما بين القيمتين الحرجتين وبالتالي نقبل الفرضية العدمية، وبالتالي السلسلة خالية من مركبة الاتجاه العام.



تمرين 2

لدينا معطيات متعلقة باستهلاك منتج ما، والواردة في الجدول التالي:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	الفصل
281	273	264	262	272	262	256	253	271	263	258	255	المشاهدة

المطلوب: اختبر وجود أو عدم وجود مركبة الاتجاه العام باستخدام اختبار Daniel

الحل

 $H_0$ : السلسلة عشوائية: $H_1$ : يوجد اتجاه عام:

1. نرتب المشاهدات، حسب الجدول التالي:

12	11	9	9	8	7	5	5	3	3	2	1	الرتبة
281	273	272	262	264	263	262	262	258	256	255	253	المشاهدة

2. تحديد رتب قيم السلسلة الزمنية التصاعدي  $R$  والزمني  $t$

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	الزمن $t$
12	11	8	5.5	10	5.5	3	1	9	7	4	2	الرتبة $R$
0	0	2	3.5	2-	1.5	3	4	5-	4-	2-	1-	$d_i$
0	0	4	12.25	4	2.25	9	16	25	16	4	1	$d_i^2$

3. حساب إحصاءة الاختبار  $r_s$ :

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^T d_t^2}{T(T^2 - 1)} = 1 - \frac{6(93.5)}{12(12^2 - 1)} = 0.67$$

4. رفض  $H_0$  حسب نوع العينة:

العينة صغيرة ( $T \leq 30$ ): إذا كان:  $|r_s| > r_{\alpha/2}$

من جدول القيم الحرجة لمعامل الارتباط Spearman وعند مستوى المعنوية  $\alpha = 5\%$  مع  $T = 12$  نجد  $r_{0.025} = 0.5804$ ، وهي أقل من القيمة المحسوبة والبالغة 0.67 ومنه نرفض الفرضية العدمية ونقبل بالبديلة التي تشير إلى وجود مركبة الاتجاه العام.

### تمرين 3

باستعمال معطيات التمرين 2، وبافتراض توفر سلسلة زمنية ذات 75 مشاهدة، وبعد الحساب وفق

الطريقة السابقة قدرت قيمة معامل الارتباط بـ:  $r_s = 0.51$

المطلوب: كشف مركبة الاتجاه العام عند مستوى المعنوية  $\alpha = 5\%$ .

### الحل

رفض  $H_0$  حسب نوع العينة:

العينة كبيرة ( $T > 30$ ): إذا كان:  $|Z| > Z_{\alpha/2}$ ، حيث:

$$Z = \frac{r_s - \mu_{r_s}}{\sigma_{r_s}}, \quad \mu_{r_s} = 0, \quad \sigma_{r_s} = \frac{1}{\sqrt{T-1}}$$

$$Z = \frac{r_s}{\sigma_{r_s}} = r_s \sqrt{T-1} \quad \text{بالتعويض نجد:}$$

$$Z = 0.51 \sqrt{74} = 4.35$$

تكون في هذه الحالة  $Z_{\alpha/2} = 1.96$  عند مستوى المعنوية  $\alpha = 5\%$ ، وبعد مقارنة القيمتين المحسوبة والمجدولة، يتم رفض فرضية العدم ومنه قبول فرضية وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية.

#### تمرين 4

الجدول الموالي يوضح معطيات فصلية حول متغير اجتماعي من 1-1988 الى 4-1992:

المتغير	سنة/فصل	المتغير	سنة/فصل	المتغير	سنة/فصل
60	1991-3	32	1989-4	14	1988-1
36	1991-4	12	1990-1	20	1988-2
6	1992-1	12	1990-2	44	1988-3
11	1992-2	68	1990-3	21	1988-4
64	1992-3	29	1990-4	10	1989-1
50	1992-4	7	1991-1	19	1989-2
		18	1991-2	64	1989-3

المطلوب: اختبر وجود أو عدم وجود المركبة الفصلية باستعمال اختبار Kruskal Wallis

#### الحل

قبل الكشف عن الفصلية، يتم أولاً الكشف عن مركبة الاتجاه العام، فان وجدت نقوم بإزالتها ومن ثم تطبيق اختبار الكشف عن الفصلية.

هناك عدة اختبارات الكشف عن الاتجاه العام، ولغرض الممارسة العلمية والتنوع نقوم بتطبيق أحد اختبارات الكشف عن الاتجاه العام، وليكن تطبيق اختبار الإشارة.

$H_0$ : لا يوجد اتجاه عام

$H_1$ : يوجد اتجاه عام

1. حساب عدد الفروقات الموجبة  $V$  وعدد الفروقات غير الصفيرية  $n$ ، حسب الجدول التالي:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	$t$ الزمن
12	12	32	64	19	10	21	44	20	14	$Y_t$
0	-20	-32	45	9	-11	-23	24	6	-	$\Delta Y_t$
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	$t$ الزمن
50	64	11	6	36	60	18	7	29	68	$Y_t$
-14	43	5	-30	-24	42	11	-22	-39	56	$\Delta Y_t$

اذن نستنتج ان:  $V = 9$  و  $n = 18$

- رفض  $H_0$  (أي لا يوجد اتجاه عام) إذا كان:  $|Z| > Z_{\alpha/2}$ ، حيث:

$$|Z| = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V}, \quad \begin{cases} \mu_V = \frac{n}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ \sigma_V = \sqrt{\frac{n}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = 2.345 \end{cases}$$

$$|Z| = \frac{9-9}{2.345} = 0$$

تكون في هذه الحالة  $Z_{\alpha/2} = 1.96$  عند مستوى المعنوية  $\alpha = 5\%$ ، وهي أكبر من القيمة المحسوبة والبالغة 0.426 ومنه نقبل الفرضية العدمية التي تشير إلى ان السلسلة عشوائية.

2. بعدم تم التأكد من عدم وجود الاتجاه العام، نقوم بالكشف عن الفصلية.

لا توجد مركبة فصلية:  $H_0$

توجد مركبة فصلية:  $H_1$

$$KW = \frac{12}{T(T+1)} \sum_{j=1}^p \frac{R_j^2}{m_j} - 3(T+1) \sim \chi_{p-1}^2$$

1. ترتيب المشاهدات حسب الجدول التالي:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	الزمن $t$
12	12	32	64	19	10	21	44	20	14	$Y_t$
5	5	13	18	9	3	11	15	10	7	الرتبة $R$
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	الزمن $t$
50	64	11	6	36	60	18	7	29	68	$Y_t$
16	18	4	1	14	17	8	2	12	20	الرتبة $R$

يمكن إعادة تنظيم هذه الرتب حسب السنوات والفصول مع العلم انه في حالة وجود رتبة مكررة فإننا

نستخدم بدل الرتبة المتوسط الحسابي للرتبة المكررة والجدول الموالي يوضح ذلك:

$\sum R_j$	5	4	3	2	1	$m/p$
18.5	1	2	5.5	3	7	1
36.5	4	8	5.5	9	10	2
89	18.5	17	20	18.5	15	3
66	16	14	12	13	11	4

2. رفض  $H_0$  (أي لا توجد مركبة فصلية) إذا كان:  $KW > \chi^2_{p-1}$

حيث  $m_j = 5$  كون كل فصل تقابله 5 رتب، أي:  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 5$ ، مع  $T = 20$ ، فإن:

$$KW = \frac{12}{20(20+1)} \left[ \frac{(18.5)^2}{5} + \frac{(36.5)^2}{5} + \frac{(89)^2}{5} + \frac{(66)^2}{5} \right] - 3(20+1)$$

$$KW = 16.46$$

تكون في هذه الحالة القيمة الجدولية:  $\chi^2_{3,5\%} = 7.815$  وهي أصغر من القيمة المحسوبة والبالغة 16.46، ومنه يتم رفض الفرضية العدمية  $H_0$  ونقبل بالفرضية البديلة  $H_1$  أي توجد مركبة فصلية في السلسلة الزمنية.

### تمرين 5

لتكن دالة الإنتاج لـ Cobb-Douglas التالية:  $q_i = ak_i^b$ ، والمعبر عنها في الشكل النهائي:

$$q_i = ae^{b \ln k_i + \varepsilon_i}$$

حيث  $a, b$  تمثل عوامل الانتاج. مع العلم ان:

$$\sum \ln k_i \cdot \ln q_i = -6.024, \quad n = 27, \quad \sum \ln q_i = -6.8344, \quad \sum \ln k_i = 25.8017$$

$$\sum (\ln q_i)^2 = 2.205, \quad \sum (\ln k_i)^2 = 25.269$$

1. كيف يمكن تقدير معاملات نموذج Cobb-Douglas؟

2. قدر معاملات النموذج؟

3. ضع جدول تحليل التباين ANOVA؟

4. قدر قيمة الإنتاج عند  $k = 6.5$ ؟

### الحل

1. يمكن تقدير المعلمات عن طريق تحويل الدالة من الصيغة اللاخطية الى الحالة الخطية، أي:

$$\ln q_i = \ln a + b \ln k_i + \varepsilon_i$$

$$\ln \hat{q}_i = \ln \hat{a} + \hat{b} k_i$$

$$\hat{b} = \frac{\sum \ln q_i \ln k_i - n \overline{\ln k} \overline{\ln q}}{\sum (\ln k_i)^2 - n (\overline{\ln k})^2} \quad .2$$

$$\hat{b} = \frac{-6.024 - 27(0.9556)(-0.2531)}{25.269 - 27(0.9556)^2} = 0.8253$$

$$\overline{Lnk} = \frac{25.8017}{27} = 0.9556$$

$$\overline{Lnq} = \frac{-6.8344}{27} = -0.2531$$

$$Ln\hat{q}_i = Ln\hat{a} + \hat{b}k_i$$

$$Ln\hat{a} = \overline{Lnq} - \hat{b}\overline{Lnk}$$

$$Ln\hat{a} = -0.2531 - 0.8253(0.9556) = -1.0417$$

$$Ln\hat{q}_i = -1.0417 + .8253Lnk_i$$

$$\hat{q}_i = 0.3528k_i^{0.8253}$$

3. جدول تحليل التباين ANOVA؟

$$SST = SSR + SSE$$

مصدر التغير	درجة الحرية	التباين
SSR	1	$\frac{0.4177}{1} = 0.4177$
SSE	25	$\frac{0.0557}{25} = 0.0023$
SST	26	$\frac{0.4753}{26} = 0.0182$

$$\begin{aligned} SST &= V(Lnq_i) = \sum (Lnq_i)^2 - n(\overline{Lnq})^2 \\ &= 2.205 - 27(-0.2531)^2 \\ &= 0.4753 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSR &= \hat{b}^2 V(Lnk_i) \\ &= (0.8253)^2 (0.6133) \\ &= 0.4177 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSE &= 0.4753 - 0.4177 \\ &= 0.0575 \end{aligned}$$

$$F_{cal} = \frac{SSR/1}{SSE/25} = \frac{0.4177}{0.0023} = 181.6086$$

$$F_{tab} = F_{(1,25)}^{5\%} = 4.24$$

ومنه  $F_{cal} > F_{tab}$  أي نقبل بصلاحية النموذج عند مستوى المعنوية  $\alpha = 5\%$  ، ونستطيع القيام بعملية التنبؤ.

4. قيمة الإنتاج عند  $k = 6.5$

$$\hat{q}_i = 0.3528(6.5)^{0.8253}$$

$$\hat{q}_i = 1.6536$$

تمرين 6

اليك المعطيات التالية والخاصة بمتغير اقتصادي ما.

$m \backslash p$	1	2	3	4
2014	14	20	44	21
2015	10	19	64	32
2016	12	12	68	29

المطلوب: قم بإزالة هذه المركبة الموسمية باستعمال طريقة النسب الموسمية؟

الحل

نعلم انه:

$m \backslash p$	1	2	3	4	$\bar{Y}_i$
2014	14	20	44	21	24.75
2015	10	19	64	32	31.25
2016	12	12	68	29	30.25
$\bar{Y}_j$	12	17	58.66	27.33	$\bar{\bar{Y}} = 28.75$
$S_j$	0.41	0.59	2.04	0.95	

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Y_{ij} \quad -$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p}$$

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{Y}_i \quad -$$

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_{ij} \quad -$$

$$S_j = \frac{\bar{Y}_j}{\bar{\bar{Y}}} \quad -$$

اذن السلسلة الجديدة الخالية من الفصلية هي:

$m \backslash p$	1	2	3	4	$\bar{Y}_i$
2014	34.14	33.89	21.56	22.10	24.75
2015	24.39	32.20	31.37	33.68	31.25
2016	29.26	20.33	33.33	30.52	30.25

$$Y_{ij}^a = \frac{Y_{ij}}{S_j} \quad -$$

## تمرين 7

اليك المعطيات التالية:

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8
$Y_t$	42	45	50	40	43	49	47	49

1. تمهيد السلسلة الزمنية  $Y_t$  باستعمال أسلوب المتوسطات المتحركة البسيطة علما ان:  $n = 4$ .
2. تمهيد السلسلة الزمنية  $Y_t$  باستعمال أسلوب المتوسطات المتحركة الممركزة علما ان:  $n = 3$ ، وفي الحالة الموالية:  $n = 2$ .
3. مثل بيانيا كل من بيانات السلسلة الزمنية الاصلية  $Y_t$  والسلاسل الناتجة في حالة:  $n = 2, n = 3, n = 4$ . ماذا تستنتج؟

## الحل

1. تمهيد السلسلة الزمنية  $Y_t$  باستعمال أسلوب المتوسطات المتحركة البسيطة علما ان:  $n = 4$ .

$$\tilde{Y}_t = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} Y_{t-r} = \frac{1}{4} \sum_{r=0}^3 Y_{t-r}$$

$$\tilde{Y}_4 = \frac{1}{4} (Y_4 + Y_3 + Y_2 + Y_1) = \frac{1}{4} (40 + 50 + 45 + 42) = 44.25$$

$$\tilde{Y}_5 = \frac{1}{4} (Y_5 + Y_4 + Y_3 + Y_2) = \frac{1}{4} (43 + 40 + 50 + 45) = 44.5$$

$$\tilde{Y}_6 = 45.5$$

$$\tilde{Y}_7 = 44.75$$

$$\tilde{Y}_8 = 47$$

2. تمهيد السلسلة الزمنية  $Y_t$  باستعمال أسلوب المتوسطات المتحركة الممركزة.

- حالة:  $n = 3$ ، أي فردي:

$$\tilde{Y}_t = \frac{1}{n} \sum_{r=\frac{-(n-1)}{2}}^{\frac{n-1}{2}} Y_{t-r} = \frac{1}{3} \sum_{r=-1}^{+1} Y_{t-r}$$

$$\tilde{Y}_t = \frac{1}{3} (Y_{t+1} + Y_t + Y_{t-1})$$

$$\tilde{Y}_2 = \frac{1}{3} (Y_3 + Y_2 + Y_1) = \frac{1}{3} (50 + 45 + 42) = 45.66$$

$$\tilde{Y}_3 = \frac{1}{3} (Y_4 + Y_3 + Y_2) = \frac{1}{3} (40 + 50 + 45) = 45$$

$$\tilde{Y}_4 = 43.33, \tilde{Y}_4 = 44, \tilde{Y}_5 = 64.33, \tilde{Y}_6 = 48.33$$

- الحالة الموالية:  $n = 2$ ، أي زوجي:

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_t = \frac{1}{n} \sum_{r=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} D_t Y_{t-r} = \frac{1}{4} \sum_{r=0}^3 D_t Y_{t-r}$$

حيث متغير تمثيلي Dummy Variable يأخذ:

$$D_t = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } r = \pm \frac{n}{2} \\ 1 & \text{if } r = -\frac{n}{2} \leq r \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$\tilde{Y}_t = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} Y_{t+1} + Y_t + \frac{1}{2} Y_{t-1})$$

$$\tilde{Y}_2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} Y_3 + Y_2 + \frac{1}{2} Y_1) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (50) + 45 + \frac{1}{2} (42)) = 45.2$$

$$\tilde{Y}_3 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (40) + 50 + \frac{1}{2} (45)) = 46.25$$

$$\tilde{Y}_4 = 43.25$$

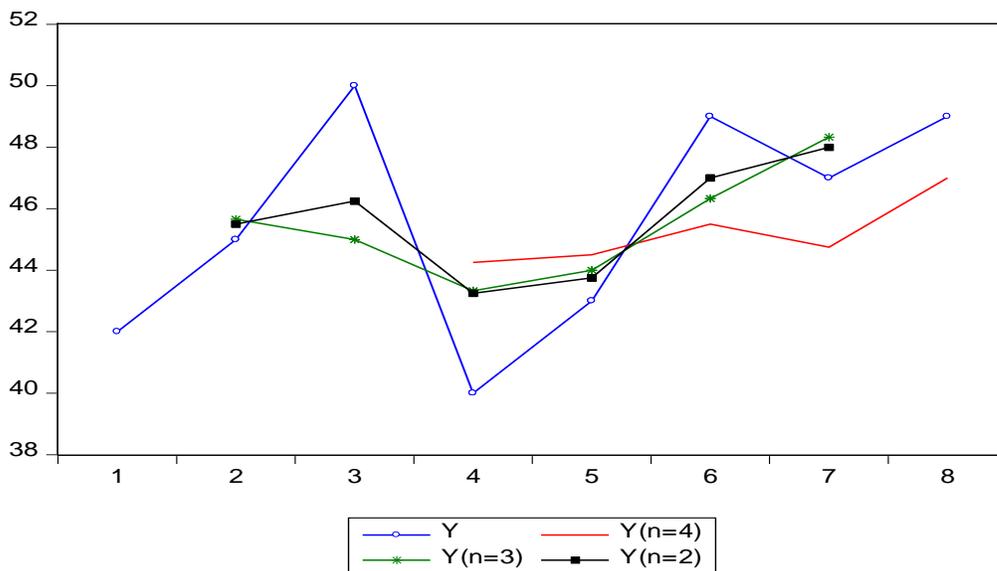
$$\tilde{Y}_5 = 43.75$$

$$\tilde{Y}_6 = 47$$

$$\tilde{Y}_7 = 48$$

3. التمثيل البياني للسلسلة الزمنية الاصلية  $Y_t$  والسلاسل الناتجة في حالة:  $n=2, n=3, n=4$ ، مع

الاستنتاج.



من خلال عملية التمهيد بواسطة الطرق الثلاثة:  $n=2, n=3, n=4$  انها عملت على تهذيب هذه السلسلة الزمنية الاصلية من خلال إزالة التقلبات، غير ان عملية التمهيد في حالتها:  $n=3, n=4$  تعتبر أفضل من الحالة:  $n=2$  لأنها فقدت مشاهدين بدلا من ثلاث مشاهدات ناقصة، اضافة الى الخصائص التي رأيناها في الجانب النظري لهذا الأسلوب.

### تمرين 8

باستعمال المعطيات الواردة في التمرين 4، قم بتحديد نوع العلاقة التي تحكم السلسلة الزمنية هذه.

### الحل

نقوم بتطبيق الطريقة البيانية او الأسلوب الانحداري للكشف عن نوع هذه العلاقة، ولأجل دوما الحرص على التطبيقات، فإننا نقوم بتطبيق الطريقة الحسابية المتمثلة في الأسلوب الانحداري. هنا يتم الاعتماد على تقدير المعادلة التالية:

$$\sigma_i = a\bar{Y}_i + b, \quad i = \overline{1, m}$$

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Y_{ij}, \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}, \quad j = \overline{1, p}$$

$(\bar{Y}_i)^2$	$\bar{Y}_i \sigma_i$	$\sigma_i$	$\bar{Y}_i$	4	3	2	1	$p$	$m$
612,5625	282,938618	11,43186337	24,75	21	44	20	14	1	1
976,5625	639,432961	20,46185475	31,25	32	64	19	10	2	2
915,0625	691,917092	22,8732923	30,25	29	68	12	12	3	3
915,0625	606,652041	20,05461294	30,25	36	60	18	7	4	4
1072,5625	812,62742	24,813051	32,75	50	64	11	6	5	5
4491,8125	3033,56813	99,63467434	149,25						

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i \bar{Y}_i - m \bar{\sigma} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^m \bar{Y}_i^2 - m \bar{Y}^2}$$

$$\hat{a} = \frac{3033.56813 - 5(29.85)(19.92)}{4491.8125 - 5(29.85)^2}$$

$$\hat{a} = 1.62$$

اذن نستنتج بان السلسلة هي من النوع الجدائي لان:  $\hat{a} > 0.10$

## تمرين 9

لدينا السلسلة  $Y_t$  في الجدول ادناه والممثلة لسعر البترول من نوع Brent ذات نطاق يومي من 2020/06/11–2020/05/25:

$t$	$Y_t$	$t$	$Y_t$
25/05/2020	33.78	05/06/2020	39.29
26/05/2020	34.18	06/06/2020	39.29
27/05/2020	32.34	07/06/2020	39.29
28/05/2020	33.76	08/06/2020	38.38
29/05/2020	35.45	09/06/2020	38.54
30/05/2020	35.45	10/06/2020	39.19
31/05/2020	35.45	11/06/2020	36.30
01/06/2020	35.72		
02/06/2020	36.98		
03/06/2020	36.80		
04/06/2020	37.42		

إذا علمت ان: معلمة التكييف (التعديل)  $\alpha = 0.95$  وقيمة الانطلاق هي:  $\tilde{Y}_1 = Y_1 = 33.78$ .

1. اكتب النموذج التنبؤي المستقبلي للفترة  $T+1$  الى الفترة  $T+L$ .

2. مثل بيانيا السلسلة الزمنية الاصلية والممهدة؟ وماذا تلاحظ؟

## الحل

1. نقوم بتمهيد السلسلة الزمنية  $Y_t$  للحصول على التنبؤات المستقبلية. لأجل هذا يمكن اخذ أحد طرق

التمهيد الآسي.

بالاستعانة بنموذج التمهيد الآسي الثنائي:

$$\tilde{Y}_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha) \tilde{Y}_{t-1}$$

$$\tilde{\tilde{Y}}_t = \alpha \tilde{Y}_t + (1 - \alpha) \tilde{\tilde{Y}}_{t-1}$$

ويتم حساب المعلمتين كمايلي:

$$b = 2\tilde{\tilde{Y}}_t - \tilde{Y}_t ,$$

$$a = \frac{\alpha}{1 - \alpha} (\tilde{\tilde{Y}}_t - \tilde{Y}_t)$$



ويتم حساب السلسلة المقدرة  $\hat{Y}_t$  كمايلي:

$$\hat{Y}_t = b + at$$

$$\hat{Y}_1 = 33.78 + 0(1) = 33.78$$

$$\hat{Y}_2 = 34.12 + 0.36(1) = 34.48$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

والنموذج التنبؤي يكون:

$$\hat{Y}_{T+L} = b + a(L)$$

$$\hat{Y}_{18+1} = b + a(1)$$

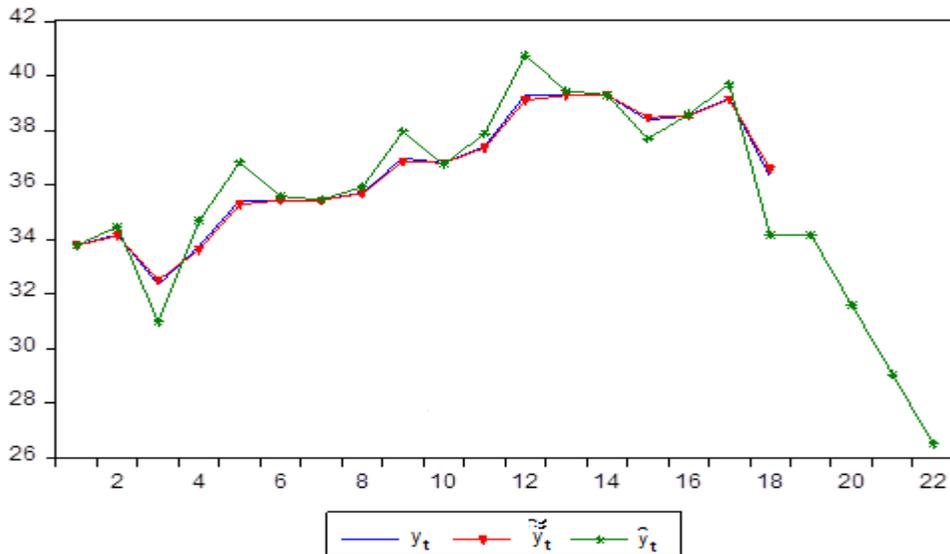
$$\hat{Y}_{18+1} = 36.71 - 2.55(1) = 34.16$$

$$\hat{Y}_{19} = 36.71 - 2.55(2) = 31.61$$

$$\hat{Y}_{20} = 36.71 - 2.55(3) = 29.06$$

$$\hat{Y}_{21} = 36.71 - 2.55(4) = 26.52$$

2. التمثيل البياني للسلسلة الزمنية الاصلية والممهدة.



نلاحظ من خلال هذا التمهيد الاسي الثنائي انه تم تقريبا إزالة الحوادث العارضة والتقلبات الحادة مما يسمح لنا اعتماد التنبؤ في مرحلة قادمة ولا بد ان يكون قصير المدى حتى لا يفقد مصداقيته.

## تمرين 10

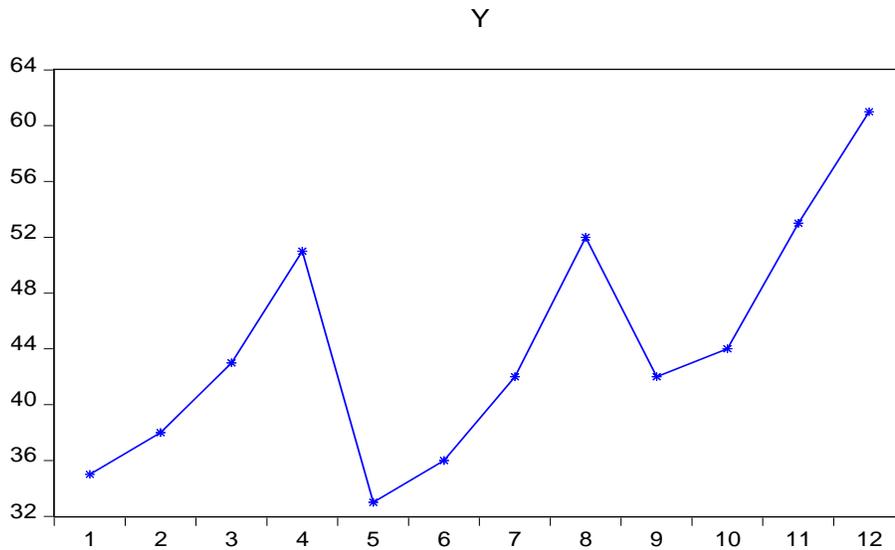
اليك المعطيات التالية حول الاستهلاك الموسمي:

$m \backslash p$	1	2	3	4
2017	35	38	43	51
2018	33	36	42	52
2019	42	44	53	61

1. مثل بيانيا معطيات هذه السلسلة الزمنية؟ وماذا تلاحظ؟
2. ازالة المركبة الفصلية مستعملا طريقة الفروقات؟
3. عبر عن هذه السلسلة الزمنية بدالة اتجاه خطي؟
4. اعطي التنبؤ للفصل الاول من السنة 2020؟

الحل

1. التمثيل البياني:



نلاحظ بانها هناك وجود مركبة فصلية تظهر في شكل قمم وبتوءات منتظمة بدور قدره  $p = 4$  ، أي وجود 4 فصول.

2. ازالة المركبة الفصلية بواسطة طريقة الفروقات:

$$\Delta^p Y_t = Y_t - Y_{t-p} = Y_t - Y_{t-4}$$

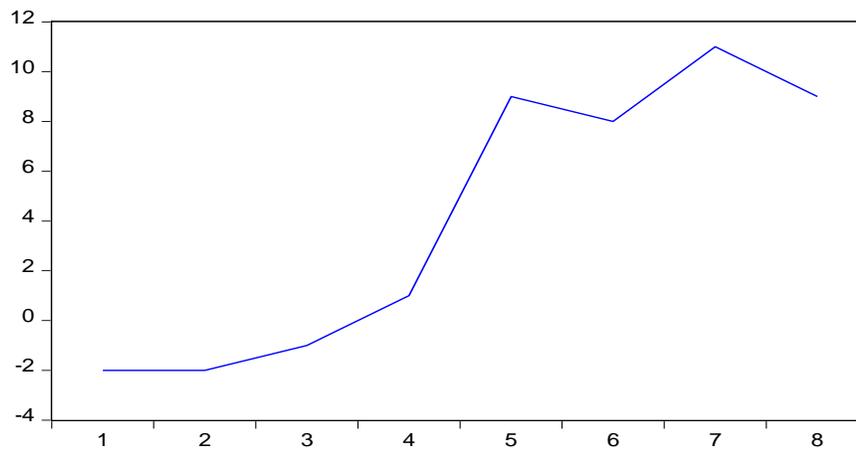
$$t = 5 \Rightarrow \Delta^4 Y_5 = Y_5 - Y_1 = 33 - 35 = -2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$t$	$Y_t$	$Y_{t-4}$	$\Delta^p Y_t$	$t'$	$(t')^2$	$\Delta^p Y_t t'$
1	35	-	-	-	-	-
2	38	-	-	-	-	-
3	43	-	-	-	-	-
4	51	-	-	-	-	-
5	33	35	-2	1	1	-2
6	36	38	-2	2	4	-4
7	42	43	-1	3	6	-3
8	52	51	1	4	16	4
9	42	33	9	5	25	45
10	44	36	8	6	36	48
11	53	42	11	7	49	77
12	61	52	9	8	64	72
-	-	-	34	36	204	237

3. التعبير عن هذه السلسلة الزمنية بدالة اتجاه خطي؟

SA



$$\Delta^p Y_t = Sa_t = b + at' + \varepsilon_t$$

$$\hat{Sa}_t = \hat{b} + \hat{a}t'$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t'}^T t' \bar{Sa} + T' \bar{t} \bar{Sa}}{\sum_{t'}^T (t')^2 + T' (\bar{t})^2} = \frac{237 - 8(34.5)(4.125)}{204 - 8(34.5)^2} = 2.1$$

$$\hat{b} = 4.125 - 2.1(4.5) = -13.78$$

$$\hat{Sa}_t = -13.78 + 2.1t'$$

4. التنبؤ للفصل الاول من السنة 2020؟

$$\hat{Sa}_{T+1} = -13.78 + 2.1(T+1)$$

$$\hat{Sa}_{12+1} = -13.78 + 2.1(13) = 13.52$$

هذه النتيجة تعتبر تنبؤ بمركبة الاتجاه العام فقط، فيحين نحتاج الى التنبؤ بالسلسلة الأصلية أي:

$$\hat{Sa}_{T+1} = \hat{Y}_{T+1} - Y_{T-p+1}$$

$$\hat{Y}_{T+1} = \hat{Sa}_{T+1} + Y_{12-4+1}$$

$$\hat{Y}_{12+1} = \hat{Sa}_{12+1} + Y_9$$

$$\hat{Y}_{12+1} = 13.52 + 42$$

$$\hat{Y}_{13} = 55.52$$

## 2. أدوات تحليل السلاسل الزمنية

### Elements of Time Series Analysis

هذا الفصل مخصص لعرض أدوات تحليل السلاسل الزمنية الذي من خلاله سوف نرى الخصائص الإحصائية للسلاسل الزمنية من ناحية الاستقرار التي نعالج فيها دالة الارتباط الذاتي للسلسلة الزمنية أين يتم معالجتها بواسطة مجموعة من اختبارات الجذر الوحدوي من خلال تقديم الاختبارات المختلفة (PP, ADF, DF.....). مع قبل هذا الاجراء، فقد خصصنا قسم للاختبارات الخطية لأجل المعرفة المسبقة لخطية السلاسل الزمنية من عدمها.

في القسم الرابع، نقدم فئات مختلفة من النماذج (ARMA, AR, MA) من خلال دراسة خصائصها، وأخيرا نعرض طريقة Box and Jenkins التي تنظم منهجية تحليل السلاسل الزمنية.

ا. الاستقرارية.

ا. اختبارات عدم الاستقرارية وجذر الوحدة.

ا. اختبارات الخطية.

ا. النماذج الخطية للسلاسل الزمنية.

ا. طريقة Box et Jenkins

## 1. الاستقرارية Stationary

الدراسات والأدلة التجريبية التي تستعمل بيانات السلاسل الزمنية، تفترض على أنه السلاسل الزمنية ان تكون مستقرة، وعليه سوف نحاول في هذا الشق تبين ما تعنيه استقراريتهما والخصائص اللازمة لذلك.

## 1. المفهوم والخصائص

قبل دراسة ومعالجة أي سلسلة زمنية، فإنه يجب دراسة خصائصها العشوائية. إذا تغيرت هذه الخصائص - أي توقعها وتباينها - بمرور الزمن، فإن هذه السلسلة الزمنية تعتبر غير مستقرة. في حالة العكس إذا كانت عملية (سيرورة) عشوائية ثابتة، فإنه تكون السلسلة الزمنية مستقرة (Bourbonnais, 2015, pp. 239-240). مثل هذه العمليات العشوائية<sup>1</sup> تعرف باسم الاستقرار الضعيف، أو الاستقرارية من الدرجة الثانية، أو عملية عشوائية بمعنى واسع Wide Sense Stationarity. تكون السيرورة العشوائية  $Y_t$  مستقرة بالمعنى الضعيف إذا كان (جوجارات، 2015، صفحة 1025):

- ثبات المتوسط الحسابي ويكون مستقل عن الزمن:

$$E(Y_t) = E(Y_{t+k}) = \mu, \forall t, \forall k$$

- التباين هو نهائي ويكون ثابت عبر الزمن:

$$V(Y_t) = E[Y_t - E(Y_t)]^2 = V(Y_{t+k}) = E[Y_{t+k} - E(Y_{t+k})]^2 = \gamma(0) = \sigma^2 < \infty, \forall t$$

- التباين المشترك (التغاير أو التغاير الذاتي) يكون ثابت عبر الزمن:

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] = \text{cov}(Y_{t+k}, Y_{t+k+s}) = \gamma(k)$$

حيث التباين المشترك عند الفجوة الزمنية  $k$  هو التباين المشترك بين القيم  $Y_t$  و  $Y_{t+k}$ . بمعنى أنه بين قيمتين  $Y$  بينهما فترة زمنية  $k$ . إذا كانت:  $k = 0$  نحصل على  $\gamma(0)$  والذي يمثل التباين  $\sigma^2$ . وإذا كانت:  $k = 1$  فإن  $\gamma(1)$  يمثل التباين المشترك بين قيمتين متجاورتين.

يبدو من هذه الخصائص أن سيرورة التشويش الأبيض<sup>2</sup>  $\varepsilon_t$  التي تكون فيها الأخطاء العشوائية  $\varepsilon_t$  مستقلة فيما بينها وتتبع التوزيع الطبيعي توقعه الصفر وتباينه  $\sigma_\varepsilon^2$ ، أي:  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  هي مستقرة. وبالتالي، تكون

<sup>1</sup> العملية العشوائية تكون تامة الاستقرارية إذا كان كل عزم التوزيع الاحتمالي ليس فقط واحد أو اثنين (المتوسط والتباين) غير متغيرين مع الزمن. إذا كانت عموماً عملية الاستقرارية تتبع التوزيع الطبيعي، فإن العملية العشوائية ذات الاستقرارية الضعيفة تكون أيضاً تامة الاستقرارية. حيث أن العملية العشوائية التابعة للتوزيع الطبيعي تكون معرفة بالكامل من خلال أول عزمين المتوسط والتباين (جوجارات، 2015، صفحة 1025).

<sup>2</sup> التشويش الأبيض هو سلسلة من المتغيرات العشوائية بنفس التوزيع ومستقلة بشكل متبادل. هذا المصطلح مستعار من الفيزياء التي تشير إلى طيف الضوء الأبيض (Bourbonnais, 2015, p. 240).

السلسلة الزمنية مستقرة إذا كانت تحقق سيرورة مستقرة. هذا يعني أن السلسلة ليس لديها أي اتجاه عام أو مركبة موسمية وبشكل عام لا يوجد عامل يتطور بمرور الزمن.

تعتبر استقرارية السلسلة الزمنية امرا مهما لأنه إذا كانت غير ذلك فإننا نستطيع دراسة سلوكها فقط في الفترة الزمنية محل الدراسة، وكنتيجة لذلك لا يمكن تعميم ما نحصل عليه من نتائج على فترات زمنية أخرى، وبالتالي فان طبيعة هذا النوع من السلاسل تكون له قيمة طبيعة صغيرة خصوصا لتحقيق اهداف التنبؤ.

قد يصعب أحيانا تحديد استقرارية السلسلة الزمنية من عدمها سواءً بالملاحظة البسيطة او حتى بالرسم البياني، حيث هنا نلجأ الى اختبار الكشف عن الاتجاه العام. وابطس المقاييس وأكثرها استعمالا هي القيام بتقسيم السلسلة الزمنية الى قسمين متساويين ثم حساب المتوسط الحسابي لكل قسم، فاذا تساوا المتوسطان او كانا قريبين من بعضهما، فنقول هنا انه لا يوجد اتجاه عام وبالتالي هي مستقرة. هناك أدوات أخرى مهمة في تحليل السلاسل الزمنية واختبار استقراريتها، هي دالة الارتباط الذاتي وأيضا اختبار الجذر الوجودي الذي يعتبر الأداة الأكثر فعالية (شيخي، 2011، الصفحات 201-202).

لنأخذ على سبيل المثال نموذج الانتقال العشوائي Random Walk والتأكد من استقراريته:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- بالنسبة الى التوقع، فان:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) = E(Y_{t-1}) = \mu$$

هذه السيرورة مستقرة بالنسبة الى المتوسط الحسابي.

- بالنسبة الى التباين، فان:

$$V(Y_t) = V(Y_{t-1}) + V(\varepsilon_t) + 2\text{cov}(Y_{t-1}, \varepsilon_t)$$

بما ان الأخطاء العشوائية لها توزيع طبيعي فان الحد الأخير من المعادلة يكون معدوم، ونحصل على:

$$V(Y_t) = V(Y_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2 = t\sigma_\varepsilon^2$$

$$V(Y_t) \neq V(Y_{t-1}) \quad \text{أي:}$$

التباين مرتبط بالزمن، وبالتالي نموذج الانتقال العشوائي هذا غير مستقر بالنسبة الى التباين وهو شرط كاف لكي ان تكون السلسلة  $Y_t$  غير مستقرة. حتى لو اضيف الحد الثابت الى نموذج الانتقال العشوائي فالسيرورة تكون غير مستقرة بالنسبة الى التوقع.

من المثير للاهتمام انه إذا كتبنا السير العشوائي بالشكل التالي:

$$(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t = \varepsilon_t$$

فانه يعطي سيرورة مستقرة، أي ان الفرق الأول للسلسلة  $Y_t$  يعتبر مستقرا. وهناك حالات يكون فيها تطبيق الفروقات على السلسلة المستقرة لا يعطي نموذجا مستقرا، وتسمى هذه الحالات بالسلاسل غير المستقرة وغير المتجانسة. اما بالنسبة الى نموذج السير العشوائي أعلاه فهو سيرورة غير مستقرة أصلا ومتجانسة من الدرجة الأولى.

إذا فشلنا في الدراسة الميدانية من خلال ما سبق ذكره، فانه يتم اللجوء الى دراسة دالة الارتباط الذاتي او اختبار الجذر الأحادي.

## 2. دالة الارتباط الذاتي البسيطة والجزئية

تعتبر دالة الارتباط الذاتي أحد الاختبارات البسيطة للاستقرارية وتعمل على قياس الارتباط بين مشاهدات السلسلة الزمنية مع نفسها عند الفجوة الزمنية المتأخرة  $k$  والتي نرمز لها بالرمز  $\rho(k)$ :

$$\rho(k) = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-k})}{\sigma_{Y_t} \sigma_{Y_{t-k}}} = \frac{\sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})^2} \sqrt{\sum_{t=k+1}^T (Y_{t-k} - \bar{Y})^2}} \quad [1]$$

مع:  $T$  يمثل حجم المشاهدات.  $\bar{Y}$  المتوسط الحسابي للسلسلة المحسوبة على فترات:  $T - k$ . يصعب التعامل مع هذه الصيغة لأنها تتطلب إعادة الحساب لكل حد  $\rho(k)$  للمتوسطات والتباينات، وهذا هو السبب في أننا نفضل استخدام دالة الارتباط الذاتي للعينة:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})^2} \quad [2]$$

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{T - k} \quad \text{حيث:}$$

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}{T}$$

تكون قيمة معامل الارتباط محصورة بين  $[-1, +1]$ . عندما لا يكون حجم المشاهدات  $T$  كبيرا بما فيه الكفاية، فإن الصيغتان [1] و [2] تعطي نتائج متقاربة جدا. ودالة الارتباط الذاتي الجزئية هي مشابهة لمفهوم الارتباط الجزئي<sup>1</sup>. قياسا على ذلك، يمكننا تحديد الارتباط الذاتي الجزئي للتأخير  $k$  كمعامل الارتباط الجزئي بين  $Y_t$  و  $Y_{t-k}$ ، أي أنه مع إزالة الارتباط بين  $Y_t$  و  $Y_{t-k}$ ، فقد تم إزالة تأثير المتغيرات الأخرى المتأخرة بـ  $k$  فترات  $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})$ .

من أجل تجنب أي غموض فيما بعد بين دالتي الارتباط الذاتي، فإننا نسمي دالة الارتباط الذاتي البسيطة، دالة الارتباط الذاتي.

### 3. اختبارات "التشويش الأبيض" والاستقرارية

لا يمكننا تحديد الخصائص العشوائية لسلسلة زمنية إلا إذا كانت مستقرة، حيث يتم إجراء دراسة الاستقرارية هذه بشكل أساسي على أساس دراسة دالتي الارتباط الذاتي أو عن طريق التمثيل البياني المسمى "مخطط الارتباط Correlogram". تكون السلسلة الزمنية مستقرة إذا لم يكن لها مركبة اتجاه عام أو موسمية. لذلك، سنحاول، بدءًا من خلال دراسة مخطط الارتباط تبيان هاتين المركبتين.

يمكن تمييز أنواع مختلفة من السلاسل المستقرة (Bourbonnais, 2015, pp. 241-242):

- مع الذاكرة، أي التي يمكننا نمذجتها بواسطة قانون الاستنساخ للسيرورة. Law of Reproduction. the Process.
- توزيع متطابق ومستقل، تسمى بالضجة البيضاء White Noise.
- بشكل طبيعي (وفقا للقانون الطبيعي) وموزع بشكل مستقل أو تسمى بالضجة البيضاء الغوسية Gaussian White Noise.

### (1) تحليل دالة الارتباط الذاتي

تكون السلسلة الزمنية  $Y_t$  مستقرة إذا كان معامل الارتباط الذاتي يساوي الصفر أو قريب منه لأي فجوة:  $0 < k$ ، أي في هذه الحالة يجب ان تنخفض الارتباطات بسرعة كلما ارتفع  $k$ . ان لم تكن السلسلة غير مستقرة، فإننا نعمل على تفريقها. أي (شيخي، 2011، صفحة 204):

$$W_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} \quad , \quad t = 2, 3, \dots, T$$

<sup>1</sup> يتحدد معامل الارتباط الجزئي على أنه حساب تأثير المتغير  $X_1$  على المتغير  $X_2$ . وهذا باستبعاد التأثيرات على المتغيرات الأخرى:  $X_3, X_4, \dots, X_k$  (Bourbonnais, 2015, p. 241).

فإذا كانت كذلك السلسلة الناتجة  $W_t$  غير مستقرة من خلال الرسم البياني ودالة الارتباط الذاتي، فإننا نعمل مرة أخرى على تفريقها، أي:

$$W_t = \Delta^2 Y_t, \quad t = 3, 4, \dots, T$$

ومنه يمكن تطبيق عامل الفروقات Differentiation Coefficient:  $d$  مرة واحدة على السلسلة المشتقة، أي:

$$W_t = \Delta^d Y_t, \quad t = d + 1, d + 2, \dots, T$$

لكن، عندما ندرس دالة الترابط الذاتي للسلسلة الزمنية، فإن السؤال الذي يطرح نفسه هو تحديد  $\rho(k)$  التي تكون معنوية تختلف عن الصفر<sup>1</sup>. اختبار الفرضية للمعامل  $\rho(k)$  يكون على النحو التالي (Bourbonnais, 2015, pp. 242-243):

$$H_0 : \rho(k) = 0$$

$$H_1 : \rho(k) \neq 0$$

يمكننا استخدام اختبار الفرضية لمعامل الارتباط، بناءً على مقارنة قيمة  $t$  لـ Student المحسوبة والمجدولة<sup>2</sup>. ومع ذلك، أثبت (Quenouille, 1949) أنه بالنسبة للعينة الكبيرة ( $T > 30$ )، فإن المعامل  $\rho(k)$  يؤول بشكل متقارب نحو القانون الطبيعي متوسطه الصفر وانحرافه المعياري:  $\frac{1}{\sqrt{T}}$ . ويعطى مجال الثقة للمعامل  $\rho(k)$  كما يلي:

$$\rho(k) = 0 \pm t^{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{T}}$$

إذا كان المعامل المحسوب  $\hat{\rho}(k)$  خارج مجال الثقة فهو يختلف عن الصفر بنسبة معنوية  $\alpha$  (بشكل عام  $\alpha = 5\%$  و  $t^{\alpha/2} = 1,96$ ). معظم البرامج، مع "مخطط الارتباط Correlogram" توفر مجال الثقة الذي يسمح بالتفسير الفوري لذلك.

## (2) إحصائية Box-Pierce وإحصائية Ljung-Box

يتيح اختبار Box-Pierce تحديد السيرورات التي هي بدون ذاكرة (سلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة فيما بينها). لذلك يجب علينا ان نحدد ان (Bourbonnais, 2015, p. 243):  $\text{cov}(Y_t, Y_{t-k}) = 0$  او مع ذلك:  $\rho(k) = 0, \forall k$

<sup>1</sup> في الواقع، على سبيل المثال، إذا لم يكن هناك معامل يختلف معنوية عن الصفر، فيمكننا أن نستنتج أن السيرورة التي تمت دراستها لا تحتوي على ذاكرة، وبالتالي فهي لا تتأثر بأي اتجاه عام أو موسمية. أو إذا كانت سلسلة زمنية شهرية ذات قيمة كبيرة لـ  $\rho(12)$  (الارتباط بين  $Y_t$  و  $Y_{t-12}$ )، فإن السلسلة التي تمت دراستها تتأثر بالتأكيد بحركة موسمية.

<sup>2</sup> إذا كانت:  $t^* > t_{h-2}^{\alpha/2}$ ، فإننا نرفض الفرضية الصفرية  $H_0$ ، أي ان معامل الارتباط الذاتي يختلف جوهريا عن الصفر. في المقابل يتم قبول الفرضية البديلة  $H_1$ .

تتضمن سيرورة تشويش ابيض على أن:  $\rho(1)=\rho(2)=\dots=\rho(h)=0$  ، ولتكن الفرضيتين:

$$H_0 : \rho(1)=\rho(2)=\dots=\rho(h)=0$$

يوجد على الأقل  $\rho(i)$  يختلف معنويا عن 0

لإجراء اختبار مشترك لمعنوية معاملات الارتباط الذاتي ككل، نستخدم إحصائية:  $Q$ -Statistic لـ (Box-Pierce):

$$Q = T \sum_{i=1}^K \hat{\rho}^2(i)$$

إحصائية:  $Q$ -Statistic تتبع بشكل متقارب توزيع  $\chi^2$  بدرجة حرية  $K$ . لذلك نرفض فرضية التشويش الابيض (فرضية العدم التي تنص على ان كل المعاملات لدالة الارتباط الذاتي مساوية الى الصفر)، عند مستوى المعنوية  $\alpha$  ، إذا كانت:  $Q > \chi^2_{(1-\alpha),K}$  ، هذا يعني ان السلسلة غير مستقرة. والعكس صحيح.

يمكننا أيضا استخدام إحصائية أخرى، تكون خصائصها المقاربة أفضل، مشتقة من الأولى وهي

إحصائية: إحصائية:  $Q'$ -Statistic لـ (Ljung and Box):

$$Q' = T(T+2) \sum_{i=1}^K \frac{\hat{\rho}^2(i)}{T-k}$$

والتي تتبع أيضا توزيع  $\chi^2$  بدرجة حرية  $K$  مع تطابق نفس القرار السابق. تعطي هذه الإحصائية نتائج أفضل من إحصائية Box-Pierce في حالة العينات الصغيرة مع كونها تصلح للعينات كبيرة الحجم (عطية، 2005، صفحة 654).

### 3) اختبارات التوزيع الطبيعي Normality Tests

لحساب فترات الثقة التنبؤية وأيضا لإجراء الاختبارات اللازمة على المعلمات، من الضروري التحقق من طبيعية الأخطاء. اختبار (Jarque & Bera, 1980) يعتمد على فكرة معامل الالتواء Skewness (عدم التماثل) والتفرطح Kurtosis (التسطيح او درجة التقوس). يتيح لنا التحقق من الحالة الطبيعية للتوزيع الإحصائي وهو يقيم الانحرافات المتزامنة لهذين المعاملين مع القيم المرجعية للتوزيع الطبيعي (Rakotomalala, 2011، pp. 24-25)، حيث:

نأخذ معاملي الالتواء والتفرطح لـ Pearson  $(\beta_1 = \mu^3/\sigma^3, \beta_2 = \mu^4/\sigma^4)$  الاختلاف الوحيد عن Fisher هو أن المعامل الثاني غير طبيعي، أي:  $\beta_2 = 3$  لأجل التوزيع الطبيعي.

إذا كان العزم الممرکز من الدرجة  $k$  للسلسلة  $Y_t$  من الشكل:  $\mu_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^k$  ، فان:

- معامل الالتواء Skewness:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{\left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{x})^3 \right]^2}{\left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{x})^2 \right]^3}$$

- معامل التفرطح Kurtosis:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - m)^4}{\left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - m)^2 \right]^2}$$

إذا كان التوزيع طبيعيا وكان عدد المشاهدات كبيرا ( $T > 30$ ) ، فان:

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \right]$$

$$\beta_1^{1/2} \rightsquigarrow \mathcal{N} \left( 0, \sqrt{\frac{6}{T}} \right)$$

$$\beta_2 \rightsquigarrow \mathcal{N} \left( 3, \sqrt{\frac{24}{T}} \right)$$

ولتكن الاحصائيتين المحسوبتين للمعاملين الالتواء  $v_1$  والتفرطح  $v_2$  على التوالي، مع مقارنتهما بالقيمة 1.96 للقانون الطبيعي عند مستوى المعنوية 5%.

$$v_1 = \frac{|\beta_1^{1/2} - 0|}{\sqrt{\frac{6}{T}}}, \quad v_2 = \frac{|\beta_2 - 3|}{\sqrt{\frac{24}{T}}}$$

- إذا تحققت الفرضيتين: (تفرطح: المشاهدات لها درجة تقوس)  $v_2 = 0$  (التواء: المشاهدات لها تناظر)

- فإن:  $H_0: v_1 = 0, v_2 \leq 1.96, v_1 \leq 1.96$ . خلاف ذلك يتم رفض الفرضيتين للقانون الطبيعي.

- نلاحظ أيضا أن التباين المشترك بين  $\beta_1$  و  $\beta_2$  هو الصفر. كما انه إذا كانت  $\beta_1^{1/2}, \beta_2$  تتبعان التوزيع

الطبيعي، فان مجموعهما يتبع توزيع  $\chi^2$  بدرجة حرية 2، حيث:

$$JB = \frac{T}{6} \beta_1 + \frac{T}{24} (\beta_2 - 3)^2 \rightsquigarrow \chi_{(1-\alpha),2}^2$$

إذا كانت:  $JB > \chi_{(1-\alpha),2}^2$  فإننا نرفض الفرضية  $H_0$  للتوزيع الطبيعي للسلسلة الزمنية بنسبة معنوية  $\alpha$ .

## 4) اختبارات تجانس التباين Homoscedasticity Tests

يجب أن تكون سيرورة التشويش الأبيض متجانسة، أي:  $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ ، وبالتالي يعني وجود تباين متساوي ان حدود الخطأ متساوية الانتشار Homoscedasticity. بشكل عام، يحدث عدم تساوي التباين في البيانات المقطعية ولا يعني هذا انه غير ممكن في نماذج السلاسل الزمنية (السواغي، 2018، صفحة 238). يمكن استخدام اختبارات للكشف عنه ومنها (Bourbonnais, 2015, pp. 244-245):

- اختبار Goldfeld-Quandt والغرض منه هو مقارنة مجموع مربعات البواقي التقدير بعد تقسيم البواقي إلى عينتين فرعيتين.
- اختبار آخر يتمثل في دراسة توزيع مربعات البواقي، حيث إن تحليل "مخطط الارتباط Correlogram" لمربعات البواقي يسمح باختبار وجود تجانس التباين. إذا كانت هناك قيم معينة لمعاملات دالة الارتباط الذاتي (اختبار Box-Pierce أو اختبار Ljung-Box) تختلف معنويًا عن الصفر، فيمكننا أن نستنتج أن هناك اختلاف في التباين أي عدم تجانس التباين Heteroscedasticity.

## II. اختبارات عدم الاستقرارية وجذر الوحدة

نذكر مرة أخرى انه إذا فشلنا في الدراسة الميدانية من خلال ما سبق ذكره للحكم على استقرارية السلسلة الزمنية، فانه يتم اللجوء الى دراسة دالة الارتباط الذاتي او اختبار الجذر الأحادي. قبل التطرق الى اختبارات الجذر الأحادي لابد من التعرف أولاً عن نوعين من النماذج غير المستقرة، النموذج Trend Stationary: TS والنموذج Difference Stationary: DS.

## 1. عدم الاستقرارية: نموذج TS ونموذج DS

نادراً ما تحقق السلاسل الزمنية الاقتصادية سيرورة عشوائية، ولأجل تحليل عدم الاستقرارية لابد من التمييز بين نوعين من النماذج (Hamisultane, 2002, pp. 3-4):

## (1) النماذج TS

النماذج TS هي نماذج غير مستقرة ولها خاصية عدم استقرارية تحديدية Deterministic وتكتب على

الشكل التالي:  $Y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$ ، حيث:  $\varepsilon_t$  يعتبر تشويش ابيض. هذا النموذج غير مستقر لان:

$$E(Y_t) = a_0 + a_1 t + E(\varepsilon_t) = a_0 + a_1 t$$

$$V(Y_t) = 0 + V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t'}) = 0, t \neq t'$$

هذا النموذج TS غير مستقر لان توقعه  $E(Y_t)$  مرتبط بالزمن، ويمكن جعله مستقرا عن طريق تقدير المعلمتين:  $\hat{a}_0, \hat{a}_1$  بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS وطرحه من  $Y_t$ ، أي:  $Y_t - \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$ . في هذا النوع من النمذجة، يكون التأثير الناتج عن صدمة ما (أو صدمات عشوائية عديدة) في اللحظة  $t$  عابرا.

## (2) النمادج DS

النمادج DS هي نماذج غير مستقرة ولها خاصية عدم استقرارية عشوائية Stochastic وتكتب على الشكل التالي:  $Y_t = Y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$ ، حيث:  $\varepsilon_t$  يعتبر تشويش ابيض و  $\beta$  هو عدد ثابت حقيقي. يمكننا جعلها مستقرة عن طريق اخذ الفروقات لها، أي:  $\Delta^d Y_t = \beta + \varepsilon_t$ ، ويمكن كتابتها بواسطة معامل التأخير  $L$ ، أي  $(1-L)^d Y_t = \beta + \varepsilon_t$ ، حيث:  $d$  هو درجة الفروقات. بوجود الحد الثابت  $\beta$  في النموذج DS يجعل من الممكن تحديد نموذجين مختلفين:

- إذا كان:  $\beta = 0$ ، يسمى النموذج DS بدون مشتقة، ويكتب بالشكل:  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$  ويسمى كذلك بنموذج الانتقال العشوائي Random Walk Mode. كثيرا ما يستخدم لتحليل كفاءة الأسواق المالية.

لدراسة خصائص هذا النموذج، نحاول كتابته في شكله الموسع:

$$Y_1 = Y_0 + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = Y_1 + \varepsilon_2 = Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

...

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

مع ان الأخطاء العشوائية  $\varepsilon_t$  هي مستقلة ومتماثلة التوزيع، فان النموذج DS بدون مشتقة هو غير مستقر لان:

$$E(Y_t) = \beta$$

$$V(Y_t) = V\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = t\sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t'}) = \sigma_\varepsilon^2, \quad t \neq t'$$

نلاحظ بان التباين  $V(Y_t)$  يعتمد على الزمن  $t$ ، حيث عندما  $t \rightarrow \infty$  فان  $V(Y_t) \rightarrow \infty$ . تعتبر هذه السيرة عشوائية.

- إذا كان:  $\beta \neq 0$ ، يسمى النموذج DS بالمشتقة، ويكتب بالشكل:  $Y_t = Y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$  ويسمى كذلك

بنموذج

$$\begin{aligned}
Y_1 &= Y_0 + \beta + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= Y_1 + \beta + \varepsilon_2 = Y_0 + \beta + \varepsilon_1 + \beta + \varepsilon_2 = Y_0 + 2\beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
&\dots \\
Y_t &= Y_0 + \beta t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

مع ان الأخطاء  $\varepsilon_t$  العشوائية هي مستقلة ومتماثلة التوزيع، فإن النموذج DS بالمشتقة هو غير مستقر لان:

$$\begin{aligned}
E(Y_t) &= Y_0 + \beta t \\
V(Y_t) &= V\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = t\sigma_\varepsilon^2 \\
\text{cov}(Y_t, Y_{t'}) &= \sigma_\varepsilon^2, \quad t \neq t'
\end{aligned}$$

نلاحظ بان التوقع  $E(Y_t)$  والتباين  $V(Y_t)$  مرتبطان بالزمن  $t$ ، حيث عندما  $t \rightarrow \infty$  فان:  $E(Y_t) \rightarrow \infty$ ,  $V(Y_t) \rightarrow \infty$ . من خلال التوقع، هذا الشكل هو نفسه نموذج TS، حيث يمكن ان ندرك بان هذه سيرورة غير مستقرة تحديدية وعشوائية في نفس الوقت.

في عمليات نوع DS، فإن الصدمة في لحظة معينة  $t$  يكون لها انعكاس غير محدودة على القيم المستقبلية للسلسلة، وبالتالي فإن تأثير الصدمة يكون دائم ويقل عبر الزمن.

## 2. اختبارات الجذر الأحادي Unit Root Tests

أشار (Granger & Newbold, 1974) على انه عند استعمال سلاسل زمنية غير مستقرة في النماذج القياسية، فانه حتما نتحصل على نتائج إحصائية خاطئة، تحت ما يسمى بالانحدار الزائف. اختبارات (Student & Fisher) تميل الى عدم رفض فرضية الارتباط بين المتغيرات المستقلة والتابعة، بينما العلاقة هي غير موجودة (Cadoret, Benjammin, Martin, & Herrard, 2009, p. 339). لا تسمح اختبارات الجذر الأحادي بالكشف عن وجود عدم استقرارية ودرجة التكامل للسلاسل الزمنية فحسب، بل أيضا تحديد عدم الاستقرارية (نموذج TS أو DS) وبالتالي الطريقة الصحيحة لجعل السلسلة الزمنية مستقرة.

### 1) اختبار Dickey and Fuller (DF) 1979

تسمح اختبارات DF بتسليط الضوء على استقرارية السلسلة الزمنية من عدمها لاتجاهها العام مع تحديد خاصيتها سواء كانت تحديدية Deterministic او عشوائية Stochastic. هناك 03 نماذج مستخدمة لبناء هذه الاختبارات. مبدأ هذا الاختبار هو بسيط، فاذا تم الاحتفاظ او القبول بالفرضية:  $H_0: \phi_1 = 1$  في هذه النماذج 03، فان السيرورة  $Y_t$  هي غير مستقرة (Bourbonnais, 2015, pp. 284-249).

$$[1] \quad Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{- نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الأولى:}$$

$$[2] \quad Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + \varepsilon_t \quad \text{- نموذج انحدار ذاتي مع الثابت:}$$

$$[3] \quad Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + bt + \varepsilon_t \quad \text{- نموذج انحدار ذاتي مع اتجاه عام:}$$

- إذا تحققت الفرضية  $H_0$ ، فإن السيرورة  $Y_t$  ليست مستقرة مهما كان النموذج الذي تم اختياره.
- في النموذج الأخير [3]، إذا قبلنا الفرضية:  $H_1: \phi_1 < 1$  وإذا كان  $b$  معنوياً يختلف عن الصفر، فإن النموذج هو من نوع TS، ويمكن ارجاعه مستقراً بواسطة الطريقة الانحدارية.
- تحت الفرضية  $H_0$ ، لا يمكن تطبيق القواعد الاعتيادية للاستدلال الإحصائي لاختبار هذه الفرضية، وعلى وجع الخصوص توزيع Student للمعلمة  $\phi_1$ . لذلك درس Dickey and Fuller التوزيع التقاربي للمقدر  $\hat{\phi}_1$  تحت باستخدام محاكاة Monte-Carlo. قاموا بجدولة القيم الحرجة للعينات ذات احجام مختلفة. هذه الجداول هي جداول مماثلة لجداول Student. اختار Dickey and Fuller اختبار القيمة:  $(\hat{\phi}_1 - 1)$  بدلا من:  $\hat{\phi}_1$  لأسباب إحصائية بحتة، وهذه ليست مشكلة للاختبار. في الواقع، النموذج:  $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$  يمكن كتابته ايضا:

$$Y_t - Y_{t-1} = \phi_1 Y_{t-1} - Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

وبالتالي فهي معادلة للاختبار كالفرضية:  $H_0: \phi_1 = 1 \text{ or } \phi_1 - 1 = 0$ .

المبادئ العامة للاختبار هي كمايلي:

- يتم تقدير المعلمة  $\hat{\phi}_1$  بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية للنماذج [1]، [2]، و [3]. وحساب قيمة

$$t_{\hat{\phi}_1} \text{ وهي مماثلة لإحصائية Student (نسبة المعلمة المقدر إلى انحرافها المعياري)، أي: } t_{\hat{\phi}_1} = \frac{\hat{\phi}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}}$$

لكن هذه الإحصائية لا تتبع هذا التوزيع، وانما لها جداول معدة خصيصا بواسطة Dickey & Fuller كما بينا سابقا.

- إذا كانت:  $t_{\hat{\phi}_1} \geq t_{tab}$ ، فإننا نقبل الفرضية  $H_0$ ، هناك جذر وحدة ( $\phi_1 = 1$ )، وبالتالي فإن السلسلة ليست مستقرة.

## (2) اختبار Augmented Dickey-Fuller (ADF) 1981

في النماذج السابقة، المستخدمة في اختبارات DF البسيطة، كانت فرضية سيوروات الأخطاء العشوائية  $\varepsilon_t$  هي ضجة بيضاء. لكن إذا اختلف هذا الشرط لسبب ما، فهنا طور Dickey and Fuller اختبارات جديدة ADF كصيغ ملائمة لمراعاة هذه الفرضية (Bourbonnais, 2015, pp. 249-250). ترتكز اختبارات ADF، على الفرضية البديلة:  $H_1: \phi_1 < 1$ ، بناء على التقدير بواسطة طريقة OLS للنماذج 03:

$$[3] \quad \Delta Y_t = \phi Y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j Y_{t-j+1} + \varepsilon_t$$

$$[4] \quad \Delta Y_t = \phi Y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j Y_{t-j+1} + c + \varepsilon_t$$

$$[5] \quad \Delta Y_t = \phi Y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j Y_{t-j+1} + c + bt + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \rightarrow i.i.d$$

الاختبار يتم بطريقة مماثلة لاختبارات DF البسيطة. يمكن تحديد قيمة  $p$  وفقاً لمعيار Akaike أو Schwarz. أو بدلاً من ذلك، يتم بدءاً من قيمة كبيرة بما فيها الكفاية لـ:  $p$ ، حيث يتم تقدير النموذج بدرجة تأخر:  $p-1$ ، ثم عند تأخير:  $p-2$ ، إلى غاية أن يصبح المعامل لـ:  $p^{ième}$  تأخر معنوي.

## (3) اختبار Phillips and Perron (PP) 1988

يأخذ اختبار PP بعين الاعتبار كلا من الارتباط الذاتي وعدم تجانس التباين للأخطاء العشوائية، ويستند إلى نفس النماذج الموجودة في اختبار DF البسيط، ولكنه يقدم تصحيحاً غير معلمي للإحصائية  $t_{\hat{\phi}}$  مما يعني أنه اختبار غير معلمي. يجري هذا الاختبار على 04 مراحل (Hamisultane, 2002, pp. 9-10):

1. التقدير بواسطة OLS النماذج الأساسية الثلاثة لاختبارات DF وحساب الإحصائيات المقترنة بها، وحساب البواقي المقدرة:  $\hat{\varepsilon}_t$ .

$$2. \text{ تقدير التباين قصير المدى: } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$$

3. تقدير المعامل المصحح  $s_t^2$  المسعى التباين طويل الأجل والمستخرج من التباينات المشتركة لبواقي

$$\text{النماذج السابقة المقدرة: } s_t^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 + 2 \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{i}{l+1}\right) \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i}$$

من اجل تقدير هذا التباين على المدى الطويل، فمن الضروري تحديد عدد من التباطؤات  $l$  (Newey-

$$l \approx 4 \left( \frac{T}{100} \right)^{2/9} \quad \text{West Truncation) المقدر بدلالة عدد المشاهدات الكلية } T, \text{ كمايلي:}$$

$$4. \text{ حساب إحصائية PP: } t_{\hat{\phi}_1}^* = s_t^2 = \sqrt{k} \times \frac{(\hat{\phi}_1 - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}} + \frac{T(k-1)\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}}{\sqrt{k}}, \text{ مع: } k = \frac{\hat{\sigma}^2}{s_t^2}, \text{ (الذي يساوي 1 - في}$$

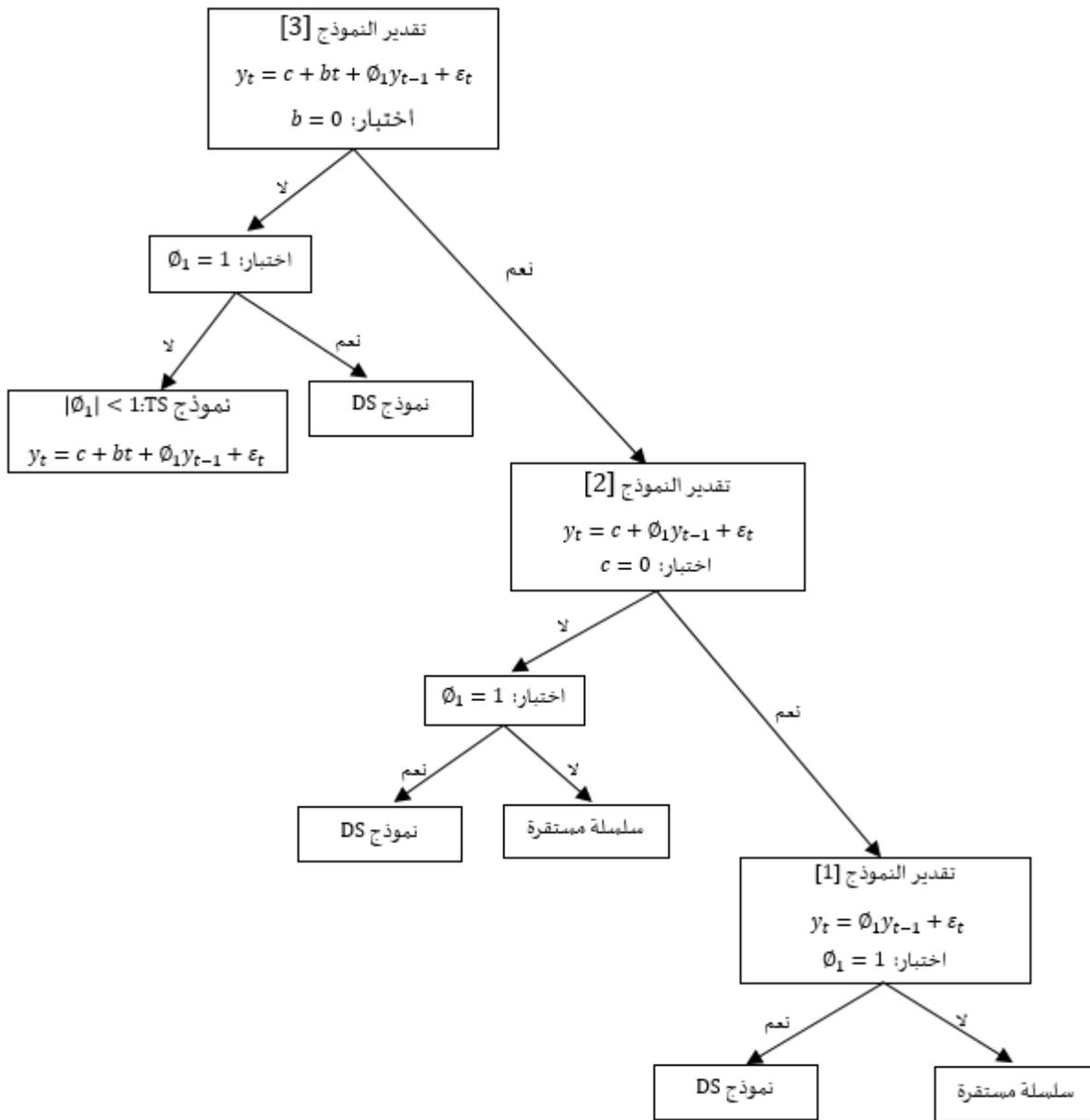
الحالة التقاربية Asymptotic - إذا كان:  $\hat{\varepsilon}_t$  ضجة بيضاء). هذه الإحصائية تقارن مع القيمة الحرجة

لجدول MacKinnon.

وضح Phillips-Perron أن هذا التصحيح غير المعلمي الذي تم إجراؤه لا يغير التوزيع التقاربي للإحصائية التي تبقى مطابقة لما هو ملاحظ في حالة اختبار Dickey-Fuller البسيط. وبالتالي، فإن القيم الحرجة المجدولة التي وضعها Dickey-Fuller تظل صالحة أيضا لاختبار Phillips-Perron.

عند اجراء اختبار جذر الوحدة، وهذا باستخدام النماذج السابقة الثلاثة، فإن النتيجة المتحصل عليها تكون غير متطابقة كسيرورة لتوليد قيم السلسلة الزمنية من البداية وبالتالي فإن الاستنتاجات التي تم التوصل إليها تكون مختلفة ويمكن أن تؤدي إلى تحولات خاطئة. هذا هو السبب في أن Dickey-Fuller، ومن بعدهم مؤلفين آخرين طوروا استراتيجيات الاختبارات. القيم الحرجة لكل من:  $t_b$  و  $t_c$  التي تسمح باختبار انعدام المعلمتين:  $c$  و  $b$  في النموذج [2] و [3] قيمها معطاة في الجدول الاحصائي 7. فيمايلي شكل 1 بياني مبسط لاستراتيجية اختبارات الجذر الأحادي (Bourbonnais, 2015, p. 251).

الشكل 1: إستراتيجية مبسطة لاختبارات جذر الوحدة



المصدر: (Bourbonnais, 2015, p. 251)

4) اختبار 1992 (KPSS)

اقترح Kwiatkowski, Phillips, Schmidt and Shin استخدام اختبار مضاعف Lagrange Multiplier

(LM) بناءً على الفرضية الصفرية، أي أن السلسلة الزمنية هي مستقرة. بعد تقدير النموذج [2] أو [3]،

نقوم بمايلي (Bourbonnais, 2015, pp. 251-252):

$$1. \text{ نحسب المجموع الجزئي للبواقي: } S_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

2. نقدر التباين طويل الأجل  $s_t^2$  مثل اختبار PP.

$$3. \text{ اذن إحصائية اختبار KPSS هي: } LM = \frac{1}{s_t^2} \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{T^2}$$

نرفض الفرضية  $H_0$  (فرضية الاستقرار) إذا كانت هذه الإحصائية المحسوبة أكبر من القيم الحرجة المستخرجة من الجدول المعد من طرف: Kwiatkowski, Phillips, Schmidt and Shin.

### (5) اختبار Elliott-Rothenberg-Stock (ERS) 1996

إن قصور الاختبارين الأساسيين: KPSS, ADF لجذر الوحدة اللذين تم تقديمهما سابقا هو قوتهما المنخفضة في انه إذا كانت سيرورة توليد قيم السلسلة الزمنية عبارة عن سيرورة  $AR(1)$  ذات معامل يقترب من 1. لتحسين قوة اختبار جذر الوحدة، اقترحوا Elliott-Rothenberg-Stock مشتقة داخلية لوحدة السلسلة الزمنية، وطوروا اختبارات النقطة المثالية الممكنة، يشار إليها باسم  $P_T^c$  و  $P_T^m$ ، والتي تأخذ في الاعتبار الارتباط التسلسلي للأخطاء. يتم استخدام النموذج التالي كسيرورة توليد بيانات للسلسلة (Pfaff, 2008, pp. 98-100)  $(Y_1, \dots, Y_T)$ :

$$Y_t = d_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = a \varepsilon_{t-1} + v_t$$

$$d_t = \beta' z_t$$

حيث:  $d_t$  هي مركبة تحديدية، أي تتضمن اتجاه ثابت أو خطي في المتجه  $z_t$  ذو البعد  $(q \times 1)$  و  $v_t$  هي سيرورة مستقرة للخطأ العشوائي بمتوسط حسابي معدوم. إذا كان:  $a = 1$  فإن  $Y_t$  تكون متكاملة من الدرجة الأولى

$I(1)$ ، وإذا كان:  $|a| < 1$  فإن السلسلة  $Y_t$  تكون مستقرة:  $I(0)$ .

يتم تعريف إحصائية النقطة المثلى الممكنة على النحو التالي:

$$\Delta Y_t^d = \alpha_0 Y_{t-1}^d + \alpha_1 \Delta Y_{t-1}^d + \dots + \alpha_p \Delta Y_{t-p}^d + \varepsilon_t$$

حيث:  $S(a = \bar{a})$  و  $S(a = 1)$  هي مجموع مربعات البواقي من انحدار  $Y_a$  على  $Z_a$  بواسطة طريقة المربعات الصغرى OLS، مع:

$$Y_a = (Y_1, Y_2 - aY_1, \dots, Y_T - aY_{T-1})$$

$$Z_a = (Z_1, Z_2 - aZ_1, \dots, Z_T - aZ_{T-1})$$

حيث:  $Y_a$  هو متجه عمود ذو ابعاد  $T$  و  $z_a$ : مصفوفة ذات البعد  $(T \times q)$ . ومقدر التباين لأجل سيرورة الخطأ:  $v_t$  هو:

$$\hat{\omega} = \frac{\hat{\sigma}_v^2}{\left(1 - \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i\right)^2}$$

حيث:  $\hat{\sigma}_v^2$  و  $\hat{\alpha}_i$  لـ  $p \dots 1$  متحصل عليهما بواسطة انحدرا المربعات الصغرى OLS:

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Delta Y_{t-p} + \alpha_{p+1} + v_t$$

وأخيرا، يتم تعيين العدد  $\bar{a}$ :  $\bar{a} = 1 + \bar{c} / T$ ، حيث:  $\bar{c}$  تشير إلى الثابت. بناءً على المركبة التحديدية في  $z_t$ ، يتم ضبط  $\bar{c}$  إما على القيمة: -7 في حالة الثابت أو -13.5 في حالة الاتجاه الخطي. تم اشتقاق هذه القيم من دوال القوى التقريبية ويتم استخراج القيم الحرجة لاختبارات  $P_T^r$  و  $P_T^d$ ، من الجدول 1 لـ (Elliott-Rothenberg-Stock, 1996). بعد ذلك، يقترح هؤلاء اختبار من نوع ADF معدل، وهو إحصائية  $t$  لأجل اختبار:  $\alpha_0 = 0$  في الانحدار المتجانس:

$$\Delta Y_t^d = \alpha_0 Y_{t-1}^d + \alpha_1 \Delta y_{t-1}^d + \dots + \alpha_p \Delta Y_{t-p}^d + \varepsilon_t$$

حيث:  $Y_t^d$  تمثل بواقي الانحدار انطلاقاً من:  $Y_t - \hat{\beta}' z_t$ . عندما لا يكون هناك ثابت، يمكن تطبيق القيم الحرجة لاختبارات  $t$  النموذجية لنوع DF. في الحالات الأخرى، يتم توفير القيم الحرجة من الجدول 1 لـ (Elliott-Rothenberg-Stock, 1996).

## 6 اختبار Ng and Perron (NP) 2001

يستخدم اختبار NP إجراء تقييد المربعات الصغرى المعممة GLS لاختبار ERS لأجل انشاء إصدارات فعالة من اختبارات PP المعدلة لـ Ng and Perron. اختبارات PP المعدلة الفعالة لا تظهر تشوهات شديدة الحجم في اختبارات PP للأخطاء العشوائية ذات المتوسط المتحرك السلبي الكبير MA أو جذور الانحدار الذاتي ويمكن أن يكون لها قوة أعلى بكثير من اختبارات PP خاصة عندما تكون المعلمة  $\phi$  قريبة من الوحدة. يستخدم Ng أربع اختبارات إحصائية تركز على بيانات GLS المقيدة  $Y_t^d$ . هذه الاختبارات هي أشكال معدلة من إحصائيات Phillips-Perron:  $Z_\alpha$  و  $Z_t$ ، وإحصائية:  $R_1$  لـ (Bhargava, 1986)، وإحصائية النقطة المثالية ERS Point Optimal. أولاً، نحدد (Zivot & Wang, 2007, pp. 134-135):

$$k = \frac{\sum_{t=2}^T (Y_{t-1}^d)^2}{T^2}$$

بعد ذلك، يمكن كتابة الإحصائيات المعدلة على النحو التالي:

$$MZ_t^d, MZ_\alpha^d = \frac{\left(T^{-1}(Y_T^d)^2 - \hat{\lambda}^2\right)}{2k}$$

$$MZ_t^d = MZ_\alpha^d \times MSB$$

$$MSB^d = \left(\frac{k}{\hat{\lambda}^2}\right)^{1/2}$$

$$MP_T^d = \begin{cases} \frac{\bar{c}^2 k - \bar{c} T^{-1} (Y_T^d)^2}{\hat{\lambda}^2} & \text{if } z_t = \{1\} \\ \frac{\bar{c}^2 k + (1 - \bar{c}) T^{-1} (Y_T^d)^2}{\hat{\lambda}^2} & \text{if } z_t = \{1, t\} \end{cases}$$

$$\text{Where: } \bar{c} = \begin{cases} -7 & \text{if } z_t = \{1\} \\ -13.5 & \text{if } z_t = \{1, t\} \end{cases}$$

- الإحصائيتان:  $MZ_t^d, MZ_\alpha^d$  هما إصداران فعالان من اختبار Phillips-Perron لـ  $Z_t$  و  $Z_\alpha$  التي لديها تشوهات حجم أصغر بكثير في وجود للأخطاء العشوائية ذات المتوسط المتحرك السليبي.
- اختبار NP يشتق التوزيعات التقاربية لهذه الإحصاءات تحت الفرضية البديلة:  $\phi = 1 - c/T$  بناءً على المركبة التحديدية في  $z_t$ ، حيث تأخذ:  $z_t = \{1\}$  في حالة الثابت،  $z_t = \{1, t\}$  في حالة الاتجاه الخطي. على وجه الخصوص، أظهرنا أن التوزيع التقاربي لـ  $MZ_t^d$  هو نفسه اختبار DF-GLS.
- بالنسبة إلى:  $\lambda^2$  يؤكد NP على أن تقدير التباين طويل المدى  $\lambda^2$  له آثار مهمة على سلوك العينة المحدودة لاختبار النقطة المثالية ERS واختبارات PP المعدلة الفعالة. ويصران على ضرورة استخدام تقدير الانحدار الذاتي لـ  $\lambda^2$  لبلوغ أو الحصول على حجم العينة النهائي المستقر. يوصيان أيضا بتقدير  $\lambda^2$  انطلاقا من انحدار اختبار ADF للمعادلة:

$$\Delta Y_t^d = \alpha_0 Y_{t-1}^d + \alpha_1 \Delta Y_{t-1}^d + \dots + \alpha_p \Delta Y_{t-p}^d + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t^d = \alpha_0 Y_{t-1}^d + \sum_{j=1}^p \alpha_j \Delta Y_{t-j}^d + \varepsilon_t$$

$$\hat{\lambda}_{AR}^2 = \frac{\hat{\sigma}_p^2}{(1 - \alpha(1))^2} \text{ : وهذا استنادا إلى البيانات المقيدة GLS:}$$

حيث:  $\alpha(1) = \sum_{j=1}^p \alpha_j$  و  $\hat{\sigma}_p^2 = (T-p)^{-1} \sum_{t=p+1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$  يتم الحصول عليها من المعادلة السابقة عن طريق

تقدير المربعات الصغرى الاعتيادية OLS.

## 7) اختبارات جذر الوحدة بنقطة تغير هيكلية Unit Root with Break Point

لقد أكد (Perron, 1989) على انه هناك نقاط تحول هيكلية في السلاسل الزمنية وان تجاهلها يمكن ان يؤدي الى نتائج خاطئة حول فرضية رفض او قبول الجذر الأحادي، حيث ان الاختبارات السابقة لاتأخذ بعين الاعتبار هذا التغير الهيكلية. وعليه اقترح (Perron, 1989) اختبار جذر الوحدة بكسر هيكلية بثلاثة نماذج بديلة (Glynn, Perera, & Verma, 2007, pp. 76-69):

- نموذج الكسر (أي التحول في الثابت).

- نموذج اتجاه خطي "متغير النمو"، الذي يسمح بكسر ميل الاتجاه (أو معدل النمو).

- نموذج يتيح حدوث كلا التأثيرين في وقت واحد، أي التغير مرة واحدة في كل من الثابت وميل السلسلة.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 DU_t + d(DTB)_t + \beta t + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \alpha_0 + \gamma DT_t^* + \beta t + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 DU_t + d(DTB)_t + \gamma DT_t + \beta t + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث  $DU_t$  ثابت تمثيلية يمثل التغير او التحول في الثابت:  $DU_t = 1$  إذا كان:  $t > TB$  ويساوي الصفر خلاف ذلك. والميل التمثيلية:  $DT_t$  يمثل التحول في ميل الاتجاه الخطي:  $DT_t^* = t - TB$  او  $DT_t^* = t$  إذا كان:  $t > TB$  ويساوي الصفر خلاف ذلك. الكسر التمثيلية:  $DTB = 1$  إذا كان:  $t = TB + 1$  ويساوي الصفر خلاف ذلك، و  $TB$  هو تاريخ التحول الهيكلية.

يحتوي كل نموذج من النماذج الثلاثة على جذر وحدة مع نقطة تغير هيكلية تحت الفرضية الصفرية  $H_0$ ، حيث يتم دمج المتغيرات الوهمية في الانحدار تحت الفرضية الصفرية  $H_0$ . اما الفرضية البديلة هي سيرورة مستقرة للاتجاه العام المكسور.

مع ذلك تم انتقاد نموذج (Perron, 1989) ولا سيما من قبل (Christiano, 1992) على انه "استخراج البيانات"، يجادل بأن الإجراءات القائمة على البيانات، تستخدم عادة لتحديد الموقع الأكثر احتمالاً للكسر وأن هذه المنهجية تلغي نظرية التوزيع الكامنة في الاختبارات التقليدية. منذ ذلك الحين، تطورت العديد من الدراسات باستخدام منهجيات مختلفة لتحديد وقت الكسر الهيكلية بشكل داخلي. بعض هذه الدراسات تشمل نموذج (Zivot & Andrews, 1992)، حيث اقترحا بانه هناك تباين في اختبار Perron الأصلي الذي يفترض فيه أن الوقت المحدد لنقطة الكسر غير معروفة. بدلا من ذلك، يتم استخدام خوارزمية تعتمد

على البيانات كوكيل لإجراء Perron لتحديد نقاط الفصل الهيكلية. بعد توصيف النماذج الثلاث السابقة لـ Perron لشكل التحول الهيكلية، عمل Zivot & Andrews على تطوير ثلاث نماذج لاختبار جذر الوحدة (Waheed, Alam, & Ghauri, 2006, pp. 5-6):

- نموذج يسمح بالتغير مرة واحدة في الثابت (أي التحول في الثابت).
  - نموذج يسمح بالتغير مرة واحدة في ميل اتجاه الدالة.
  - نموذج الذي يجمع بين التغيرات لمرة واحدة في الثابت وميل الاتجاه في السلسلة.
- من ثم، لاختبار جذر الوحدة مقابل بديل الكسر الهيكلية لمرة واحدة، يستخدم Zivot & Andrews معادلات الانحدار التالية المقابلة للنماذج الثلاثة المذكورة أعلاه:

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \rho Y_{t-1} + \beta t + \alpha_1 DU_t + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \rho Y_{t-1} + \beta t + \gamma DT_t + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \rho Y_{t-1} + \beta t + \alpha_1 DU_t + \gamma DT_t + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\phi(B) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \Delta(B) \frac{1 - \delta_k(B)}{\delta_k(B)} + \Delta(B) \phi^*(1 - B^S)$$

- حيث  $DU_t$  متغير تمثيلي لمؤشر تحول متوسط يحدث في كل تاريخ كسر ممكن (تاريخ التحول الهيكلية)  $TB$ ، بينما  $DT_t$  يمثل متغير تحول الاتجاه العام. رسمياً يكون لدينا:  $DU_t = 1$  إذا كان:  $t > TB$  ويساوي الصفر خلاف ذلك. و  $DT_t = t - TB$  إذا كان:  $t > TB$  ويساوي الصفر خلاف ذلك.
- الفرضية الصفرية  $H_0$  في جميع النماذج الثلاثة هي:  $\rho = 0$ ، مما يعني أن السلسلة  $Y_t$  تحتوي على جذر وحدة مع انحراف يستبعد أي فاصل هيكلية، بينما تشير الفرضية البديلة  $H_1: \rho < 0$  إلى أن السلسلة هي سيرورة مستقرة الاتجاه مع حدوث فاصل هيكلية لمرة واحدة يحدث في نقطة زمنية غير معروفة. تعتبر طريقة Zivot & Andrews كل نقطة بمثابة تاريخ كسر  $TB$  محتمل وتجري انحداراً لكل تاريخ كسر ممكن بالتعاقب.

- من بين جميع نقاط الكسر الهيكلية المحتملة  $TB$ ، فإن الإجراء يتم بتحديد اختيار تاريخ الكسر  $TB$  الذي يدني من إحصائية  $t$  (t-Statistic) أحادية الجانب لأجل اختبار  $\hat{\rho} (= \rho - 1) = 1$ . وفقاً لـ Zivot & Andrews، فإن وجود نقاط النهاية يتسبب في تباعد التوزيع التقاربي للإحصائيات نحو اللانهاية.

لذلك، يجب اختيار بعض المناطق بحيث لا تتضمن نقاط النهاية للعينة. يقترح Zivot & Andrews تحديد "منطقة القطع" على أنها  $(0.15T, 0.85T)$ ، والتي نتبعها. فيما بعد، قام (Lumsdaine, & Papell, 1997) بتوسيع إطار Zivot & Andrews من خلال دمج فواصل (نقاط تحول) هيكلية داخلية في النموذج. وذلك لأن السماح بفترتين هيكليتين محتملتين أقوى من السماح بفواصل هيكلية واحدة. يمكن التعبير عن تعديل النماذج السابقة كما يلي (Ling, Nor, Saud, & Ahmad, 2013, p. 232):

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \rho Y_{t-1} + \beta t + \alpha_1 DU1_t + \alpha_2 DU2_t + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \rho Y_{t-1} + \beta t + \alpha_1 DU1_t + \gamma DT_t^* + \alpha_2 DU2_t + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \rho Y_{t-1} + \beta t + \alpha_1 DU1_t + \gamma_1 DT1_t + \alpha_2 DU2_t + \gamma_2 DT2_t + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث:

- $DU1_t = 1$  إذا كان:  $t > TB_1$  ويساوي 0 خلاف ذلك.
- $DU2_t = 1$  إذا كان:  $t > TB_2$  ويساوي 0 خلاف ذلك.
- $DT1_t = 1$  إذا كان:  $t > TB_1$  ويساوي 0 خلاف ذلك.
- $DT2_t = 1$  إذا كان:  $t > TB_2$  ويساوي 0 خلاف ذلك.

$DU1_t$  و  $DU2_t$  هما متغيران وهميان يسمحان بالتغيرات الهيكلية في الثابت عند  $TB_1$  و  $TB_2$  على التوالي. فيحين أن:  $DT1_t$  و  $DT2_t$  هما متغيران وهميان تأخذان التحولات في متغير الاتجاه العام عند  $TB_1$  و  $TB_2$  على التوالي. يسمح النموذج الأول بفواصلين هيكليين في الثابت، بينما يسمح النموذج الثالث بفواصلين هيكليين في الثابت والميل. يسمح النموذج الثاني بالفواصل الأولى في كل من الثوابت والفواصل الهيكلية الثاني في الميل فقط.

- يتم تحديد تواريخ الفاصل المحتملة،  $TB_1$  و  $TB_2$  بناءً على الحد الأدنى لقيمة إحصائية  $t$  (t-Statistic).
- قام Lumsdaine & Papell بفحص بيانات Nelson-Plosser وتم رفض عدم جذر الوحدة لسبعة من أصل 13 سلسلة ماكرو-اقتصادية عند مستوى المعنوية 5% وسلسلتين إضافيتين ماكرو-اقتصادية عند مستوى المعنوية 10%. باختصار، وجدا أدلة أكثر في رفض فرضية جذر الوحدة من Zivot & Andrews، ولكن أدلة أقل من Perron.

## 8) اختبارات جذر الوحدة الموسمي Seasonal Unit Root

تعتبر وجود الحركات الموسمية من الخصائص الرئيسية للعديد من السلاسل الزمنية الاقتصادية. الأنواع الرئيسية الأخرى للحركات هي الاتجاه والدورة وغير المنتظمة. بالنسبة الى (Hylleberg, Modelling Seasonality, 1992)، فإن "الموسمية هي الحركة المنتظمة، وإن لم تكن بالضرورة منتظمة، خلال اليوم بسبب التغيرات في الطقس، والتقويم، وتوقيت القرارات، بشكل مباشر أو غير مباشر من خلال قرارات الإنتاج والاستهلاك التي يتخذها اعوان الاقتصاد". يظهر جزء مهم في هذا التعريف مفاده أن التقلبات الموسمية يمكن أن تكون تحديدية Deterministic بسبب، على سبيل المثال، التقويم وتأثيرات الطقس، ولكن قد تكون ناجمة أيضا عن سلوك العوامل الاقتصادية وبالتالي قد لا تكون ثابتة. من الناحية التاريخية، تم اعتبار التقلبات الموسمية مصدر إزعاج يحجب المكونات الأكثر أهمية، أي الاتجاه والنمو والمكونات الدورية. وبالتالي، تم تنفيذ إجراءات التعديل الموسمي لإزالة المركبة الموسمية، غير انه في الآونة الأخيرة، ظهرت وجهة نظر جديدة، تظهر أن التقلبات الموسمية ليست بالضرورة مصدر إزعاج. إنها جزء لا يتجزأ من البيانات الاقتصادية ولا ينبغي تجاهلها أو حجها في التحليل الاقتصادي. لذلك، تعتبر دراسة السلوك الموسمي في السلسلة مهم لتقييم النموذج والتنبؤ (Darné & Diebolt, 2002, p. 305). لذلك، اقترح (Hylleberg, Engle, Granger, & Yoo, 1990) اختبار جذور الوحدات غير الموسمية والموسمية بشكل منفصل. يحدد هذا الاختبار مرشح التفاضل المناسب لجعل السلسلة الزمنية مستقرة. نقدم إجراء اختبار جذر الوحدة الموسمية لتحديد طبيعة الموسمية (تحديدية أو عشوائية).

باستخدام نموذج Dickey-Fuller، طور (Hylleberg, Engle, Granger, & Yoo, 1990) اختبار لجذور الوحدة غير الموسمية والموسمية بشكل منفصل. نعتبر السلسلة  $Y_t$  التي تم إنشاؤها بواسطة سيرورة الانحدار الذاتي:  $\phi(B)Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ . من أجل الكشف عن جذور الوحدة عند التكرارات الصفرية والموسمية، وعليه يجب علينا إعادة كتابة كثيرات الحدود الذاتية وفقا لاقتراح (Hylleberg, Engle, Granger, & Yoo, 1990):

$$\phi(B) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \Delta(B) \frac{1 - \delta_k(B)}{\delta_k(B)} + \Delta(B) \phi^*(B) \quad [1]$$

مع:

$$\delta_k(B) = 1 - (1/\theta_k)B$$

$$\Delta(B) = \prod_{k=1}^p \delta_k(B)$$

$$\lambda_k = \phi(\theta_k) / \prod_{j=k} \delta_j(\theta_k)$$

$\phi(B)$  هو الباقي من الجذور خارج دائرة الوحدة. و  $\theta_k$  هي جذور الوحدة من كثير الحدود  $(1-B^S)$ ، والتي يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$(1-B^S) = (1-B) \left( 1 + \sum_{i=1}^{S-1} B^i \right) = (1-B) \prod_{k=1}^{[S/2]} (1 - e^{\pm i 2k\pi/S} B)$$

لتوضيح هذه الطريقة، نقوم بدراسة حالة البيانات الفصلية ( $S = 4$ ). نقوم بتوسيع كثير الحدود  $\phi(B)$  حول الجذور 1، -1،  $i$  و  $-i$  ويعبر عن المعادلة [2] كمايلي:

$$\phi(B) = \lambda_1 B(1+B)(1+B^2) + \lambda_2 (-B)(1-B)(1+B^2) + \lambda_3 (-iB)(1-iB)(1-B^2) + \lambda_4 (iB)(1+iB)(1-B^2) + (1-B^4) \phi^*(B) \quad [2]$$

لجعل التقدير ممكنا، نعوض:

$$\pi_1 = -\lambda_1$$

$$\pi_2 = -\lambda_2$$

$$\lambda_3 = (-\pi_3 + i\pi_4) / 2$$

$$\lambda_4 = (-\pi_3 - i\pi_4) / 2$$

أخيرا، نعوض المعادلة [2] في معادلة الانحدار الذاتي:  $\phi(B)Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ ، ونتحصل على الانحدار الإضافي:

$$\phi^*(B) = 1Y_t = \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-2} + \pi_4 Y_{3,t-1} + \mu_t + \varepsilon_t \quad [3]$$

حيث:

$$Y_{1,t} = (1 + B + B^2 + B^3)Y_t = \left( 1 + \sum_{j=1}^3 B^j \right) Y_t$$

$$Y_{2,t} = -(1 - B + B^2 - B^3)Y_t$$

$$Y_{3,t} = -(1 - B^2)Y_t$$

$$Y_{4,t} = (1 - B^4)Y_t$$

تحافظ السلسلة  $Y_{1,t}$  على جذر الوحدة بتكرار صفري وتزيل جذور الوحدة الموسمية، بينما تحافظ السلسلة  $Y_{2,t}$  على جذر الوحدة بتردد نصف سنوي (الجذر -1) وتزيل الجذور عند التكرارات الصفيرية والسنوية (الجذور 1 و  $i$  و  $-i$ ). من ناحية أخرى، تحافظ السلسلة  $Y_{3,t}$  على الجذور المترافقة المركبة (الجذور  $i$  و  $-i$ ) وتزيل الجذور عند التكرارات الأخرى.

لتطبيق اختبارات جذر الوحدة الموسمية، يمكن تقدير المعادلة [3] بواسطة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS، واستراتيجية الاختبار هي كمايلي:

- للتكرار الصفري، يستخدم اختبار  $t$  أحادي الجانب لاختبار الفرضية:  $H_0: \pi_1 = 0$  مقابل الفرضية البديلة:  $H_1: \pi_1 < 0$ . إذا كان:  $t_1 > t_{1, tabulated}$ ، فإنه لا يتم رفض الفرضية  $H_0$  ويكون لدينا جذر وحدة تكرار صفري.

- للتكرار  $\pi$ ، نستخدم أيضا اختبار  $t$  أحادي الجانب لاختبار الفرضية:  $H_0: \pi_2 = 0$  مقابل الفرضية البديلة:  $H_1: \pi_2 < 0$ . إذا كان:  $t_2 > t_{2, tabulated}$ ، فإنه لا يتم رفض الفرضية  $H_0$  ويكون لدينا جذر وحدة عند التكرار النصف سنوي  $\pi$ .

- للتكرار الموسمي المترافق، نستخدم إحصائية  $F$  لاختبار الفرضية:  $H_0: \pi_3 = \pi_4 = 0$  مقابل الفرضية البديلة:  $H_1: \pi_3 \neq \pi_4 \neq 0$ . إذا كان:  $t_{34} < t_{34, tabulated}$ ، فإنه لا يتم رفض الفرضية  $H_0$  ويكون لدينا جذر وحدة عند التكرار السنوي  $\frac{\pi}{2}$ .

- اقترح (Ghysels, Lee, & Noh, 1994) إحصائيات  $F$  مماثلة لتلك (Dickey, Hasza, & Fuller, 1984) التي تجعل من الممكن اختبار جذور الوحدة في جميع التكرارات في وقت واحد مع أو بدون تكرار صفري (ترمز بـ  $F_{1...4}$  و  $F_{2...4}$  على التوالي).

بشكل عام، يتم تقدير إجراء الاختبار هذا مع  $\phi^*(B) = 1$ . ومع ذلك، كما هو موضح من قبل Beaulieu (1993) و Miron، يجب علينا دمج بعض المتغيرات التابعة المتأخرة (أي تفاضلات الترتيب الرابع المتأخرة للبيانات ربع السنوية) في الانحدار المساعد لجعل البواقي ذات تشويش ابيض. ومع ذلك، تعتمد قوة وحجم الاختبار على زيادة  $\phi^*(B) = 1$ ، حيث يؤثر عدد كبير من التأخيرات سلبا على قوة الاختبار ويؤدي انخفاض عدد التأخيرات إلى زيادة الحجم إلى مستوى المعنوية، حيث يمكن تطبيق معايير المعلومات، مثل معيار  $AIC$  أو  $BIC$  (Darné & Diebolt, 2002, pp. 307-309).

## III. اختبارات الخطية

قبل التعرض الى النماذج الخطية للسلاسل الزمنية، فلا بد من المعرفة المسبقة لخطيتها من عدمها، وعليه يمكن أن يؤدي الفشل في التعرف على وجود اللاخطية والتعامل معها في آلية توليد سلسلة زمنية وبالتالي تقديرات معلمات خاطئة السلوك ونماذج تفتقد الى الاستقلالية التسلسلية المهمة، وعليه من الضروري المعرفة المسبقة للخطية من عدمها للسلسلة الزمنية حتى يسهل التعامل معها والتوصل الى نتائج صحيحة.

بشكل عام، لاختبار الخطية (غير الخطية)، فإن نظام الفرضيات هو:

$H_0$ : السلسلة الزمنية خطية

$H_1$ : السلسلة الزمنية غير خطية

في بعض الأحيان، تكون عملية توليد البيانات The Data Generation Process تحت الفرضية البديلة  $H_1$  بشكل محدد مسبقا، وفي هذه الحالة فإن اختبار اللاخطية هو في الواقع اختبار لميزة غير خطية محددة. في بعض الحالات الأخرى، لا تزال معالجة توليد البيانات بموجب الفرضية البديلة  $H_1$  بشكل عام نسبيا، ومشكلة اختبار الفرضيات هي أيضا عامة (Bisaglia & Gerolimetto, 2014, p. 7). ومن الاختبارات التي تكشف عن الخطية سوف نحاول التعرض الى اهمها والتي منها:

## 1. اختبار McLeod and Li (ML) 1983

اقترح (McLeod & Li, 1983) إحصائية من نوع اختبار Portmanteau، استنادا إلى دالة الارتباط الذاتي لمربعات البواقي التي يتم الحصول عليها من نموذج  $ARMA^1$  الملائم. فكرة هذا الاختبار هي تطبيق إحصاءات Ljung-Box على مربعات البواقي لنموذج:  $ARMA(p, q)$  للتحقق من عدم صلاحية النموذج. وبالتالي، فإن الفرضية  $H_0$ : هي  $ARMA(p, q)$  وإحصائية الاختبار هي (Bisaglia & Gerolimetto, 2014, pp. 7-8):

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{\rho}_i^2(v_i^2)}{T-i}$$

حيث  $T$  هو حجم العينة،  $m$  هو عدد تم اختياره بشكل صحيح (مناسب) من الارتباطات الذاتية المستخدمة في الاختبار،  $v_i$  تشير الى سلاسل البواقي،  $\hat{\rho}_i^2(v_i^2)$ : التأخر  $i$ : Lag-i لدالة الارتباط الذاتي ACF لـ  $v_i^2$ . تحت الفرضية الصفرية  $H_0$ .

<sup>1</sup> نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة Autoregressive Moving Average Model.

$$Q(m) \sim \chi_{m-p-q}^2$$

حيث تأخذ  $m$  عادة حوالي 20. الدافع لاستخدام القيم المربعة للبيانات للكشف عن اللاخطية هو من خلال نتيجة متأصلة (جوهريّة) في عمل (Granger & Newbold, 1976). لقد أظهرنا أنه بالنسبة لسلسلة  $Y_t$  هو أمر طبيعي (وبالتالي خطية).

$$\rho_k(Y_t^2) = (\rho_k(Y_t))^2$$

وبالتالي، فإن أي خروج عن هذه النتيجة يفترض أن يشير إلى درجة من اللاخطية، كما أشار (Granger & Andersen, 1978)

إحصائيات  $Q$ -Statistic مساعدة أيضا في الكشف عن عدم تجانس التباين المشروط Conditional Heteroscedasticity لسلاسل (نتائج) البواقي  $\varepsilon_t$  وهي معادلة بشكل تقاربي لإحصائية اختبار Lagrange Multiplier (LM) (Engle, 1982) لنماذج ARCH<sup>1</sup>. تحت هذه الحالة، فإن الفرضية  $H_0$  لهذه الإحصائية هي:

$$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$$

حيث  $\beta_i$  هو معامل  $\varepsilon_{t-i}^2$  في الانحدار الخطي:

$$\varepsilon_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_m \varepsilon_{t-m}^2 + v_t, \quad t = m+1, \dots, T$$

كما هو موضح بواسطة (Davies & Petrucci, 1986) عبر المحاكاة، فإن إحصائيات  $Q$ -Statistic تتمتع بقوة أعلى عندما يتم تعميم السلاسل الزمنية بالفعل بواسطة نموذج ARCH، فيحين أنه قد ينتج عنه عدم فعالية كبيرة فيما يتعلق بالهياكل الأخرى.

## 2. اختبار Brock, Dechert and Scheinkman (BDS) 1987

اختبار (Brock, Dechert, & Scheinkman, 1987)، الذي تم تطويره ضمن نظرية الفوضى، هو أحد الاختبارات الأكثر شيوعا للاخطية. إنه اختبار غير معلمي تم تصميمه في الأصل لاختبار الاستقلالية وتمائل التوزيع (i.i.d) Independence and Identical Distribution، ولكن ثبت أنه يمتلك أيضا قوة مقابل دالة Gamma<sup>2</sup> الكبيرة للبدائل الخطية وغير الخطية. علاوة على ذلك، يمكن استخدامه كاختبار Portmanteau أو اختبار عدم تحديد المواصفات عند تطبيقه على بواقي من نموذج ملائم (مطبق).

<sup>1</sup> نماذج الانحدار الذاتي المشروطة بعدم تجانس التباين Autoregressive Conditional Heteroscedastic Models

<sup>2</sup> دالة Gamma هي امتداد لدالة الضرب في الأعداد الحقيقية والمركبة، تظهر هذه الدالة في العديد من دوال التوزيعات الاحتمالية، مما يجعلها مهمة في مجالات الاحتمال والإحصاء كما في مجال التوافقيات.

تعتمد إحصاءات BDS على تكامل الارتباط، وهو مقياس لعدد مرات تكرار النمط الزمني في البيانات. بالنظر إلى سلسلة زمنية  $Y_t$  وتحديد تاريخها  $m$  على أنه:  $Y_t^m = (Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-m+1})$ ، تكامل الارتباط عند البعد  $m$  هو (Bisaglia & Gerolimetto, 2014, pp. 8-9):

$$C_{m,T}(\varepsilon) = \sum_{t < s} I_{\varepsilon}(Y_t^m, Y_s^m) \left\{ \frac{2}{T_m(T_m - 1)} \right\}$$

حيث:  $T_m = T - (m - 1)$  و  $I_{Y_t^m, Y_s^m}$  هو مؤشر الدالة يساوي 1 إذا كان المعيار الموحد The sup Norm أصغر من  $\varepsilon$ ، أي:  $\|Y_t^m - Y_s^m\| < \varepsilon$  ويساوي الصفر خلاف ذلك. في الأساس، يحسب  $C_{m,T}(\varepsilon)$  عدد تواريخ  $m$  التي تقع داخل مكعب زائد الحجم  $\varepsilon$  عن بعضها البعض. بعبارة أخرى، يقدر تكامل الارتباط احتمالية وجود أي نقطتين بأبعاد  $m$  على مسافة  $\varepsilon$  من بعضها البعض:

$$P(|Y_t - Y_s| < \varepsilon, |Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \varepsilon, \dots, |Y_{t-m+1} - Y_{s-m+1}| < \varepsilon)$$

إذا كانت السلسلة  $Y_t$  مستقلة ومتماثلة التوزيع، فيجب أن يكون هذا الاحتمال مساويا لمايلي في الحالة المقيدة:

$$C_{1,T}(\varepsilon)^m = P(|Y_t - Y_s| < \varepsilon)^m$$

حدد (Brock, Dechert, & Scheinkman, 1996) إحصائيات BDS على النحو التالي:

$$V_{m\varepsilon} = \sqrt{T} \frac{C_{m,T}(\varepsilon) - C_{1,T}(\varepsilon)^m}{s_{m,T}}$$

حيث:  $s_{m,T}$  هو الانحراف المعياري ويمكن تقديره بشكل متسق كما هو موثق بواسطة (Brock, Dechert, & Scheinkman, 1987). تحت شروط انتظام الاعتدالية إلى حد ما، تتقارب إحصائيات BDS إلى التوزيع الطبيعي الخاص.

### 3. اختبار Ramsey (1969) RESET

يقترح (Ramsey, 1969) اختبارا محددًا لتحليل الانحدار الخطي للمربعات الصغرى، الذي تكون حجته هي أن اللاخطية سوف تتأثر في تشخيص النموذج الخطي الملائم (المطبق) Fitted Linear Model إذا كانت بواقى النموذج الخطي مرتبطة بشروط قوة معينة. بعبارة أخرى، يركز اختبار RESET، على خصائص الأخطاء العشوائية في الانحدار الخطي، بما في ذلك تلك التي تأتي من عدم الخطية غير النموذجية ويمكن تطبيقها بسهولة على نماذج AR الخطية. لنعبر النموذج  $AR(p)$  الخطي التالي (Bisaglia & Gerolimetto, 2014, pp. 10-11):

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

الخطوة الأولى في اختبار RESET هي الحصول على أقل تقدير للمربعات  $\hat{\phi}$ ، وحساب البواقي:  $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ، ومجموع مربعات البواقي:

$$SSR_0 = \sum_{i=p+1}^T \hat{\varepsilon}_i^2$$

في الخطوة الثانية، نعتبر الانحدار الخطي:

$$\hat{\varepsilon}_t = \mathbf{Y}'_{t-1} \mathbf{a} + \mathbf{M}'_{t-1} \mathbf{b} + v_t$$

حيث:  $\mathbf{Y}_{t-1} = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$  و  $\mathbf{M}_{t-1} = (\hat{Y}_t^2, \dots, \hat{Y}_t^{s+1})$  لأجل:  $s \geq 1$ ، وحساب البواقي:

$$\hat{v}_t = \hat{\varepsilon}_t - \mathbf{Y}'_{t-1} \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{M}'_{t-1} \hat{\mathbf{b}}$$

في الخطوة الثالثة يتم حساب مجموع مربعات البواقي:

$$SSR_1 = \sum_{i=p+1}^T \hat{v}_i^2$$

إذا كان نموذج الانحدار الذاتي  $AR(p)$  الخطي مناسباً، فيجب أن يكون:  $a = b = 0$ . يمكن اختبار ذلك في الخطوة الرابعة بواسطة إحصائية  $F$  المعتادة:

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1) / g}{SSR_1 / (T - p - g)}$$

$$g = s + p + 1$$

این تحت الفرضية الخطية والطبيعية يكون لها:  $F_{g, T-p-g}$

#### 4. اختبار (Keenan (1985) and Tsay (1986)

يقترح (Keenan, 1985) اختباراً غير خطي للسلسلة الزمنية التي تستخدم الفرضية التربيعية اللاخطية  $\hat{Y}_t^2$  فقط ويعدل الخطوة الثانية من اختبار RESET لتجنب التعدد الخطي Multicollinearity بين  $\hat{Y}_t^2$  و  $Y_{t-1}$ . على وجه الخصوص، يفترض Keenan أنه يمكن تقريب السلسلة (توسيع معادلة Volterra) على النحو التالي (Bisaglia & Gerolimetto, 2014, p. 11):

$$Y_t = \mu + \sum_{u=-\infty}^{\infty} \theta_u \varepsilon_{t-u} + \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \theta_{uv} \varepsilon_{t-u} \varepsilon_{t-v}$$

من الواضح أنه إذا كان الحد:  $\sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \theta_{uv} \varepsilon_{t-u} \varepsilon_{t-v} = 0$ ، فإن التقريب يكون خطياً، لذا فإن فكرة Keenan تشارك مبدأ اختبار  $F$ . إجراء الاختبار هو نفس خطوات اختبار Ramsey:

1- تحديد فترة الابطاء  $p$  المناسبة في عملية الانحدار مثلا عن طريق معيار  $AIC$ . لأجل تكوين انحدار  $Y_t$  على  $(1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$  للحصول على القيم المقدرة  $\hat{Y}_t$  والبواقي  $\hat{\varepsilon}_t$ ، ثم نحسب مجموع مربعات البواقي  $RSS$ .

2- ثم بناء انحدار  $\hat{Y}_t^2$  على  $(1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$  للحصول على البواقي  $\hat{\zeta}_t$ .

3- حساب انحدار  $\hat{\varepsilon}_t$  على  $\hat{\zeta}_t$  للحصول على  $\hat{\eta}_t$  وإحصائية  $\hat{F}$  عبر:

$$\hat{\eta}_t = \frac{\sum_{i=p+1}^T \hat{a}_i \hat{\zeta}_t}{\sum_{i=p+1}^T \hat{\zeta}_t^2}$$

$$\hat{F} = \frac{(n-2p-2)\hat{\eta}^2}{(SSR - \hat{\eta}^2)}$$

تحت الفرضية الصفرية  $H_0$  للخطية، أي:  $H_0: \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \theta_{uv} \varepsilon_{t-u} \varepsilon_{t-v} = 0$ ، وافترض أن  $\varepsilon_t$  هي مستقلة

ومتماثلة التوزيع، فإن  $\hat{F}$  تتقارب الى  $F_{1, T-2p-2}$ ، أي:  $\hat{F} \rightsquigarrow F_{1, T-2p-2}$

يعمل اختبار (Tsay, Non-Linearity Tests for Time Series, 1986) على التحسين من قوة اختبار Keenan من خلال السماح للمتغيرات غير الخطية الموزعة (كل النواتج المتقاطعة  $(Y_{t-i} Y_{t-j}, i, j = 1, \dots, p)$  وبالتالي تعميم اختبار Keenan من خلال البحث بشكل صريح للاعتماد التسلسلي التربيعي للبيانات. فيحين أن الخطوة الأولى من اختبار Keenan تبقى على حالها، فانه في الخطوة الثانية الموالية من اختبار Tsay، بدلا من:  $\hat{Y}_t^2$ ، يتم انحدار النواتج  $(Y_{t-i} Y_{t-j}, i, j = 1, \dots, p)$  على  $(1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$ . وبالتالي، يتم توزيع إحصائية الاختبار المقابلة  $\hat{F}$  بشكل تقاربي نحو:  $F_{m, T-m-p-1}$ ، حيث:

$$m = \frac{p(p-1)}{2}$$

## 5. اختبار Threshold Autoregressive-Likelihood Ratio (TAR-LR)

يقترح (Chan & Tong, 1986) اختبار  $LM$  نسبة المعقولية Likelihood Ratio للتمييز بين مجموعة فرعية معينة من نماذج  $TAR$  المثيرة ذاتيا، أي  $TAR(2, p, p)$  من نماذج  $AR$  الخطية عندما تكون:  $p$ ،  $R$  و  $d$  معلومة (أو مفترضة). تحت الفرضية الصفرية  $H_0$ ، حيث ان السلسلة الزمنية  $Y_t$  تتقارب الى نموذج الانحدار الخطي الذاتي، أي:  $H_0: Y_t \sim AR(p)$  مقابل اختبار الفرضية البديلة  $H_1$  (Bisaglia & Gerolimetto, 2014, p. 12):

$$Y_t = \begin{cases} \phi_{1,0} + \sum_{i=1}^p \phi_{1,i} Y_{t-i} + \varepsilon_{1,t} & \text{if } Y_{t-d} < r \\ \phi_{2,0} + \sum_{i=1}^p \phi_{2,i} Y_{t-i} + \varepsilon_{2,t} & \text{if } Y_{t-d} \geq r \end{cases}$$

حيث  $r$  هي العتبة Threshold. بافتراض أنه  $\varepsilon_i$  مستقلة ومتماثلة التوزيع ومستقل عن  $Y_i$ ،  $s < t$ ، فإن اختبار  $TAR-LR$  معطى كمايلي:

$$LR_1 = \left\{ \sigma^2(NL), r / \sigma^2 \right\}^{\frac{T-p+1}{2}}$$

حيث  $\sigma^2(NL, r)$  و  $\sigma^2$  هم المقدرين الخاصين لتباين الخطأ العشوائي من نموذج  $TAR(2, p, p)$  ونموذج  $AR(p)$ . تحت الفرضية الصفرية  $H_0$  للخطية، معاملات الانحدار الذاتي في أنظمة  $TAR$  لا تكون مختلفة جوهريا، أي:  $\phi_i^1 = \phi_i^2$ ،  $H_0: \phi_i^1 = \phi_i^2$ ،  $(i = 0, 1, \dots, p)$ ، و  $-2\log(LR_1)$  يتم توزيعه بشكل تقاربي على أنه:  $\chi_{p+1}^2$ . في الممارسة العملية،  $r$  يكون غير معروف بشكل عام ويجب تقديره. ثم يتحول اختبار  $LR$  إلى:

$$LR_2 = \left\{ \sigma^2(NL) / \sigma^2 \right\}^{\frac{T-p+1}{2}}$$

ونتيجة لذلك، فإن دالة المعقولية هي غير منتظمة والتوزيع التقاربي لها لا يمتد إلى  $\chi_m^2$ . ومع ذلك، اقترح (Chan & Tong, 1986) تقييما عدديا لدالة المعقولية واختبار نسبة المعقولية بناءً على هذا التقريب العددي. بالنسبة للحالة المقيدة المشار إليها أعلاه، تسمح النتائج النظرية بجدولة التوزيع التقاربي للفرضية العدمية لـ  $LR_2$ .

## 6. اختبار (Engle 1982)

تم إدخال اختبار مضاعف Lagrange Multiplier (LM) من طرف (Engle, 1982) لاختبار تأثيرات ARCH بشكل أساسي وهذا لبساطته الحسابية، حيث لا يتطلب اختبار  $LM$  سوى تقدير النموذج الخطي. وهو مساوي إلى إحصائية  $F$  لاختبار الفرضية الصفرية  $H_0$  للمعاملات التي لا تختلف جوهريا (معنويا) عن الصفر في انحدار مربعات البواقي من خلال النموذج الخطي المطبق (المناسب) على القيم المبطأة (حتى  $m$ ) لنفس مجموع مربعات البواقي (Bisaglia & Gerolimetto, 2014, p. 12):

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + v_t, \quad t = m+1, \dots, T$$

بمجرد حساب:  $SSR_0 = \sum_{t=m+1}^T (\varepsilon_t^2 - \bar{\varepsilon})^2$  و  $SSR_1 = \sum_{t=m+1}^T \hat{v}_t^2$  يتم الحصول على إحصائية  $F$ :

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1) / m}{SSR_1 / (T - 2m - 1)}$$

الذي يتم توزيعه بشكل تقاربي على أنه  $\chi_m^2$ . مع ملاحظة أنه اختبار  $LM$ ، فمن الممكن اللجوء إلى المقدار:  $TR^2$  الذي له شكل تقاربي بنفس توزيع إحصائية  $F$ .

للإشارة أنه هناك عدة اختبارات للكشف عن الخطية منها مثلا اختبار (White, 1989)، اختبار (Teräsvirta, Lin, & Granger, 1993). ولقد اعطينا أهمها مع العلم أن الاختبارات الأربعة الأولى تندرج ضمن نوع الخطية مقابل بدائل غير الخطية غير المحددة، أما الاختبارين الأخيرين ينتميان إلى نوع الخطية ضد بدائل غير خطية المحددة.

#### IV. النماذج الخطية للسلاسل الزمنية

سوف نقدم مجموعة من السيرورات العشوائية التي من المفترض أن تغطي مجموعة واسعة جدا من التطور المحتمل للسلاسل الزمنية والتي تتمثل في نماذج الانحدار الذاتي ونماذج المتوسطات المتحركة.

#### 1. نماذج الانحدار الذاتي (AR) Autoregressive Models

في نماذج الانحدار الذاتي ذات الدرجة  $p$ ، تكون الملاحظة الحالية  $Y_t$  مفسرة بمتوسط مرجح للملاحظات الماضية إلى غاية الفترة  $p$  مع إضافة حد الخطأ العشوائي في الفترة الحالية، وتكتب على الشكل التالي (Bourbonnais, 2015, p. 256):

$$\begin{aligned} AR(1): Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ AR(2): Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \\ \dots \\ AR(p): Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad [1]$$

حيث  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$  هي معاملات موجبة أو سالبة يتم تقديرها،  $\varepsilon_t$  هي غوسية عشوائية (الضجة البيضاء الغوسية Gaussian White Noise). يمكننا إضافة الحد الثابت  $\phi_0$  إلى هذا النموذج الذي لا يغير شيئا من الخصائص العشوائية:

$$AR(p): Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad [2]$$

يمكن أيضا كتابة المعادلة [1] أو المعادلة [2] باستخدام عامل التباطؤ  $L$ :

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi_0 + \phi_1 L Y_t + \phi_2 L^2 Y_t + \dots + \phi_p L^p Y_t + \varepsilon_t \\ (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t &= \phi_0 + \varepsilon_t \\ \phi(L) Y_t &= \phi_0 + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \text{ حيث:}$$

هذه السيرورة  $AR(p)$  تكون مستقرة إذا حققت شروط الاستقرار الثلاثة السابقة، أي:

- ثبات المتوسط الحسابي ويكون مستقل عن الزمن:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \mu$$

هذا يعني:

$$E(Y_t) = \phi_0 + \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-2}) + \dots + \phi_p E(Y_{t-p}) + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = \phi_0 + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + \dots + \phi_p \mu$$

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \sum_{i=1}^p \phi_i}$$

إذا كان المتوسط الحسابي  $\mu$  للسيرورة  $AR(p)$  منتهيا، فمن الضروري أن يكون:  $\sum_{i=1}^p \phi_i < 1$ ، ولكنه غير كاف

لضمان حالة الاستقرار، حيث هناك شرط التباين والتباين المشترك.

وبوضع:  $y_t = Y_t - \phi_0$ ، وانطلاقا من نموذج الانحدار الذاتي المعبر عنه بواسطة معامل التأخير  $L$  يكون

لدينا (شيخي، 2011، صفحة 229):

$$\phi(L)y_t = \varepsilon_t$$

$$y_t = \phi^{-1}(L)\varepsilon_t$$

حتى يكون النموذج  $AR(p)$  مستقرا يجب ان يكون قابلا للانعكاس (القلب) Invertible، أي يجب ان

تكون جذور كثير الحدود  $\phi(L)$  بالقيمة المطلقة اقل من 1.

يتبقى الشرطان الاخيران المتعلقان باستقرارية النموذج  $AR(p)$  والمتمثلان في التباين والتباين المشترك،

ولأجل تسهيل الدراسة، نبدأ بدراسة نموذج انحدار ذاتي من الدرجة 1، أي:  $AR(1): Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \mu \quad \text{- التوقع هو:}$$

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

تكون السيرورة  $AR(1)$  مستقرة إذا تحقق:  $|\phi_1| < 1$

- التباين لهذه السيرورة  $\gamma(0)$ ، إذا وضعنا  $\phi_0 = 0$  مع الشرط يكون نهائي وثابت عبر الزمن، أي:

$$\begin{aligned} V(Y_t) = \gamma(0) &= E\left[(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t)^2\right] \\ &= \phi_1^2 \gamma(0) + \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \end{aligned}$$

- التباين المشترك كذلك يكون ثابتا عبر الزمن:

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= E(Y_t Y_{t-1}) = \phi_1 \gamma(0) \\ \gamma(2) &= E(Y_t Y_{t-2}) = \phi_1^2 \gamma(0) \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma(k) &= E(Y_t Y_{t-k}) = \phi_1^k \gamma(0) \end{aligned}$$

- دالة الارتباط الذاتي والتي نحصل عليها من خلال التباين والتباين المشترك وتتميز بالانخفاض الهندسي:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & : k = 0 \\ \phi_1^k & : k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

حيث هذه السيرورة AR(1) لها ذاكرة غير منتهية وهذا بسبب اعتماد القيمة الحالية  $Y_t$  على القيم الماضية للسيرورة. بالرغم من أن تصرف هذه التبعية ينخفض مع الزمن (شيخي، 2011، صفحة 230).

### 2. نماذج المتوسطات المتحركة (MA) Moving Average Models

في نماذج المتوسطات المتحركة ذات الدرجة  $q$ ، يتم إنشاء (توليد) كل ملاحظة  $Y_t$  بمتوسط مرجح للأخطاء العشوائية الى غاية الفترة  $q$ ، وتكتب على الشكل التالي<sup>1</sup> (Bourbonnais, 2015, p. 257):

$$\begin{aligned} MA(1): Y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \\ MA(2): Y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \\ &\dots \\ MA(q): Y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned} \quad [1]$$

حيث  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$  هي معاملات موجبة او سالبة يتم تقديرها،  $\varepsilon_t$  هي غوسية عشوائية (الضجة البيضاء الغوسية Gaussian White Noise). اي:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0 \\ V(\varepsilon_t) &= \sigma_\varepsilon^2 \\ \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) &= 0, \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> للإشارة انه في العرف الجاري يستخدم إشارات سالبة، أي:  $MA(q): Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$ . لمزيد من التوضيح، يرجى الاطلاع على: (البشير، 2016، صفحة 110).

يمكننا إضافة الحد الثابت  $\theta_0$  إلى هذا النموذج  $MA(q)$  الذي لا يغير شيئاً من الخصائص العشوائية:

$$MA(q): Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad [2]$$

يمكننا أيضاً كتابة المعادلة [1] او المعادلة [2] باستخدام عامل التباطؤ  $L$ :

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \theta_2 L^2 \varepsilon_t + \dots + \theta_q L^q \varepsilon_t$$

$$(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t = Y_t - \theta_0$$

$$\theta(L) \varepsilon_t = Y_t - \theta_0$$

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q \text{ حيث:}$$

وبالتالي فان شروط الاستقرار الثلاثة تكون (شيخي، 2011، الصفحات 226-228):

- التوقع يكون مستقلاً عن الزمن:  $E(Y_t) = \theta_0$

- التباين لهذه السلسلة  $\gamma(0)$ ، هو ثابت عبر الزمن، أي:

$$V(Y_t) = \gamma(0) = E[(Y_t - \theta_0)^2]$$

$$= E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q})(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q})]$$

$$= E[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \theta_q^2 \varepsilon_{t-q}^2 + 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \dots]$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2 \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma_\varepsilon^2$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 [1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2]$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left[ 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2 \right]$$

- التباين المشترك كذلك يكون ثابتاً عبر الزمن:

$$E(Y_t Y_{t-k}) = \gamma(k) = E[Y_{t-k} (\theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q})]$$

$$= 0, \quad k \neq 0$$

كمثال نأخذ سيرة متوسطة متحرك من الدرجة 1:  $MA(1): Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

- المتوسط الحسابي لهذه السلسلة ثابت عبر الزمن:  $E(Y_t) = \theta_0$

- التباين لهذه السلسلة  $\gamma(0)$ ، كذلك هو مستقل عن الزمن، أي:  $V(Y_t) = \gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2 [1 + \theta_1^2]$

- التباين المشترك فهو على الشكل:

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \gamma(1) = E[(Y_t - \theta_0)(Y_{t-1} - \theta_0)]$$

$$= E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})]$$

$$= \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

على العموم ل: فترة مبطأة يكون التباين المشترك:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t, Y_{t-k}) &= \gamma(k) = E[(Y_t - \theta_0)(Y_{t-k} - \theta_0)] \\ &= E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})] = 0 \quad : k > 1 \end{aligned}$$

لما يكون التباطؤ أكبر من فترة واحدة:  $k > 1$  فان التباين المشترك لهذه السيرورة  $MA(1)$  يكون معدوماً، أي ان كل قيمة من السلسلة الزمنية  $Y_t$  تكون مرتبطة مع  $Y_{t-k}$  و  $Y_{t+k}$  دون قيم السلسلة الزمنية الماضية والمستقبلية. هذا معناه ان الحوادث الظاهرة في أكثر من فترة زمنية واحدة في الماضي ليس لها أثر على السيرورة حالياً.

- وتكون دالة الارتباط الذاتي للسيرورة  $MA(1)$ :

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} & : k = 1 \\ 0, & : k > 1 \end{cases}$$

بالتعميم، تكون لدالة الارتباط الذاتي  $\rho(k)$  للسيرورة  $MA(q)$ : قيمة تختلف عن الصفر، وتساوي الصفر لما يكون،  $k > q$  لذلك يعتمد على دالة الارتباط الذاتي في تحديد درجة السيرورة:  $MA(q)$ .

### 3. النماذج المختلطة $ARMA(p, q)$

تمثل نماذج  $ARMA$  عن دمج سيرورة المشاهدات السابقة والأخطاء العشوائية السابقة كذلك. يتم تعريفها بواسطة المعادلة التالية:

$$ARMA(p, q): Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

الشرط الضروري لاستقرار هذه السيرورة  $ARMA(p, q)$  هو:  $\sum_{i=1}^p \phi_i < 1$  بحيث يكون متوسطها ثابت عبر

الزمن، أي:

$$\mu = \frac{c}{1 - \sum_{i=1}^p \phi_i}$$

من خصائص دالة الارتباط الذاتي للسيرورة  $ARMA(p, q)$  انها تأخذ الشكل الانحداري، أي تتناقص بشكل اسي بعد الفجوة الزمنية  $q$  انطلاقاً من:  $k > q$ . اما الة الارتباط الذاتي الجزئي تأخذ شكل دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج المتوسطات المتحركة بعد الفجوة الزمنية  $p$ ، أي تتناقص بشكل اسي انطلاقاً من:  $k > p$  (شيخي، 2011، الصفحات 232-235).

لدراسة شروط الاستقرار لهذه السلسلة، نأخذ مثلا السلسلة  $ARMA(1,1)$  :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

فان:

- المتوسط الحسابي لهذه السلسلة هو مستقل عن الزمن:  $\mu = \frac{c}{1-\phi_1}$  ، مع ان:  $|\phi_1| < 1$

- بوضع:  $c = 0$  ، التباين لهذه السلسلة  $\gamma(0)$  ، كذلك هو مستقل عن الزمن، أي:

$$\begin{aligned} V(Y_t) = \gamma(0) &= E[Y_t(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})] \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 [1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1]}{(1 - \phi_1^2)} \end{aligned}$$

- التباينات المشتركة في الشكل:

$$\gamma(1) = E(Y_t Y_{t-1}) = \phi_1 \gamma(0) - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(2) = E(Y_t Y_{t-2}) = \phi_1 \gamma(1)$$

.....

$$\gamma(k) = E(Y_t Y_{t-k}) = \phi_1 \gamma(k-1) : k \geq 2$$

من اجل السلسلة  $ARMA(p,q)$  يكون:

$$\gamma(k) = E(Y_t Y_{t-k}) = \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \dots + \phi_p \gamma(k-p) \quad : k \geq q+1$$

$$\rho(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \dots + \phi_p \gamma(k-p) \quad : k \geq q+1$$

$q$ : هو ذاكرة الجزء  $MA(q)$  ، وتأخذ دالة الارتباط الذاتي للسلسلة خصائص النموذج  $AR(p)$  قط من

اجل:  $k \geq q+1$  .

الان، نقوم بدراسة شروط استقرار السلسلة  $ARMA(p,q)$  مع افتراض بان:  $c = 0$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

$$\Phi(L) y_t = \theta(L) \varepsilon_t \Leftrightarrow ARMA(p,q)$$

$y_t$  هي انحراف  $Y_t$  عن وسطها، ولكي تكون السلسلة  $Y_t$  مستقرة يجب  $\Phi^{-1}(L)$  ان تتقارب، ويتطلب ان تقع

جذور المعادلة المميزة ان تقع خارج الدائرة الوحدة لتكون الحلول:  $(L_1, L_2, \dots, L_p)$  للمعادلة:

$$y_t = \Phi^{-1}(L) \theta(L) \varepsilon_t$$

وإذا تحقق ذلك يمكن كتابة:

تكون  $y_t$  قابلة للقلب إذا استطعنا كتابة المعادلة من الشكل:  $\theta^{-1}(L)\Phi(L)y_t = \varepsilon_t$ ، وبالتالي استطعنا قلب السيروورة  $ARMA(p, q)$  الى سيروورة  $AR(p)$  فقط، وإذا كانت قابلة للقلب، فإن  $\theta^{-1}(L)$  يجب ان تتقارب بشرط ان تقع جذور المعادلة المميزة  $\theta(L) = 0$  خارج الدائرة الأحادية. نأخذ مثالين عن ذلك:

- لتكن السيروورة  $MA(1)$  معادلتها المميزة هي:  $1 - \theta_1 L = 0$ ، ومنه فان شرط وجوب المقلوب هو:

$$|\theta_1| < 1 \text{ او } L = \frac{1}{|\theta_1|} > 1$$

- السيروورة  $MA(2)$ ، تكون معادلتها المميزة هي:  $1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0$ ، ومنه تكون جذورها على الشكل:

$$L = \frac{-\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{2\theta_2}$$

القيمتان:  $L_1, L_2$  يجب ان تقع خارج دائرة الأحادية، والتي تشرط (Box & Jenkins, 1976, p. 70):

$$\begin{cases} \theta_2 + \theta_1 < 1 \\ \theta_2 - \theta_1 < 1 \\ -1 < \theta_2 < 1 \end{cases}$$

كملاحظة عما سبق، انه إذا كانت السيروورة  $ARMA(p, q)$  غير مستقرة فانه تحول الى سيروورة مستقرة  $ARIMA(p, d, q)$ ، ويقال عن السلسلة الزمنية الاصلية غير المستقرة  $Y_t$  انها متكاملة Nonstationary or Integrated إذا تعين الحصول على فروقات السلسلة  $d$  مرة حتى تصبح مستقرة، يقال عندئذ أن السلسلة الأصلية متكاملة من الدرجة  $d$ ، أي:  $I(d)$ ، ويكتب النموذج المستقر بعد اخذ الفروقات له من الشكل:

$$\begin{aligned} \Phi(L)(1-L)^d Y_t &= c + \theta(L)\varepsilon_t \\ \Phi(L)\Delta^d Y_t &= c + \theta(L)\varepsilon_t \end{aligned}$$

هذا الاجراء ينطبق على السلاسل الزمنية غير المستقرة من نوع DS فيجب أن تكون مستقرة عن طريق الفروقات وفقا لترتيب التكامل  $I = d$  (أي عدد المرات التي يلزم فيها تفريق السلسلة لجعلها مستقرة). يتم بعد ذلك دراسة السلسلة المفارقة وفقا لمنهجية Box-Jenkins التي تجعل من الممكن تحديد درجات  $p$  و  $q$  لأجزاء  $AR$  و  $MA$ . نلاحظ ان هذا النوع هو من نموذج  $ARIMA(p, d, q)$ .

اما إذا كانت السلسلة التي تمت دراستها من نوع TS، فيجب أن تكون مستقرة من خلال طريقة الانحدار ثم تتم دراسة بواقي التقدير وفقا لمنهجية Box-Jenkins. هذا يجعل من الممكن تحديد درجات  $p$  و  $q$  لأجزاء

(Bourbonnais, 2015, p.  $ARMA(p, q)$  الحالة في هذه النمذج دائما في  $AR$  و  $MA$  من البواقي. يكون هذا النمذج دائما في هذه الحالة  $ARMA(p, q)$  (Bourbonnais, 2015, p. 259).

#### 4. النماذج المختلطة (الانحدار الذاتي-المتوسطات المتحركة) الموسمية SARIMA

تسمح نماذج SARIMA على دمج درجات الفروقات المرتبطة بالموسمية المعممة من خلال التحويل التالي:  $(1-L)^d Y_t = Y_t - Y_{t-s}$ ، حيث  $s$  تتوافق مع البيانات الدورية ( $s=4$  لسلسلة ربع سنوية،  $s=12$  لسلسلة شهرية). ويمكن التعبير عنها رياضيا كمايلي:

$$\phi_p(L)\Phi_p(L^s)\Delta^d\Delta_s^D Y_t = \theta_q(L)\Theta_q(L^s)\varepsilon_t$$

$$\Phi_p(L^s) = 1 - \phi_1 L^s - \phi_2 L^{2s} - \dots - \phi_p L^{ps} \quad \text{حيث:}$$

$$\Theta_q(L^s) = 1 - \theta_1 L^s - \theta_2 L^{2s} - \dots - \theta_q L^{qs}$$

- $p$ : درجة نموذج الانحدار الذاتي غير الموسمي.
- $d$ : درجة الفرق غير الموسمي.
- $q$ : درجة نموذج الأوساط المتحركة غير الموسمية
- $\phi_p(L)$ : معامل الانحدار الذاتي غير الموسمي.
- $\Delta^d$ : معامل الفروق غير الموسمية عند الزمن  $d$  حيث ان  $d$  يستخدم لتحويل السلسلة الزمنية من حالة عدم الاستقرار الى حالة الاستقرار.
- $\theta_q(L)$ : معامل الأوساط المتحركة غير الموسمية
- $P$ : درجة نموذج الانحدار الذاتي الموسمي.
- $D$ : درجة الفرق الموسمي.
- $Q$ : درجة نموذج الأوساط المتحركة الموسمية.
- $\Phi_p(L^s)$ : معامل الانحدار الذاتي الموسمي.
- $\Delta_s^D$ : معامل الفروق الموسمية عند الزمن  $d$  حيث ان  $d$  يستخدم لتحويل السلسلة الزمنية من حالة عدم الاستقرار الى حالة الاستقرار.
- $\Theta_q(L^s)$ : معامل الأوساط المتحركة الموسمية.

وتسمى هذه بالصيغة العامة للنموذج الموسمي المضاعف Multiplicative Seasonal Model (SARIMA) من الدرجة  $(P, D, Q)_s * (p, d, q)$ ، حيث ان:  $(P, D, Q)$  تحدد درجة النموذج الذي يكتب اختصاراً:  $ARIMA(P, D, Q)_s$  (عبدالمحمدي وطعمه، 2011، الصفحات 24-26).

## V. طريقة Box and Jenkins

رأينا في السابق ان الجزء الخاص بعملية الانحدار الذاتي  $AR$ ، يتكون من مجموعة خطية محدودة من القيم السابقة للسلسلة الزمنية. بينما يتكون الجزء المتوسط المتحرك  $MA$ ، من تركيبة خطية محدودة في الزمن  $t$  من القيم السابقة للتشويش الابيض. في كتابيهما الشهير "Time Series Analysis: Forecasting and Control" المنشور في سنة 1970، اقترح (Box & Jenkins, 1976) منهجية للتنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية أحادية المتغير، وهذا بالاعتماد على سيرورات  $ARIMA$ . خطوات هذه المنهجية هي على النحو التالي:

### 1. مرحلة البحث عن التمثيل المناسب (التعرف)

تعد مرحلة التحديد هي الأكثر أهمية والأكثر صعوبة، فهي تتكون من تحديد النموذج المناسب لعائلة نماذج  $ARIMA$ ، وهذا من خلال دراسة دالة الارتباط البسيطة والجزئية. نضع بعض القواعد البسيطة لتسهيل البحث عن الدرجات المناسبة  $p, d, q$  لنموذج  $ARIMA$  (Bourbonnais, 2015, pp. 260-261):

### (1) التعديل الموسمي

في حالة وجود سلسلة تتأثر بالحركة الموسمية، يجب ازالتها قبل أي معالجة إحصائية، وفي نهاية المطاف تضاف هذه الموسمية إلى السلسلة المراد التوقع بها في نهاية العلاج من أجل الحصول على التوقعات النهائية<sup>1</sup>.

### (2) البحث عن الاستقرار من حيث الاتجاه العام

إذا كانت دراسة "مخطط الارتباط Correlogram" لدالة الارتباط الذاتي البسيطة والاختبارات الخاصة بإحصائية:  $Q$ -Statistic تدل على تأثر السلسلة الزمنية بالاتجاه العام، فيجب دراسة خصائصها وفقاً لاختبارات Dickey-Fuller، وهذا بهدف ازالة الاتجاه حسب خصائص النموذج  $DS$  أو  $TS$  كما هو مبين سابقاً في الشكل 1. بعد دراسة الاستقرار، يمكننا تحديد الدرجتين:  $p, q$  لنموذج  $ARMA$  كما يلي (Bourbonnais, 2015, p. 261):

<sup>1</sup> نذكر على انه قبل ازالة المركبة الموسمية، فان هذه الأخيرة تتطلب ازالة مركبة الاتجاه العام قبل ذلك.

- إذا كان "مخطط الارتباط Correlogram" لدالة الارتباط الذاتي البسيطة  $ACF$  للحدود الأولى  $q$  (  $q = 3$  كحد أقصى) تختلف عن الصفر وقيم منحنى دالة الارتباط الجزئي تنخفض تدريجياً، فيمكننا ان نشخص او نستنتج ان نموذج المتوسطات المتحركة هو:  $MA(q)$ .
  - إذا كان "مخطط الارتباط Correlogram" لدالة الارتباط الذاتي الجزئية  $PACF$  للحدود الأولى  $p$  (  $p = 3$  كحد أقصى) تختلف عن الصفر وقيم منحنى دالة الارتباط البسيطة تنخفض تدريجياً، فنستنتج ان نموذج الانحدار الذاتي هو:  $AR(p)$ .
  - إذا لم تظهر دوال الارتباط الذاتي البسيطة والجزئية متقطعة، فهي عندئذ من نوع  $ARMA$  والتي يتم تحديد رتبها وفقاً لمخطط الارتباط "Correlogram" الخاص بها.
- الجدول 1 الموالي يلخص هذه الحالات الثلاث المختلفة:

الجدول 1: ملخص خصائص لمخطط دالة الارتباط الذاتي البسيطة والجزئية

نوع النموذج	دالة الارتباط الذاتي البسيطة $ACF$	دالة الارتباط الذاتي الجزئية $PACF$
$MA(q)$	تنعدم معنوياً بعد الدرجة $q$	تناقص اسي
$AR(p)$	تناقص اسي	تنعدم معنوياً بعد الدرجة $p$
$ARMA(p, q)$	تناقص اسي بعد التأخر $(q - p)$	تناقص اسي بعد التأخر $(p - q)$

المصدر: (Bourbonnais, 2015, p. 259)

## 2. مرحلة التقدير

بعد تحديد درجات  $p, d, q$  ، تأتي مرحلة تقدير معالم النماذج.

### 1) تقدير معالم نموذج الانحدار الذاتي $AR$

بعد تحديد الدرجة المناسبة  $p$  ، يتم تقدير المعلمات  $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$  الخاصة بنموذج الانحدار الذاتي  $AR(p)$  ، وهذا من خلال احدى الطرق الاتية:

#### • طريقة معادلات Yule-Walker

تركز هذه الطريقة على معادلات Yule-Walker من خلال معاملات الارتباط الذاتي لتقدير معالم النموذج، حيث تكون لدينا  $p$  معادلة نموذج (شيخي، 2011، صفحة 244):

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \phi_1 + \phi_2\rho(1) + \dots + \phi_p\rho(p-1) \\ \rho(1) &= \phi_1\rho(1) + \phi_2 + \dots + \phi_p\rho(p-2) \\ &\dots\dots\dots \\ \rho(p) &= \phi_1\rho(p-1) + \phi_2\rho(p-2) + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

نحول جملة هذه المعادلات الى الشكل المصفوفاتي:

$$\begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R &= A \times \hat{\Phi} \\ \hat{\Phi}^{-1} &= A \times R \end{aligned}$$

• الطريقة الانحدارية

من اجل توضيح هذه الطريقة والخاصة بتقدير المعلمات  $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ ، فإننا نعتبر نموذج الانحدار الذاتي التالي:

$$AR(p): Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

نحوه الى الشكل المصفوفاتي:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & Y_1 & 0 & \dots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & Y_{T-1} & Y_{T-2} & \dots & Y_{T-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y &= X \times \Phi + \varepsilon \\ (T,1) & \quad (T,p+1) \quad (p+1,1) \quad (T,1) \end{aligned}$$

مع العلم انه تم فقد مشاهدة وتم تعويضها بـ 0 لتعويض تلك القيم المفقودة، وفي هذه الحالة وتحت فرضيات الانحدار الخطي، يتم تقدير معالم هذا النموذج بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS بالشكل المصفوفي:

$$\hat{\Phi} = (X'X)^{-1} X'Y$$

(2) تقدير معالم نموذج المتوسطات المتحركة والمختلطة

عملية التقدير هنا تعتبر اعقد بكثير من تقدير نماذج الانحدار الذاتي، لأنها غير خطية المعالم وعدم مشاهدة متغير الأخطاء من ناحية أخرى. هدف التقدير هو تحديد معالم القسم الانحدار الذاتي وقسم

المتوسطات المتحركة  $ARMA(p, q)$  معا، او في الحالة الأخرى تحديد قسم المتوسطات المتحركة  $MA(q)$  لوحده فقط. نأخذ النموذج المختلط  $ARMA(p, q)$  التالي:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\Phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(L)\Phi(L)Y_t$$

طريقة التقدير، يجب أن تأخذ فكرة تدنية مجموع مربعات البواقي، أي:

$$\text{Min} \sum \hat{\varepsilon}_t^2 = s(\hat{\phi}, \hat{\theta})$$

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\theta}^{-1}(L)\hat{\Phi}(L)Y_t$$

في حالة غياب نموذج المتوسطات المتحركة  $MA(q)$  تصبح طريقة التقدير سهلة، اما بوجودها لوحدها او مع قسم الانحدار الذاتي، فانه تصبح غير خطية المعالم. ولأجل التقدير فانه يتطلب وجود طريقة تكرارية Non linear Iterative Routine ومن بين هذه الطرق نجد (شيخي، 2011):

#### • طريقة البحث التشابكي Grid-Search

لتوضيح هذه الطريقة نستعين بالنموذج المختلط  $ARMA(1,1)$ :

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$(1 - \phi_1 L)Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 L)} \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 L)} (1 + \theta_1 L) \varepsilon_t \quad [1]$$

$$v_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 L)} \varepsilon_t \quad \text{نضع:}$$

$$v_t = \phi_1 v_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{نحصل على:}$$

لو توفرت قيم الشعاع في العلاقة الأخيرة، فانه يمكن تقدير المعلمة  $\phi_1$  بطريقة المربعات الصغرى OLS.

لكن بسبب عدم مشاهدتها، نرجع إلى العلاقة [1] ونعيد كتابتها في الشكل الموسع:

$$Y_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 L)} \varepsilon_t + \frac{\theta_1}{(1 - \phi_1 L)} \varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t = v_t + \theta_1 v_{t-1} \quad [2]$$

من هذه المعادلة وبتعويض  $\theta_1$  بقيمها التي تقع ضمن المجال  $|\theta_1| < 1$  من أجل شرط امكانية قلب النموذج وبتوفير القيم الابتدائية لـ  $v_t$  أو جعلها مساوية للصفر، في هذه الحالة أو المثال:  $v_0 = 0$  نحصل على:

$$v_t = Y_t - \theta_1 v_{t-1}$$

تبدأ العملية بالتكرار الأول (1)، وذلك باختيار مثلا:  $\theta_1 = -0.9$  ونسميها  $\theta_1^{(1)}$  وكما يلي:

$$\begin{aligned} t=1 & : v_1^{(1)} = Y_1 \\ t=2 & : v_2^{(1)} = Y_2 - \theta_1^{(1)} v_1^{(1)} \\ t=3 & : v_3^{(1)} = Y_3 - \theta_1^{(1)} v_2^{(1)} \\ & \vdots \\ t=T & : v_T^{(1)} = Y_T - \theta_1^{(1)} v_{T-1}^{(1)} \end{aligned}$$

حيث:  $V^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \dots \\ v_T^{(1)} \end{bmatrix}$  بتعويض هذا الشعاع الناتج في المعادلة [3]، يمكن تقدير المعلمة  $\phi_1$  باستعمال

طريقة المربعات الصغرى OLS:

$$\hat{\phi}_1^{(1)} = \frac{\sum_t v_t^{(1)} v_{t-1}^{(1)}}{\sum_t (v_{t-1}^{(1)})^2} \quad [3]$$

ثم نقوم بحساب مجموع مربعات البواقي المقابلة للمعلمتين  $(\theta_1^{(1)}, \hat{\phi}_1^{(1)})$  ومن المعادلة [2] كالاتي:

$$\sum_t \hat{\epsilon}_t^2 = \sum_t (v_t^{(1)} - \hat{\phi}_1^{(1)} v_{t-1}^{(1)})^2$$

نسمي مجموع المربعات هذه بالرمز المتعارف عليه للموافق للتكرار الأول  $RSS^{(1)}$ .

نعيد العملية للمرة الثانية (التكرار الثاني) ووفقا للمراحل السابقة والتي نختصرها فيما يلي:

- حساب الشعاع  $v^{(2)}$  باستعمال القيمة الموالية:  $\theta_1 = -0.8$  مثلا وباعتماد خطوة زائدة Increment مقدارها 0.1

$$\hat{\phi}_2^{(2)} = \frac{\sum_t v_t^{(2)} v_{t-1}^{(2)}}{\sum_t (v_{t-1}^{(2)})^2} \quad \text{- تقدير المعلمة:}$$

- حساب مجموع مربعات البواقي مثل الحالة السابقة:  $RSS^{(2)} = \sum_t \hat{\epsilon}_t^2 = \sum_t (v_t^{(2)} - \hat{\phi}_1^{(1)} v_{t-1}^{(2)})^2$

ثم نكرر العملية هذه حتى تغطي مجال كامل التعويض لـ  $\theta_1$  وحتى نحصل على المعالم (المعلمتين في هذا المثال) التي تدني مجموع مربعات البواقي  $RSS$ . للإشارة، تعتبر هذه الطريقة غير مرغوبة حين يتجاوز عدد معالمات قسم المتوسطات المتحركة درجتين  $q > 2$ ، وذلك لصعوبة عملية الحساب من جهة وكذا عدم اتساق المعالمات من جهة ثانية.

#### • طريقة Gauss-Newton التكرارية

تعتمد هذه الطريقة كذلك على تدنية مجموع مربعات البواقي، أي:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\theta}^{-1}(L)\hat{\Phi}(L)Y_t$$

وبما ان هذه المعادلة هي غير خطية المعالم، فانه لا يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى OLS، حيث يجب تطبيق طريقة التقدير غير الخطي لـ Gauss-Newton مستعملين في ذلك نشر Taylor لأجل جعل المعادلة في شكلها الخطي.

نأخذ النموذج:  $ARMA(1,1)$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

مع  $\varepsilon_t$  هي مستقلة ومتماثلة التوزيع ومن اجل الشرط  $|\phi_1| < 1$ ، نقوم بضرب طرفي المعادلة بالمقدار

$$\theta_1^{-1}(L)Y_t = \theta_1^{-1}(L)\phi_1 Y_{t-1} + u_t \text{ فنجد: } \theta_1^{-1}(L)$$

المشكل الأساسي يكمن في كيفية شرح المتغير  $\theta_1^{-1}(L)$ ، وعليه نفترض ان قيم السلسلة تكون مساوية للصفر. انطلاقاً من هذه الفرضية تكون السلسلة المحولة:

$$Y_t^* = \theta^{-1}(L)Y_t$$

$$Y_1^* = Y_1$$

$$Y_2^* = Y_2 + \theta_1 Y_1$$

$$Y_3^* = Y_3 + \theta_1 Y_2 + \theta_1^2 Y_1$$

⋮

$$Y_T^* = Y_T + \theta_1 Y_{T-1} + \theta_1^2 Y_{T-2} + \dots + \theta_1^{T-1} Y_1$$

بالتراجع نستنتج ان:  $Y_t^* = Y_t + \theta_1 Y_{t-1}^*$  مع  $Y_0^* = 0$ .

يمكن إعادة المعادلة السابقة:  $\theta_1^{-1}(L)Y_t = \theta_1^{-1}(L)\phi_1 Y_{t-1} + u_t$  على الشكل الموالي:  $Y_t^* = \phi_1 Y_{t-1}^* + \varepsilon_t$ ، حيث انها خطية في  $\phi_1$  وإذا كانت  $\theta_1$  معطاة، فانه يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS.

عملية، تكون  $\theta_1$  غير معروفة، ومنه نضطر لتطبيق التقدير غير الخطي، حيث من خلال المعادلات السابقة نستطيع كتابة:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \theta^{-1}(L)\Phi(L)Y_t = Y_t^* - \phi_1 Y_{t-1}^* & [1] \theta_1 \\ \Phi(L)Y_t &= Y_t - \phi_1 Y_{t-1} \end{aligned}$$

وبما انه  $\varepsilon_t$  ليس خطيا في المعادلة [1]، فنستعمل منشور Taylor للسلسلة  $\varepsilon_t$  حول البواقي المقدرة  $\hat{\varepsilon}_t$ ، لنحصل على:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \hat{\varepsilon}_t + [\partial \varepsilon_t / \partial \phi_1] (\phi_1 - \hat{\phi}_1) + [\partial \varepsilon_t / \partial \theta_1] (\theta_1 - \hat{\theta}_1) + R_t & [2] \\ \hat{\varepsilon}_t &= \frac{-\partial \varepsilon_t}{\partial \phi_1} (\phi_1 - \hat{\phi}_1) - \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1} (\theta_1 - \hat{\theta}_1) + \varepsilon_{t1} \end{aligned}$$

بوضع:  $R_t = 0$  نجد:

المعادلة الأخيرة تعتبر انحدار خطي، حيث  $\hat{\varepsilon}_t$  هو متغير تابع والمشتقتين الجزئيتين:  $\frac{-\partial \varepsilon_t}{\partial \phi_1}$ ,  $\frac{-\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1}$  بجوار:  $\phi_1, \hat{\theta}_1$  هما متغيران مستقلان. الانحدار الناتج سوف يقدر القيم المراجعة للحصول على مقدرات جديدة للمعلمتين  $\phi_1, \hat{\theta}_1$  عن طريق تقسيم المشتقات في المعادلة [2] مستعملين المعادلة [1] في كل

خطوة مراجعة والتي تعطي:  $\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \phi_1} = -Y_{t-1}^*$ . أما بالنسبة لـ:  $\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1}$ ، فنكتب:

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_t &= Y_t - \phi_1 Y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \end{aligned}$$

مادام:  $Y_t, Y_{t-1}$  ملاحظتين من أجل كل  $t$  فإن:

$$\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1} = \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \frac{\partial \varepsilon_{t-1}}{\partial \theta_1}$$

نستعمل هذه الصيغة بالتراجع مع اعتبار:  $\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1} = 0$  لما  $t > 0$  ويمكن إعادة كتابتها على الشكل:

$$(1 - \theta L) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1} = \varepsilon_{t-1}$$

نعرف المتغير المحول على الشكل:

$$\varepsilon_{t-1}^* = \frac{-\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1} = \frac{-\partial \varepsilon_{t-1}}{(1 - \theta L)}$$

وعليه تتطلب طريقة Gauss-Newton تحديد البواقي المقدرة  $\varepsilon_t^*$  في المتغيرات  $Y_{t-1}^*$  و  $-\varepsilon_{t-1}^*$  لتقدير التراجعات للمقدرات  $\phi_1, \hat{\theta}_1$  على الترتيب. المتغيرات المكونة أعلاه يجب مراجعتها عند كل مرحلة من

سيرورة التكرار، لأنها تعتمد على المقدرات الحالية، ونواصل العملية حتى تقترب المقدرات من الصفر (شيخي، 2011، الصفحات 248-251).

### 3. مرحلة التشخيص

بعد تقدير النماذج المرشحة لعملية التنبؤ، تأتي مرحلة التشخيص والتي تحتاج الى مجموعة من الاختبارات التشخيصية الضرورية ويتم أيضا دراسة البواقي، ومن بينها:

#### 1) اختبار دالة الارتباط الذاتي للسلسلة

إذا تم ملاحظة بانه هناك اختلاف جوهري بين دالة الارتباط الذاتي للسلسلة الاصلية مع السلسلة الخاصة المقدره، فهذا مؤشر على فشل في اختيار درجات النموذج المناسب. يتطلب إعادة بناء النموذج وتقديره من جديد. فاذ كان هو الامر، فإننا ننتقل إلى دراسة البواقي (شيخي، 2011، الصفحات 251-252).

- من خلال "مخطط الارتباط Correlogram" لدالة الارتباط الذاتي للبواقي، فانه يجب أن تقع

$$\left[ -\frac{t_{\alpha/2}}{\sqrt{T}}, \frac{t_{\alpha/2}}{\sqrt{T}} \right] \text{ :معاملاتها داخل مجال الثقة:}$$

- تحت فرضية التوزيع الطبيعي لدالة الارتباط الذاتي للبواقي، أي:  $\hat{\rho}(k) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{T}\right)$ ، فان

إحصائية:  $Q'$ -Statistic لـ (Ljung and Box) تتبع بشكل متقارب توزيع  $\chi^2$  بدرجة حرية  $(K-p-q)$ :

$$Q' = T(T+2) \sum_{i=1}^k (T-i) \hat{\rho}^2(i) \sim \chi_a^2(k-p-q)$$

إذا كانت:  $Q < \chi_a^2(k-p-q)$ ، فننا نقبل بالفرضية الصفرية  $H_0$ ، وهذا يعني ان سلسلة البواقي هي مستقرة.

- الخطأ الأبيض يتبع التوزيع الطبيعي ويستعمل لإثبات ذلك اختبار (Jarque & Bera, 1980)، حيث:

$$JB = \frac{T}{6} \beta_1 + \frac{T}{24} (\beta_2 - 3)^2 \sim \chi_{(1-\alpha),2}^2$$

فإذا كانت:  $JB < \chi_{(1-\alpha),2}^2$  فإننا نقبل بالفرضية  $H_0$  للتوزيع الطبيعي لسلسلة البواقي بنسبة معنوية  $\alpha$ .

- من جهة أخرى، يجب أن يكون التباين الشرطي للأخطاء متجانس وذلك من خلال ان معاملات

الارتباط الذاتي الكلية لمربعات البواقي يجب ان تقع داخل مجال الثقة، ففي هذه الحالة تكون سلسلة

مربعات البواقي مستقرة (راجع الفصل الثاني. ا.3).

## 2) اختبار المعنوية الكلية والجزئية للمعالم المقدرة

- عند اختبار كل معلمة مقدرة على حدى، فإنه يتم ذلك بواسطة اختبار Student، ففي النموذج

$ARMA(p, q)$  فإنه يتم اختبار المعالم:  $\hat{\theta}_j, \hat{\phi}_i$  على النحو الآتي:

$$H_0: \hat{\theta}_j = 0 \quad , \quad H_0: \hat{\phi}_i = 0$$

$$H_1: \hat{\theta}_j \neq 0 \quad , \quad H_1: \hat{\phi}_i \neq 0$$

نقيد تحت الفرضية الصفرية  $H_0$ ، فإذا كانت:  $\left| \frac{\hat{\phi}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_i}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}, T-p-q}$ ، فإننا نقبل بالفرضية البديلة  $H_1$

بمستوى معنوية  $\alpha$ ، أي المعلمة  $\hat{\phi}_i$  معنوية احصائياً. كذلك نفس الشيء بالنسبة للمعلمة  $\hat{\theta}_j$ .

- عند اختبار المعنوية الكلية للنموذج، فإننا نستخدم اختبار Fisher، وليكن:

$$H_0: \hat{\theta}_1 = \dots = \hat{\theta}_j = 0 \quad , \quad H_0: \hat{\phi}_1 = \dots = \hat{\phi}_i = 0$$

$$H_1: \hat{\theta}_1 \neq \dots \neq \hat{\theta}_j \neq 0 \quad , \quad H_1: \hat{\phi}_1 \neq \dots \neq \hat{\phi}_i \neq 0$$

$$F_c = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 / (p+q)}{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 / (T-p-q)} = \frac{R^2 / (p+q)}{(1-R^2) / (T-p-q)} \rightsquigarrow F_{(p+q, T-p-q)}$$

فإذا كانت:  $F_c > F_{(p+q, T-p-q)}$ ، فإننا نقبل بالفرضية البديلة  $H_1$  التي تنص على أن معالم النموذج ليست

جميعها مساوية للصفر، أي أن للنموذج معنوية إحصائية.

## 3) معايير المفاضلة بين النماذج المرشحة للتنبؤ

قد تكون النماذج المرشحة كلها جيدة أثناء التطبيق عليها اختبارات التشخيص، غير أنه عملية التنبؤ

تحتاج إلى نموذج مناسب فقط. لأجل اختيار النموذج المناسب، فإنه هناك معايير اللازمة لذلك ومن بينها:

## • معيار 1969: Akaike Information Criterion

صيغة هذا المعيار:

$$AIC(p, q) = \hat{\sigma}^2 \cdot \exp 2 \left( \frac{p+q}{T} \right)$$

-  $\hat{\sigma}^2$ : تباين البواقي المحسوب بطريقة المعقولة العظمى وذلك بقسمة مربعات البواقي على عدد

المشاهدات  $T$ .

-  $(p+q)$ : عدد معالم النموذج وليس مجموع درجتي النموذج.

- نظراً لأهميته القصوى في النماذج المستعملة لأكثر عدد من المشاهدات عدل كمايلي:

$$NAIC(p, q) = \frac{AIC(p, q)}{T}$$

نرشح النموذج الذي يحقق أصغر قيمة للمعيار  $AIC$  او  $NAIC$ .

• معيار Bayesian Information Criterion: Schwarz 1979

لأجل تحقيق خصائص تقاربية، اقترحت صيغة هذا المعيار في:

$$BIC(p, q) = Ln(\hat{\sigma}^2) + \left(\frac{p+q}{T}\right) LnT$$

كذلك، نرشح النموذج الذي يحقق أصغر قيمة للمعيار.

• معيار Hannan-Quinn: 1979

صيغة هذا المعيار:

$$HQ(p, q) = Ln(\hat{\sigma}^2) + (p+q)C \frac{LnLnT}{T}, \quad C > 2$$

كذلك، نختار النموذج الذي يحقق أصغر قيمة للمعيار<sup>1</sup>.

4. مرحلة التنبؤ

بعد اختيار النموذج المناسب سواءً كان نموذج  $AR(p)$ ،  $MA(q)$ ، او  $ARMA(p, q)$  لعملية التنبؤ، فنه

يتم وفق الخطوات التالية (شيخي، 2011، الصفحات 257-260):

- كتابة النموذج المقدر:  $\hat{Y}_t = f(\hat{\phi}, \hat{\theta}, Y_t, \hat{\varepsilon}_t)$

- تعويض  $t$  بـ  $T+h$  حيث:  $h=1, 2, \dots, H$

- تعويض كل القيم المستقبلية للمتغير الخاص بالظاهرة المدروسة بتنبؤاتها، بينما يتم تعويض

الأخطاء المستقبلية بالأصفار والماضية (داخل العينة) بالبواقي.

لأجل توضيح هذه الخطوات، نأخذ النموذج  $ARIMA(p, d, q)$ :

<sup>1</sup> كذلك هنا معايير أخرى للمفاضلة بين النماذج المرشحة من بينها المقارنة بين التباين الكلي لكل نموذج، وهناك طريقة (Goldfrey, 1979)، اختبار Granger-Newbold.

$$\begin{aligned} \Phi(L)(1-L)^d Y_t &= C + \theta(L)\varepsilon_t \\ \Phi(L)\Delta^d Y_t &= C + \theta(L)\varepsilon_t \\ W_t &= \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \dots + \phi_p W_{t-p} + C + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) W_t &= C + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t \\ \Phi(L)W_t &= C + \theta(L)\varepsilon_t \end{aligned}$$

أي أن السلسلة:  $W_t = \Delta^d Y$  تخضع لنموذج  $ARIMA(p, d, q)$ ، ومنه لحساب  $\hat{Y}_{t+h}$  نبدأ بحساب تنبؤ  $W_t$  من أجل الفترة  $T+1$  حيث نستطيع كتابة النموذج في الفترة الزمنية  $T+1$ :

$$W_{T+1} = \phi_1 W_T + \phi_2 W_{T-1} + \dots + \phi_p W_{T-p+1} + C + \varepsilon_{T+1} + \theta_1 \varepsilon_T + \theta_2 \varepsilon_{T-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{T-q+1}$$

ثم نأخذ القيمة المتوقعة الشرطية لـ  $W_{T+1}$  لهدف حساب التنبؤ في الفترة الأولى  $\hat{W}_{T+1}$  كمايلي:

$$\hat{W}_{T+1} = E[W_{T+1} | W_T, \dots, W_1]$$

$$\hat{W}_{T+1} = \hat{\phi}_1 W_T + \hat{\phi}_2 W_{T-1} + \dots + \hat{\phi}_p W_{T-p+1} + \hat{C} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_T + \hat{\theta}_2 \hat{\varepsilon}_{T-1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T-q+1}$$

نستعمل  $\hat{W}_{T+1}$  من أجل الحصول على فترة ثانية  $\hat{W}_{T+2}$  وهكذا حتى الفترة  $\hat{W}_{T+h}$  كمايلي:

$$\hat{W}_{T+2} = E[W_{T+2} | W_T, \dots, W_1]$$

$$\hat{W}_{T+2} = \hat{\phi}_1 \hat{W}_{T+1} + \hat{\phi}_2 W_T + \dots + \hat{\phi}_p W_{T-p+2} + \hat{C} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_T + \hat{\theta}_2 \hat{\varepsilon}_{T-1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T-q+2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hat{W}_{T+h} = E[W_{T+h} | W_T, \dots, W_1]$$

$$\hat{W}_{T+h} = \hat{\phi}_1 \hat{W}_{T+h-1} + \dots + \hat{\phi}_p W_{T+h-p} + \hat{C} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{T+h-1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+h-q}$$

لقياس دقة التنبؤ<sup>1</sup>، فإننا نستخدم المتوسط المطلق للخطأ النسبي الذي يعبر على متوسط الفرق بين

المشاهدة والتنبؤ لنفس الفترة الزمنية، وهو كمايلي:

$$MRAE = H^{-1} \sum_{h=1}^H \frac{|\hat{Y}_{T+h} - Y_{T+h}|}{|Y_{T+h}|} \times 100$$

يمكن أن يؤخذ في شكل نسبة:

$$PME = H^{-1} \sum_{h=1}^H \left( \frac{Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h}}{Y_{T+h}} \right)$$

يمكن أيضا استخدام متوسط مربع الخطأ الذي يعتبر أكثر فعالية من المعيار السابق، اي:

$$QME = H^{-1} \sum_{h=1}^H (\hat{Y}_{T+h} - Y_{T+h})^2$$

<sup>1</sup> إذا لم نعتمد على خطوة معايير المفاضلة بين النماذج المرشحة للتنبؤ، فنواصل عملية التنبؤ لكل النماذج المشخصة. ونختار احسن نموذج الذي تكون لديه دقة تنبؤ عالية بالاعتماد على:  $QME, PME, MRAE$  والاحسن من بين هذه النماذج المتنبأ بها هو النموذج الذي تكون له قيمة اقل لـ:  $QME, PME, MRAE$ .



$$E(Y_t) = Y_0 = \mu$$

$$V(Y_t) = E(Y_t - Y_0)^2$$

$$V(Y_t) = E\left(\sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}\right)^2 = t\sigma_\varepsilon^2$$

التباين مرتبط بالزمن، وبالتالي نموذج الانتقال العشوائي هذا غير مستقر بالنسبة الى التباين وهو شرط كاف لكي ان تكون السلسلة  $Y_t$  غير مستقرة.

### تمرين 2

لتكن لدينا السلسلة الزمنية التالية:

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Y_t$	123	130	125	138	145	142	141	146	147	157	150	145

1. بافتراض ان الفجة الزمنية:  $k = 4$ . قم بحساب معاملات الارتباط الذاتي لهذه السلسلة مع التمثيل

البياني لها وما هو تعليقك على هذا؟

2. مستعملا إحصائية Ljung-Box، هل هذه السلسلة هي تشويش ابيض؟

### الحل

1. انطلاقا من العلاقات ادناه نقوم بالحساب كما هو موضح في الجدول الموالي:

$t$	$Y_t$	$(Y_t - \bar{Y})$	$(Y_{t-k} - \bar{Y})$				$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})$				$(Y_t - \bar{Y})^2$
1	123	-17.75	$k=1$								315.0625
2	130	-10.75	-17.75	$k=2$			190.81				115.5625
3	125	-15.75	-10.75	-17.75	$k=3$		169.31	279.56			248.0625
4	138	-2.75	-15.75	-10.75	-17.75	$k=4$	43.31	29.56	48.8125		7.5625
5	145	-4.25	-2.75	-15.75	-10.75	-17.75	11.687	-66.937	-45.6875	-75.4375	18.0625
6	142	1.25	-4.25	-2.75	-15.75	-10.75	5.31	-3.437	-19.68.75	-13.4375	1.5625
7	141	0.25	1.25	-4.25	-2.75	-15.75	0.31	1.0625	-0.6875	-3.9375	0.0625
8	146	5.25	0.25	1.25	-4.25	-2.75	1.31	6.5625	22.3125	-14.4375	27.5625
9	147	6.25	5.25	0.25	1.25	-4.25	32.81	1.5625	7.8125	26.5626	39.0625
10	157	16.25	6.25	5.25	0.25	1.25	101.56	85.3125	4.0625	20.3125	264.0625
11	150	9.25	16.25	6.25	5.25	0.25	50.31	57.8125	48.5625	2.3125	85.5625
12	145	4.25	9.25	16.25	6.25	5.25	39.31	69.0625	26.5625	22.3125	18.0625
							722.6875	460.125	92.0625	-35.75	1140.25

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$\hat{\rho}(1) = \frac{722.6785}{11.4025} = 0.6334$$

$$\hat{\rho}(2) = \frac{460.125}{11.4025} = 0.4035$$

$$\hat{\rho}(3) = \frac{92.0625}{11.4025} = 0.0807$$

$$\hat{\rho}(4) = \frac{-35.75}{11.4025} = -0.0313$$

نوضح هذه المعاملات في الجدول الموالي:

$k$	1	2	3	4
$\hat{\rho}(k)$	0.6334	0.4035	0.0807	-0.0313

$$H_0 : \rho(k) = 0$$

$$H_1 : \rho(k) \neq 0$$

نقوم بحساب مجال الثقة:

$$\rho(k) = 0 \pm t^{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{T}}$$

$$\rho(k) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

فاذا كان المعامل المحسوب  $\hat{\rho}(k)$  خارج مجال الثقة، فهو يختلف عن الصفر بنسبة معنوية  $\alpha$  (بشكل عام

ومنه:  $\alpha = 5\%$  و  $t^{\alpha/2} = 1.96$ ،

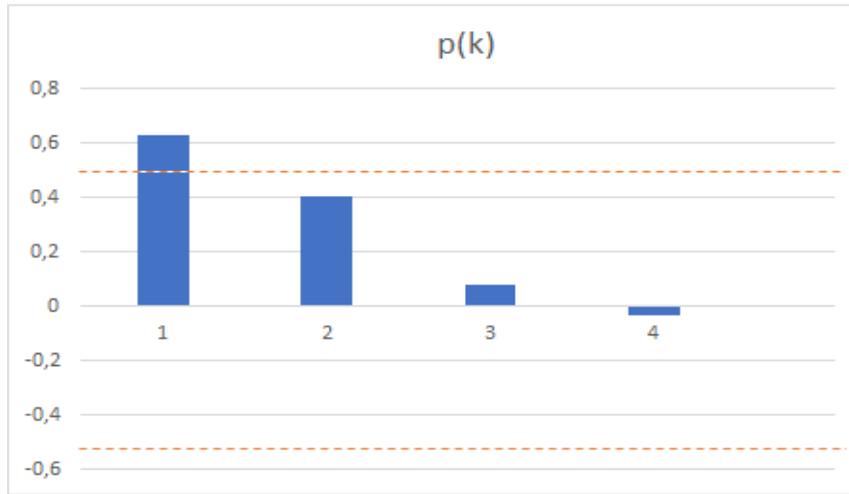
$$\rho(k) \in \left[0 \pm t^{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{T}}\right]$$

$$\rho(k) \in \left[0 \pm 1.96 \frac{1}{\sqrt{12}}\right]$$

$$\rho(k) \in [-0.5658, +0.5658]$$

نلاحظ بان معاملات دالة الارتباط تقع داخل هذا المجال، الا ان المعامل:  $\hat{\rho}(1) = 0.6334$  هو الوحيد الذي يقع خارج هذا المجال، وبالتالي يوجد على الأقل معامل يختلف معنويا عن الصفر، وعليه لا يمكننا قبول الفرضية الصفرية  $H_0$ ، وبالتالي السيرة ليست تشويش ابيض لأنها ترتبط ذاتيا، أي انها غير مستقرة.

التمثيل البياني للسلسلة الزمنية:



2. بالاعتماد على إحصائية Ljung-Box، فان:

$$Q' = T(T+2) \sum_{i=1}^K \frac{\hat{\rho}^2(i)}{T-k} \sim \chi^2_{1-\alpha, k}$$

$$Q' = 12(12+2) \left[ \frac{(0.6334)^2}{12-4} + \frac{(0.4031)^2}{12-4} + \frac{(0.0807)^2}{12-4} + \frac{(-0.0313)^2}{12-4} \right]$$

$$Q' = 12$$

من جدول توزيع  $\chi^2$  وعند مستوى المعنوية:  $(1-\alpha) = 0.95$ ، بدرجة حرية:  $k = 4$  نجد:  $\chi^2_{0.95,4} = 0.771$ ، وهي أقل من القيمة المحسوبة:  $Q' = 12$ ، ومنه معاملات الارتباط الذاتي تختلف معنويا عن الصفر، هذا يعني ان السلسلة الزمنية المدروسة ليست تشويش ابيض لأنها ترتبط ذاتيا أي انها غير مستقرة.

تمرين 3

اوجد دالة الارتباط الذاتي لسيرورة التشويش الأبيض White Noise  $\varepsilon_t$ .

الحل

تكون  $\varepsilon_t$  سيرورة تشويش ابيض إذا كان:

- [1]  $E(\varepsilon_t) = 0$
- [2]  $V(\varepsilon_t) = \gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2, \forall t$
- [3]  $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \gamma(k) = 0, k \neq 0, \forall t$

وبالتالي:

$$[4] \quad \rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}$$

تمرين 4

اكتب النموذج  $ARIMA(1,1,1)$  في الشكل النهائي له؟

الحل

تكون الصياغة كالآتي، مع العلم ان هذا النموذج هو مستقر عند التفاضل الأول:

$$\Delta Y_t = \phi_1 \Delta Y_{t-1} + c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

بإدخال عامل التأخير  $L$ ، يصبح النموذج:

$$\Delta Y_t = \phi_1 \Delta Y_{t-1} + c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

$$\Phi(L) y_t = \theta(L) \varepsilon_t \Leftrightarrow ARMA(p, q)$$

اذن النموذج الذي هو امانا هو:  $(1 - \phi_1 L)(1 - L) = (1 - \theta_1 L) \varepsilon_t$

بوضع:  $Z_t = (1 - L)y_t$ ، نجد:

$$(1 - \phi_1 L)Z_t = (1 - \theta_1 L)\varepsilon_t$$

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

بالتعويض عن:  $Z_t = y_t - y_{t-1}$

$$y_t - y_{t-1} = \phi_1 (y_t - y_{t-1}) + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = (1 + \phi_1) y_{t-1} - \phi_1 y_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

وكأنها تبدو سيرورة:  $ARMA(2,1)$

## تمرين 5

اثبت ان:  $AR(1) = MA(\infty)$ 

## الحل

صيغة  $AR(1)$ :

$$AR(1): Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

بوضع:  $\phi_0 = 0$ ، نجد:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t$$

إعادة كتابة الصيغة بواسطة معامل التأخير  $L$ ، يصبح النموذج:

$$(1 - \phi_1 L)Y_t = \varepsilon_t$$

$$Y_t = \left( \frac{1}{1 - \phi_1 L} \right) \varepsilon_t$$

نلاحظ ان الصيغة الأخيرة تشكل مفهوم متتالية هندسية، أي:

$$Y_t = \left[ (\phi_1 L)^0 + (\phi_1 L)^1 + (\phi_1 L)^2 + \dots \right] \varepsilon_t$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \phi_1^1 L^1 \varepsilon_t + \phi_1^2 L^2 \varepsilon_t + \dots$$

نضع:  $\phi_1^1 = \theta_1, \phi_1^2 = \theta_2, \dots$ ، ينتج لنا:

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 L^1 \varepsilon_t + \theta_2 L^2 \varepsilon_t + \dots$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

الصيغة الأخيرة تمثل سيرورة  $MA(\infty)$ 

## تمرين 6

اليك النماذج الثلاث الخاصة باختبار Dickey and Fuller:

$$[1] \quad Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$[2] \quad \Delta Y_t = \rho_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$[3] \quad \Delta Y_t = \rho_1 Y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j Y_{t-j+1} + c + bt + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \rightarrow i.i.d$$

1. برر كيف تم الانتقال من المعادلة [1] الى [2]؟

2. قم بوضع الفرضيات المناسبة لهذا الاختبار؟  
3. ماذا تمثل المعادلة [3] ولماذا يتم الانتقال إليها؟

## الحل

1. دوما نستفيد من خاصة نموذج الانتقال العشوائي، أي:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \phi_1 Y_{t-1} - Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \rho_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

2. الفرضيات المناسبة لهذا الاختبار.

$H_0 : \phi_1 = 1 \text{ or } \phi_1 - 1 = 0$ : السلسلة الزمنية غير مستقر:

$H_1 : \phi_1 \neq 1 \text{ or } |\rho| < 1$ : السلسلة الزمنية مستقر:

3. تمثل المعادلة [3] معادلة Dickey and Fuller Augmented ويتم الاستعانة بها عندما تكون أخطاء النموذج السابق تعاني من الترابط الذاتي فيما بينها من خلال ادراج عدد معين من التباطؤات حتى تصبح الأخطاء العشوائية ضجة بيضاء.

## تمرين 7

اليك النموذج التالي:

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

1. اثبت ان هذه السلسلة  $Y_t$  بانها غير مستقرة.  
2. حول هذه السلسلة  $Y_t$  الى سيرة مستقرة.

## الحل

1. اثبات بان هذه السلسلة هي غير مستقرة:

$$[1] \quad E(Y_t) = \delta + E(Y_{t-1})$$

$$E(Y_t) \neq E(Y_{t-1})$$

وبالتالي هذه السلسلة هي غير مستقرة في التوقع وهو شرط كاف لعدم استقراريتها، بدون حساب التباين والتباين المشترك.

2. التحويل الى الحالة المستقرة.

نذكر على انه قبل تطبيق الطريقة المناسبة سواء طريقة الفروقات او الطريقة الانحدارية لجعل السلسلة الزمنية مستقرة لابد من معرفة المسبقة لأصل مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية التي قد تكون ناتجة عن نموذج الانتقال العشوائي او عامل الزمن.

في هذا النموذج نلاحظ ان الأخطاء هي تشويش ابيض وبالتالي يمكن تطبيق طريقة الفروقات، أي:

$$Z_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta + \varepsilon_t$$

$$Z_t = \delta + \varepsilon_t$$

ومن ثم نتحقق من شروط الاستقرار الثلاثة:

$$[1] \quad E(Z_t) = \delta, \forall t$$

$$[2] \quad V(Z_t) = V(\delta + \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, \forall t$$

التوقع والتباين لا يعتمدان على الزمن  $t$ .

$$[3] \quad \gamma(k) = \text{cov}(Z_t, Z_{t-k})$$

$$\gamma(k) = \text{cov}(\delta + \varepsilon_t, \delta + \varepsilon_{t-k}) = 0, k \neq 0$$

دالة التباين المشترك غير مرتبطة بالزمن  $t$ ، وبالتالي  $Z_t$  هي مستقرة.

## تمرين 8

إذا كانت العملية  $Y_t$  على الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \mu_t$$

$$\mu_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_\mu^2)$$

$\beta_0, \beta_1$ : معالم النموذج،  $\mu_t$  سيرورة عشوائية مستقرة لها توقع  $\mu$  وتباين  $\sigma_\mu^2$ .

1. اثبت ان هذه السيرورة  $Y_t$  بانها غير مستقرة.

2. كيف يمكن تحويلها الى سلسلة مستقرة؟

## الحل

1. اثبات بان هذه السيرورة هي غير مستقرة:

$$[1] \quad E(Y_t) = E(\beta_0 + \beta_1 t + \mu_t)$$

$$E(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \mu, \forall t$$

وبالتالي يوجد اتجاه عام في متوسط السلسلة وهو شرط كاف لعدم استقراريتها، بدون حساب التباين والتباين المشترك.

2. التحويل الى الحالة المستقرة.

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1(t-1) + \mu_{t-1}$$

$$W_t = \Delta Y_t = \beta_1 + (\mu_t - \mu_{t-1})$$

$$[1] \quad E(W_t) = \beta_1 + \mu - \mu = \beta_1$$

وبالتالي السلسلة المحولة مستقرة في التوقع

$$[2] \quad V(W_t) = V(\beta_1) + V(\mu_t - \mu_{t-1})$$

$$= 0 + \sigma_\mu^2 + \sigma_\mu^2 - 2\text{cov}(\mu_t, \mu_{t-1})$$

$$= 2\sigma_\mu^2 - 2\gamma(1)$$

اذن السلسلة المحولة مستقرة في التباين لأنه لا تعتمد على الزمن  $t$ .

$$[3] \quad \text{cov}(W_{t-1}, W_t) = \gamma(1) - \sigma_\mu^2 - \gamma(2) + \gamma(1)$$

$$= 2\gamma(1) - \sigma_\mu^2 - \gamma(2)$$

توضيح:

$$\text{cov}(W_{t-1}, W_t) = E[(W_t - E(W_t))(W_{t-1} - E(W_{t-1}))]$$

$$= E[(W_t - \beta_1)(W_{t-1} - \beta_1)]$$

$$= E[(\mu_t - \mu_{t-1})(\mu_{t-1} - \mu_{t-2})]$$

$$= E(\mu_t \mu_{t-1} - \mu_t \mu_{t-2} - \mu_{t-1}^2 + \mu_{t-1} \mu_{t-2})$$

$$= \gamma(1) - \gamma(2) - \sigma_\mu^2 + \gamma(1)$$

$$= 2\gamma(1) - \sigma_\mu^2 + \gamma(2)$$

$$[3] \quad \text{cov}(W_{t-2}, W_t) = \gamma(2) - \gamma(1) - \gamma(3) + \gamma(2)$$

$$= 2\gamma(2) - \sigma_\mu^2 - \gamma(2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\text{cov}(W_{t-k}, W_t) = 2\gamma(2) - \gamma(k-1) - \gamma(k+1)$$

دالة التباين المشترك لا تعتمد على الزمن  $t$ ، وانما على الفجوة الزمنية  $k$  و  $W_t$  تعتبر مستقرة.

## تمرين 9

لتكن السلسلة الزمنية  $Y_t$ :

$$Y_t = 0.7Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

هل هذه السلسلة الزمنية  $Y_t$  مستقرة؟ اشرح.

الحل

لنتحقق من شروط الاستقرار الثلاثة:

$$\begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.5 + 0.7 = 0.2 < 1 \\ -0.5 - 0.7 = -0.9 < 1 \\ -1 < 0.5 < 1 \Leftrightarrow |0.5| < 1 \end{cases}$$

شروط الاستقرار الثلاثة هي محققة، وبالتالي السلسلة الزمنية  $Y_t$  مستقرة.

## تمرين 10

إذا كانت  $Y_t$  سيرة متوسطة متحركة من الرتبة الأولى، حيث  $\theta_1 = 0.5$ .

1. أوجد دالة الارتباط الذاتي لهذه العملية، ثم اثبت انه يوجد قيمة أخرى للمعلمة تحقق هذه الدالة؟
2. ما هي القيمة التي تحقق شروط الانعكاس (الاستقرارية)؟

الحل

1. السيرة  $Y_t$  من المتوسطات ذات الدرجة الأولى، أي:

$$MA(1): Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

حيث أن:

$$[1] \quad E(Y_t) = \theta_0$$

$$[2] \quad V(Y_t) = \gamma(0) = 0 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 \\ = \sigma_\varepsilon^2 [1 + \theta_1^2]$$

$$[3] \quad \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \gamma(1) = E(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y}) \\ = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) \\ = 0 + 0 + \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 + 0 \\ = \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$[4] \quad \rho(k) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)} = \frac{\theta_1}{(1 + \theta_1^2)}$$

إذا كانت  $\theta_1 = 0.5$  فان:

$$\rho(1) = \frac{0.5}{1 + (0.5)^2} = 0.4$$

أيضا هناك قيمة أخرى تحقق المعادلة  $\rho(1)$ :

$$\theta_1 = \frac{1}{0.5} = 2 \Rightarrow \rho(1) = \frac{2}{1 + (2)^2} = 0.4$$

يعني ان القيمة  $\theta_1 = 2$  تعطي نفس دالة الارتباط الذاتي التي تعطيها القيمة  $\theta_1 = 0.5$ ، وبالتالي يوجد

نموذجان:

$$\rho(k) = \begin{cases} 0.4 \Rightarrow \theta_1 = 0.5 \\ 0.4 \Rightarrow \theta_1 = 2 \end{cases}$$

2. النموذج الأول  $MA(1)$  بمعلمة  $\theta_1 = 0.5$  هو الذي يحقق شروط الانعكاس، لان:  $|0.5| < 1$

### 3. نماذج اشعة الانحدار الذاتي

## Vector Autoregressive (VAR)

"احذر من الافتراضات النظرية. دع البيانات تتحدث (Sims, 1996)". هذه الجملة وحدها يمكن أن تلخص العمل الذي يكافئ من اجله Sims. في منتصف السبعينيات وأول صدمة نفطية مثلت بالتأكيد نهاية ازدهار الثلاثينات وهذا بسبب ضعف النمذجة الاقتصادية القياسية الكلاسيكية مع العديد من المعادلات الهيكلية. العديد من الانتقادات والفضل في مواجهة بيئة اقتصادية مضطربة للغاية، حيث كانت التنبؤات باستخدام هذه النماذج ضعيفة للغاية. الانتقادات الرئيسية الموجهة ضد هذه النماذج الهيكلية تتعلق بتزامن العلاقات ومفهوم المتغير الخارجي، أي كانت النمذجة الاقتصادية في السبعينيات تستند إلى العديد من المعادلات الهيكلية المرتبطة ببعضها بواسطة متغيرات تظهر في عدة معادلات (أي نماذج معادلات متزامنة). ثم اقترح (Sims, 1980) نمذجة متعددة المتغيرات تكون قيودها الوحيدة هي اختيار المتغيرات المحددة وعدد التأخيرات المتكاملة. هذه المقالة كانت هي نقطة البداية لنقده لنماذج الاقتصاد الكلي، وخاصة تلك التي كانت مصدر إلهام لكينز. بالنسبة إلى Sims، فان نماذج الاقتصاد الكلي الكينزية تعاني من العديد من أوجه القصور (Gossé & Guillaumin. 2013. p. 307). بناءً على هذا سوف نتعرض في هذا الفصل إلى:

I. نماذج الانحدار الذاتي المتعدد.

II. تقدير معلمات نموذج VAR.

III. ديناميكية نموذج VAR.

IV. السببية.

### 1. نماذج الانحدار الذاتي المتعدد Multivariate Autoregressive Models

سنعرض في هذا الجزء عددا معينا من المفاهيم من أجل فهم ديناميكية الارتباط بين السلاسل الزمنية المختلفة (مفاهيم التحليل الهيكلي، السببية، التكامل المشترك.....). سنرى أيضا فئة من النماذج، وتعميم نماذج  $AR(p)$  أحادية المتغير في إطار متعدد المتغيرات: نماذج اشعة الانحدار الذاتي  
Vector Autoregressive: VAR

#### 1. الصيغة العامة لنموذج VAR

يكتب نموذج VAR لـ  $k$  متغير و  $p$  تباطؤ  $VAR(p)$  في شكل مصفوفي (Charpentier, 2006, pp. 14-

:16)

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \begin{Bmatrix} Y_t^1 \\ Y_t^2 \\ \vdots \\ Y_t^k \end{Bmatrix}, \Phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_{i1}^1 & \phi_{i1}^1 & \dots & \phi_{i1}^k \\ \phi_{i2}^1 & \phi_{i2}^1 & \dots & \phi_{i2}^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{ik}^1 & \phi_{ik}^1 & \dots & \phi_{ik}^k \end{Bmatrix}, \Phi_0 = \begin{Bmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \\ \vdots \\ \phi_k^0 \end{Bmatrix}, \varepsilon_t = \begin{Bmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \varepsilon_t^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_t^k \end{Bmatrix}$$

مصفوفة التباين-التباين المشترك للأخطاء  $\Sigma = E(\varepsilon_t', \varepsilon_t)$  هنا غير معروفة، يمكن كتابتها على الشكل:

$$(1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p) Y_t = \Phi_0 + \varepsilon_t$$

$$\Phi(L) Y_t = \Phi_0 + \varepsilon_t$$

حيث  $\Phi$  هي مصفوفة كثير الحدود ذات البعد  $(k \times k)$  للمتغيرات  $Y_t^1, \dots, Y_t^k$  التي تعتبر كسلاسل زمنية مستقرة و  $\varepsilon_t^1, \dots, \varepsilon_t^k$  ذات ضجة بيضاء ولها تباينات ثابتة  $\sigma_{\varepsilon_1}^2, \dots, \sigma_{\varepsilon_k}^2$ .

السيرورة  $Y_t$  مستقرة (أو حتى في الفرق الثاني) إذا تحققت الفرضيات التالية:

(i)  $E(Y_t) = \mu, \forall t$

(ii)  $V(Y_t) < \infty$

(iii)  $COV(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] = \Gamma_k, \forall t$

حيث ان التوقع والتباين المشترك مستقلان عبر الزمن والتباين هو لانهائي وثابت.

نشير الى ان السيروورة  $VAR(p)$  تكون مستقرة إذا كان كثير الحدود المعرف انطلاقا من محدد المصفوفة:  $|I - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p| = 0$  له جذور تقع خارج دائرة الوحدة. (Hamilton, 1994, p. 259).

## 2. الصيغة العامة لنموذج ARMAX أو VARMA

نماذج ARMAX هي تعميم لسيروورات  $VAR(p)$ ، تماما مثل سيروورات  $ARMA(p, q)$  التي هي تعميم لسيروورات  $AR(p)$  (Charpentier, 2006, pp. 16-17):

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \Theta_1 \varepsilon_{t-1} + \Theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \Theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

حيث ان:  $\Phi_0, \Theta$  هما مصفوفتان ذات البعد  $(k \times k)$  للمتغيرات. ومن الممكن ان تتصف السيروورة VMA (تم الحصول عليها عندما  $p=0$ ): بالمتوسطات المتحركة المتعددة المتغيرات. وهو نموذج  $ARMA(p, q)$  متعدد المتغيرات او  $VARMA(p, q)$  الذي يصطلح تسميته أيضا بـ:  $ARMAX(p, q)$ .

- تكون السيروورات VAR قابلة للقلب دائما، ومستقرة، إذا كانت جذور كثيرات الحدود المميزة لها تقع خارج دائرة الوحدة.

- تكون السيروورات VMA قابلة للقلب دائما، ومستقرة، إذا كانت جذور كثيرات الحدود المميزة لها تقع خارج الوحدة.

- تتوقف شروط القلب والاستقرار لسيروورات ARMA على أجزاء السيروورات VAR و VMA.

قد يتضمن نموذج VAR متغيرات مستقلة ويسمى بنموذج Structural Vector Autoregressive:

SVAR الذي يأخذ الشكل التالي (شيخي، 2011، الصفحات 271-272):

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} \dots + \Phi_p Y_{t-p} + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + \dots + B_m X_{t-m} + \varepsilon_t$$

$Y_{1,t}, \dots, Y_{k,t}$ : متغيرات داخلية.

$X_{1,t}, \dots, X_{r,t}$ : متغيرات خارجية يمكن ان تحتوي على مركبات عشوائية وغير عشوائية. ويطلق عليه باسم

النظام الخطي، كما يسمى بنموذج المعادلات الأنية الحركية (الديناميكية). باستعمال معامل التباطؤ  $L$  في

النموذج، حيث يكون الشكل المختصر كمايلي:

$$\Phi(L)Y_t = B(L)X_t + \varepsilon_t$$

وبضرب الشكل المختصر بـ:  $\Phi^{-1}(L)$ :

$$Y_t = \Phi^{-1}(L)B(L)X_t + \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t$$

حيث  $\Phi(L)$  يسمى بالشكل النهائي للنظام ويكون هذا الشكل موجودا في حالة ما إذا كانت المصفوفة قابلة للقلب تحت الشرط التالي:  $\det(\Phi(L)) \neq 0$

## II. تقدير معلمات نموذج VAR

لا يمكن تقدير معلمات النموذج VAR إلا على السلاسل الزمنية المستقرة، وهذا الا بعد دراسة خصائص السلاسل الزمنية.

### 1. طريقة التقدير

في حالة النموذج VAR، يمكن تقدير كل من المعادلات بواسطة طريقة المربعات الصغرى بشكل مستقل عن بعضها البعض (أو بطريقة المعقولة العظمى). ليكن النموذج المقدر  $VAR(p)$  (Bourbonnais, 2015, p. 279):

$$Y_t = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 Y_{t-1} + \hat{\Phi}_2 Y_{t-2} + \dots + \hat{\Phi}_p Y_{t-p} + \hat{\varepsilon}_t$$

$\varepsilon$ : هو شعاع ذو البعد  $(k \times 1)$  للبواقي المقدرة  $(\hat{\varepsilon}_{1t}, \hat{\varepsilon}_{2t}, \dots, \hat{\varepsilon}_{kt})$ . ونسب  $\sum_{\varepsilon}$ : مصفوفة التباين-التباين المشترك لبواقي التقدير لهذا النموذج.

- لا يمكن تقدير معاملات نموذج VAR انطلاقا من سلاسل زمنية غير مستقرة، وهذا الا بعد دراسة خصائصها الزمنية. اما ان تكون مستقرة بعد اخذ الفروقات لها وهذا قبل تقدير المعلمات في حالة اتجاه عام عشوائي، أو من الممكن إضافة مركبة الاتجاه العام إلى صيغة نموذج VAR في حالة اتجاه عام محدد (ثابت). أيضا، يمكن إضافة متغيرات صورية إلى مواصفات VAR من أجل تصحيح التغيرات الموسمية أو الفترات الزمنية غير العادية.

### 2. تحديد درجة الابطاء

لتحديد عدد التأخيرات في نموذج VAR، فإننا نستخدم معايير المعلومات Akaike و Schwarz ومعيار Hannan-Quin، حيث يمكن استخدام هذه المعايير لتحديد درجة التأخر  $p$  للنموذج. يرتكز إجراء اختيار فترة الابطاء على تقدير جميع معادلات النموذج VAR لأجل أي فترة أو درجة من 0 إلى  $p$  (  $p$  هو الحد الأقصى للتأخير المسموح به من قبل النظرية الاقتصادية أو البيانات المتاحة). يتم حساب الدالتين:  $AIC(p)$ ,  $SC(p)$  (Bourbonnais, 2015, pp. 279-280) والدالة  $HQ(p)$  على النحو التالي:

$$AIC(p) = Ln \left[ \det \left| \Sigma_{\hat{\varepsilon}} \right| \right] + \frac{2k^2 p}{T}$$

$$SC(p) = Ln \left[ \det \left| \Sigma_{\hat{\varepsilon}} \right| \right] + \frac{k^2 Ln(T)}{T}$$

$$HQ(p) = Ln \left[ \det \left| \Sigma_{\hat{\varepsilon}} \right| \right] + \frac{2 \log \log T}{T} k^2 p$$

-  $k$ : عدد المتغيرات في النظام.

-  $T$ : عدد المشاهدات.

-  $p$ : عدد فترات الابطاء.

-  $\Sigma_{\hat{\varepsilon}}$ : مصفوفة التباين-التباين المشترك لبواقي التقدير لهذا النموذج.

يختار التباطؤ الأمثل وذلك عن طريق تدنية المعايير الثلاثة:  $AIC(p)$ ,  $SC(p)$ ,  $HQ(p)$  ويمكن أيضا استخدام نسبة المعقولية انطلاقا من تباين البواقي إذا كان:  $\Sigma_{\hat{\varepsilon}}^1$  تباين بواقي النموذج المقيد و  $\Sigma_{\hat{\varepsilon}}^0$  تباين النموذج الأول (غير المقيد)، فان إحصائية نسبة المعقولية هي (شيخي، 2011، الصفحات 272-273):

$$T \left( Ln \left[ \det \Sigma_{\hat{\varepsilon}}^1 \right] - Ln \left[ \det \Sigma_{\hat{\varepsilon}}^0 \right] \right) \rightsquigarrow \chi_{p=c}^2$$

تتبع توزيع  $\chi^2$  بدرجة حرية تساوي عدد القيود.

### 3. التنبؤ

بعد تحديد درجة التأخير المثلى  $p$  وتقدير معاملات النموذج، فانه يمكننا من القيام بعملية التنبؤ في الفترة  $T$  لأجل أفق فترة التنبؤ، ولفهم هذه المنهجية نأخذ على سبيل المثال النموذج  $VAR(1)$  على النحو التالي (Bourbonnais, 2015, p. 280):

$$\hat{Y}_T(1) = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 Y_T$$

- من اجل الفترة 2، يكون التنبؤ المحسوب كمايلي:

$$\hat{Y}_T(2) = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 \hat{Y}_T(1) = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1^2 Y_T$$

- من اجل الفترة 3، يكون التنبؤ المحسوب كمايلي:

$$\hat{Y}_T(3) = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 \hat{Y}_T(2) = (I + \hat{\Phi}_1 + \hat{\Phi}_1^2) \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1^3 Y_T$$

- بصفة عامة لأجل الأفق  $h$ ، يكون التنبؤ المحسوب كمايلي:

$$\hat{Y}_T(h) = (I + \hat{\Phi}_1 + \hat{\Phi}_1^2 + \dots + \hat{\Phi}_1^{h-1}) \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1^h Y_T$$

عندما يؤول  $h$  إلى ما لا نهاية ( $h \rightarrow \infty$ )، نجد أن التنبؤ يؤول إلى قيمة ثابتة (حالة مستقرة) لان:

$(\hat{\Phi}_1^h \rightarrow 0)$ ، وتوقع مصفوفة خطأ التنبؤ يكون معدوم وتباينه معطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{\varepsilon} (h) = M_0 \sum_{\varepsilon} M'_0 + M_0 \sum_{\varepsilon} M'_0 + \dots + M_{h-1} \sum_{\varepsilon} M'_{h-1}$$

حيث  $M_i$  محسوبة بصيغة التراجع:

$$M_i = \sum_{j=1}^{\min(p,i)} \hat{A}_j M_{i-j}, \quad i=1,2,\dots, \quad M_0 = I$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$M_1 = \hat{\Phi}_1$$

$$M_2 = \hat{\Phi}_1 M_1 + \hat{\Phi}_2 M_0 = \hat{\Phi}_1^2 + \hat{\Phi}_2$$

$$M_3 = \hat{\Phi}_1 M_2 + \hat{\Phi}_2 M_1 + \hat{\Phi}_3 M_0 = \hat{\Phi}_1^3 + \hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_2 + \hat{\Phi}_2 \hat{\Phi}_1 + \hat{\Phi}_3$$

$$\dots M_{h-1}$$

تباين خطأ التنبؤ  $(\hat{\sigma}_T^2(h))$  لكل قيمة لتنبؤات  $k$  متغيرة، يمكن قراءته من القطر الاول للمصفوفة:

$\sum_{\varepsilon} (h)$ ، وبالتالي مجال التنبؤ عند المستوى  $(1 - \alpha/2)$  يعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{Y}_T(h) \pm t^{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_T^2(h)$$

$$\hat{Y}_{T+h} \in [\hat{Y}(h) - t^{\alpha/2} V(\varepsilon_{T+h}), \hat{Y}(h) + t^{\alpha/2} V(\varepsilon_{T+h})]$$

حيث:  $t^{\alpha/2}$  هي القيمة الحرجة للتوزيع الطبيعي.

### III. ديناميكية نموذج VAR

إن نماذج VAR تسمح بتحليل تأثيرات السياسة الاقتصادية، وذلك من خلال محاكاة الصدمات العشوائية (كثيرا ما يستخدم مصطلح الابتكار Innovation أيضا) وتحليل تباين الخطأ. ومع ذلك، يتم إجراء هذا التحليل بافتراض ثبات البيئة الاقتصادية "مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة أي على حالها".

#### 1. تمثيل متجه المتوسطات المتحركة VMA للسيرورة VAR

لقد رأينا في السابق ان نموذج  $AR(1)$  له تمثيل  $MA(\infty)$ . فانه قياسا على ذلك، يمكننا أن نثبت بان  $VAR(1)$  له تمثيل  $VMA(\infty)$ . النموذج من هذا الشكل سيسمح لنا بقياس الأثر على القيم الحالية لاختلاف الصدمات  $\varepsilon_t$  و  $\varepsilon_{2t}$ . وليكن النموذج  $VAR(p)$  المستقر التالي (Bourbonnais, 2015, pp. 284-285):

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

وليكن التمثيل للنموذج  $VAR(\infty)$  كالآتي:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + M_1 \varepsilon_{t-1} + M_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} M_i \varepsilon_{t-i}$$

$$\mu = (I + \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_p)^{-1} \times \Phi_0$$

$$M_i = \sum_{j=0}^{\min(p,i)} M_j \varepsilon_{t-j}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad M_0 = I \quad \text{مع}$$

من خلال هذا التمثيل، تظهر المصفوفة  $M$  على أنها "مضاعف للأثر"، أي أنه من خلال هذه المصفوفة تنعكس الصدمة طوال العملية. فالتغير في لحظة زمنية معينة  $t$  سوف يؤثر على كل القيم الموالية  $Y_t$  وبالتالي فإن تأثير الصدمة سوف يستمر ويقل حتى يتلاشى.

## 2. تحليل الصدمات ودوال الاستجابة Impulse Analysis

نأتي الآن إلى جوهر تحليل نماذج  $VAR$ ، حيث ان نموذج  $VAR$  ينمذج بشكل أساسي العلاقات الديناميكية بين مجموعة من المتغيرات المختارة لوصف ظاهرة اقتصادية معينة. الفكرة العامة لتحليل الصدمات ودوال الاستجابة هي انها تسمح لنا بدراسة تأثير صدمة متعلقة بتطور أحد المتغيرات على باقي المتغيرات الاخرى للنظام.

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1^0 \\ \hat{\phi}_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{11}^0 & \hat{\phi}_{11}^2 \\ \hat{\phi}_{21}^1 & \hat{\phi}_{21}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{1t} \\ \hat{\varepsilon}_{2t} \end{pmatrix}$$

التغير في  $\hat{\varepsilon}_{1t}$  خلال فترة زمنية معينة يكون له نتيجة على  $Y_{1t}$  و  $Y_{1t+1}$  ثم على  $Y_{1t+2}$ ، فاذا حدثت صدمة

في اللحظة  $t$  على  $\hat{\varepsilon}_{1t}$  تساوي 1 فان اثرها يكون كالآتي:

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- في الفترة } t:$$

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_{1t+1} \\ \Delta Y_{2t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{11}^0 & \hat{\phi}_{11}^2 \\ \hat{\phi}_{21}^1 & \hat{\phi}_{21}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- في الفترة } t+1:$$

$$\dots \begin{pmatrix} \Delta Y_{1t+2} \\ \Delta Y_{2t+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{11}^0 & \hat{\phi}_{11}^2 \\ \hat{\phi}_{21}^1 & \hat{\phi}_{21}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t+1} \\ Y_{2t+1} \end{pmatrix} \quad \text{- في الفترة } t+2:$$

هذه القيم المحسوبة تعطي دالة استجابة وتتحقق بفرضية عدم وجود ارتباط بين الأخطاء، لكن هذه الفرضية نادرا ما تكون محققة. وفي حالة انه هناك ارتباط قوي بين صدمتين  $\hat{\varepsilon}_{1t}$  و  $\hat{\varepsilon}_{2t}$ ، فان صدمة ما على  $\hat{\varepsilon}_{1t}$  تكون حتما ستكون متبوعة بصدمة على  $\hat{\varepsilon}_{2t}$ . ففي هذه الحالة، ان معامل الارتباط سيؤكد على الصلة المشتركة بين البواقي  $\hat{\varepsilon}_{1t}$  و  $\hat{\varepsilon}_{2t}$ ، ولكن لا يشير الى اتجاه السببية. يمكن تقديرها بالعلاقة التالية:

$$\rho_{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2} = \frac{\text{COV}(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)}{\sigma_{\hat{\varepsilon}_1} \cdot \sigma_{\hat{\varepsilon}_2}}$$

علاج مشكل الارتباط بين الأخطاء العشوائية وبالتالي تأثير الصدمة على المتغير، فانه بشكل عام يتم بالبحث عن تمثيل الأخطاء العشوائية بصفة شاقولية Orthogonal (مستقلة فيما بينها). لنعتبر تقسيم  $\Sigma$ :

$$\Sigma = PP'$$

يتعلق الامر هنا بتقسيم Choleski، حيث:  $P$  تعبر عن مصفوفة مثلثية من الأعلى مع عناصره القطرية موجبة. يمكن كتابة الصيغة  $VMA(\infty)$  على الشكل التالي:

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} C_i PP^{-1} \varepsilon_{t-i} = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} M_i v_{t-i}$$

مع:  $M_i = C_i P$ ،  $v_t = P^{-1} \varepsilon_t$ ، ومن السهل التأكد من ان للأخطاء  $v_t$  مصفوفة تباين-تباين مشترك تساوي المصفوفة الأحادية. أعمدة  $M_i$  تمثل استجابة النظام بالنسبة لصدمة مستقلة وطبيعية على خطأ متغير ما بعد  $t$  فترة زمنية معينة. تم تعميم هذا النوع من التحليل بواسطة: (Sims, 1981), (Sims, 1980) (Lubrano, 2007, pp. 10-11).

كمثال على ذلك نأخذ النموذج التالي بمتغيرين:

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \phi_{11}^1 Y_{1t-1} + \phi_{11}^2 Y_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \\ Y_{2t} &= \phi_{21}^1 Y_{1t-1} + \phi_{21}^2 Y_{2t-1} + \varepsilon_{2t} \\ \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{11}^1 & \phi_{11}^2 \\ \phi_{21}^1 & \phi_{21}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{مع: } V(\varepsilon_{1t}) = \sigma_{\varepsilon_1}^2, V(\varepsilon_{2t}) = \sigma_{\varepsilon_2}^2, \text{COV}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = k \neq 0$$

بحساب  $Y_{2t} - (k / \sigma_{\varepsilon_1}^2) Y_{1t}$  نحصل على:

$$\begin{aligned} Y_{2t} &= \left( k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 \right) Y_{1t} + \left( \phi_{21}^1 - \phi_{11}^1 \cdot k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 \right) Y_{1t-1} + \left( \phi_{21}^2 - \phi_{11}^2 \cdot k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 \right) Y_{2t-1} + \varepsilon_{2t} - \left( k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 \right) \varepsilon_{1t} \\ \text{نضع } \varepsilon_t &= \varepsilon_{2t} - \left( k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 \right) \varepsilon_{1t} \text{ يكون لدينا:} \end{aligned}$$

$$\text{COV}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_t) = E(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_t) = \text{COV}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) - k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 E(\varepsilon_{1t}^2) = k - k = 0$$

لم تعد الأخطاء مترابطة (شاقولية). لذلك يمكن إجراء تحليل الصدمة على المعادلتين التاليتين اللتين تكون أخطائهما متعامدة (شاقولية).

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \phi_{11}^1 Y_{1t-1} + \phi_{11}^2 Y_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \\ Y_{2t} &= \left( k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 \right) Y_{1t} + \left( \phi_{21}^1 - \phi_{11}^1 \cdot k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 \right) Y_{1t-1} + \left( \phi_{21}^2 - \phi_{11}^2 \cdot k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 \right) Y_{2t-1} + \varepsilon_{2t} - \left( k / \sigma_{\varepsilon_1}^2 \right) \varepsilon_{1t} \end{aligned}$$

كما ان التعميم على نموذج VAR بمتغيرات  $k$  يتطلب استخدام إجراءات المصفوفة الشاقولية، وبالتالي يثبت أنه اجراء معقد. وتجدر الإشارة إلى أن النتائج تتأثر باختيار المعادلة المستخدمة كأساس للتحويل، حيث ان النتائج سوف تكون مختلفة إذا كان التحويل على  $Y_t$  بدلا من  $Y_{2t}$ ، وهذا هو السبب في أن اختيار ترتيب المتغيرات يعدل النتائج التي تم الحصول عليها. ولأجل هذا برامج الاقتصاد القياسي توفر إمكانية اختيار درجة المتغيرات وبالتالي تجعل من الممكن محاكاة كل السيناريوهات المختلفة (Bourbonnais, 2015, pp. 285-287).

### 3. تحليل التباين Variance Decomposition

إن الهدف من تحليل تباين خطأ التنبؤ هو حساب مدى مساهمته في تباين الخطأ لكل صدمة. يمكننا كتابة تباين خطأ التنبؤ في الأفق  $h$  (فترة زمنية معينة ما) كدالة لتغير الخطأ المنسوب إلى كل من المتغيرات ثم يكفي ربط كل من هذه التباينات (أي عن طريق عملية القسمة) بالتباين الكلي للحصول على وزنه النسبي. عندما تصبح الصدمات طبيعية وشاقولية، يتم تحليل الاستجابة بواسطة استخدام النموذج الاتي (Lubrano, 2007, pp. 11-12):

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} M_i v_{t-i}$$

$$Y_{t+h} - E(Y_{t+h}) = \sum_{i=0}^{h-1} M_i v_{t+h-i} \text{ : خطأ التنبؤ في الأفق } h \text{ يعطى بالصيغة الموالية:}$$

نقوم بتحليل خطأ التنبؤ من اجل كل مركبة لـ  $Y_t$  التي نرمز اليها بـ  $Y_{j,t}$  ، يكون لدينا:

$$Y_{j,t+h} - E(Y_{j,t+h}) = \sum_{i=0}^{h-1} (m_{j1,i} v_{1,t+h-i} + m_{j2,i} v_{2,t+h-i} + \dots + m_{jm,i} v_{m,t+h-i})$$

حيث يعبر  $m_{j1,i}$  عن العنصر  $(j,1)$  الخاص بالمصفوفة  $M_i$ . يمكننا التعبير عن المجموع على اليسار بشكل مختلف عن طريق عكس المجموعتين الضميتين:

$$Y_{j,t+h} - E(Y_{j,t+h}) = \sum_{i=0}^{h-1} (m_{jk,1} v_{k,t+h} + \dots + m_{jk,h-1} v_{k,t+1})$$

نظرا للأخطاء  $v$  انها غير مترابطة ولها تباين يساوي 1، فمن السهل حساب تباين خطأ التنبؤ:

$$E(Y_{j,t+h} - E(Y_{j,t+h}))^2 = \sum_{k=0}^n (m_{jk,1}^2 + \dots + m_{jk,h-1}^2)$$

$$m_{jk,1}^2 + \dots + m_{jk,h-1}^2 = \sum_{i=0}^{h-1} (e'_j M_i e_k)^2 \text{ ثم نفسر المجموع بـ:}$$

حيث:  $e_i$  هو العمود رقم  $i$  للمصفوفة الاحادية والتي تعبر عن مساهمة الصدمة للمتغير  $k$  لتغير خطأ التنبؤ في الأفق  $h$  للمتغير  $z$ . وحتى نتمكن من الحصول على هذه النسب (التحليل)، يمكننا ان نعبر عنها كمايلي:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{h-1} m_{jk,i}^2 v$$

لنأخذ النموذج  $VAR(1)$  الخاص بمتغيرين:  $Y_{1t}, Y_{2t}$ ، يمكن كتابة تباين خطأ التنبؤ لـ  $Y_{1t+h}$  كمايلي (Bourbonnais, 2015, p. 288):

$$\sigma_{\varepsilon_1}^2 (h) = \sigma_{\varepsilon_1}^2 [m_{11}^2(0) + m_{11}^2(1) + \dots + m_{11}^2(h-1)] + \sigma_{\varepsilon_2}^2 [m_{22}^2(0) + m_{22}^2(1) + \dots + m_{22}^2(h-1)]$$

حيث:  $m_{ii}$  هي عناصر المصفوفة  $M$ .

في الأفق  $h$ ، يتم تحليل التباين بالنسبة المئوية للصددمات الخاصة بـ  $Y_{1t}$  على  $Y_{2t}$ ، حيث يعطى بالصيغة الآتية:

$$\frac{\sigma_{\varepsilon_1}^2 [m_{11}^2(0) + m_{11}^2(1) + \dots + m_{11}^2(h-1)]}{\sigma_{\varepsilon_1}^2 (h)}$$

ويتم تحليل التباين بالنسبة المئوية للصددمات الخاصة بـ  $Y_{2t}$  على  $Y_{1t}$ ، حيث يعطى بالصيغة الآتية:

$$\frac{\sigma_{\varepsilon_2}^2 [m_{22}^2(0) + m_{22}^2(1) + \dots + m_{22}^2(h-1)]}{\sigma_{\varepsilon_2}^2 (h)}$$

وتفسر النتائج كمايلي:

- إذا كانت الصدمة على  $\varepsilon_{1t}$  لا تؤثر على تباين الخطأ لـ  $Y_{2t}$  مهما كان أفق التوقع  $h$ ، فيمكن ان نعتبر ان  $Y_{2t}$  متغير خارجي لأن  $Y_{2t}$  تتطور بشكل مستقل عن  $\varepsilon_{1t}$ .
- على العكس من ذلك، إذا كانت الصدمة على  $\varepsilon_{1t}$  أثر كبير على تباين الخطأ لـ  $Y_{2t}$ ، فإن  $Y_{2t}$  يعتبر متغير داخلي.
- من الناحية العملية، لا يتم تمييز النتائج على أنها محددة ولكن تشير إلى مساهمة كل من المتغيرات في تباين الخطأ.

#### IV. السببية

إذا كان نموذج  $VAR$  يشير إلى كيفية تأثير القيم الماضية لمجموعة من المتغيرات على حاضر هذه المتغيرات وكيف انتقال الصدمات على متغير ما إلى بقية النظام لأجل فهم أفضل للظواهر الاقتصادية، فانه عمليا ان المعرفة السببية ضرورية للصياغة الصحيحة للسياسة الاقتصادية. وفي الواقع، معرفة اتجاه السببية

لا تقل أهمية عن تسليط الضوء على العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية من اجل تحديد الظاهرة التابعة من المستقلة.

### 1. اختبار السببية حسب Granger 1969

قدم (Granger, 1969) فكرة عدم السببية على أساس الخصائص التنبؤية لنماذج VAR. الفكرة هي أن السبب لا يمكن أن يأتي بعد التأثير. إذا كان المتغير  $X$  يؤثر على المتغير  $Y$ ، فسيكون  $X$  مفيدا (يحتوي على معلومات) لتحسين إمكانية التنبؤ لـ  $Y$ . بشكل مطلق فإنه بمفهوم Granger:  $X$  لا تسبب  $Y$ ، إذا مهما يكن الأفق  $h$  هو موجب، أي (Charpentier, 2006, p. 11):

$$V(Y_{t+h} - E(Y_{t+h} | Y_1^t, X_1^t)) = V(Y_{t+h} - E(Y_{t+h} | Y_1^t))$$

ليكن النموذج  $VAR(p)$  هو النموذج الذي تكون فيه السلسلتين  $Y_{1t}, Y_{2t}$  مستقرتين (Bourbonnais, 2015, pp. 292-293):

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^1 \\ \phi_2^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^1 & \phi_{11}^2 \\ \phi_{21}^1 & \phi_{21}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{12}^1 & \phi_{12}^2 \\ \phi_{22}^1 & \phi_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t-2} \\ Y_{2t-2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \phi_{1p}^1 & \phi_{1p}^2 \\ \phi_{2p}^1 & \phi_{2p}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t-p} \\ Y_{2t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

تعتبر سلسلة المتغيرات  $(Y_{2t-1}, Y_{2t-2}, \dots, Y_{2t-p})$  كمتغيرات خارجية مقارنة بكتلة المتغيرات  $(Y_{1t-1}, Y_{1t-2}, \dots, Y_{1t-p})$  ما إذا كانت إضافة كتلة  $Y_{2t}$  لا تحسن معنويا تحديد (أي القدرة التفسيرية) متغيرات  $Y_{1t}$ ، ويتكون هذا من إجراء اختبار تقييد على معاملات المتغيرات  $Y_{2t}$  لنموذج VAR الذي يسمى بنموذج VAR المقيد (Restricted VAR: RVAR). يتم تحديد درجة التأخر  $p$  وفقا لمعيار AIC أو SC، وليكن:

$$H_0 : \phi_{11}^2 = \phi_{12}^2 = \dots = \phi_{1p}^2 = 0 \quad - \text{ إذا كانت الفرضية التالية مقبولة: } Y_{2t} \text{ لا تسبب } Y_{1t}$$

$$H_0 : \phi_{21}^1 = \phi_{22}^1 = \dots = \phi_{2p}^1 = 0 \quad - \text{ إذا كانت الفرضية التالية مقبولة: } Y_{1t} \text{ لا تسبب } Y_{2t}$$

إذا تم قبول الفرضيتين معا، فإننا نتحدث عن حلقة "Feedback Effect" ذات أثر رجعي. ولاختبارهما يمكن استخدام اختبار Fisher المتعلق بانعدام المعاملات، معادلة بمعادلة أخرى أو مباشرة عن طريق المقارنة بين نموذج VAR غير المقيد (UVAR) ونموذج VAR المقيد (RVAR).

نحسب نسبة المعقولية:  $L^* = (T - c) (Ln|\Sigma_{RVAR}| - Ln|\Sigma_{UVAR}|)$  التي تتبع توزيع  $\chi^2$  بدرجة حرية:  $2 \times p$

$$\Sigma_{RVAR} : \text{ مصفوفة التباين-التباين المشترك لبواقي النموذج المقيد.} \quad -$$

$$\Sigma_{UVAR} : \text{ مصفوفة التباين-التباين المشترك لبواقي النموذج غير المقيد.} \quad -$$

$$T : \text{ عدد المشاهدات.} \quad -$$

-  $c$ : عدد المعلمات المقدرة في النموذج غير المقيد

إذا كانت:  $L^* > \chi^2_{2p}$ ، فإننا نرفض فرضية وجود القيد (أي رفض الفرضية  $H_0$ ).

## 2. اختبار السببية حسب Sims 1980

طرح اختبار بمواصفات مختلفة قليلة عن اختبار Granger 1969، حيث يعتبر أنه إذا كانت القيم المستقبلية لـ  $Y_{1t}$  تسمح بتفسير القيم الحالية لـ  $Y_{2t}$ ، فإن  $Y_{2t}$  تسبب  $Y_{1t}$ . لتأخذ بعين الاعتبار نموذج  $VAR(p)$  بمتغيرين (Gossé & Guillaumin, 2011, pp. 10-11):

$$Y_{1t} = \phi_1^0 + \sum_{i=1}^p \phi_{1i}^1 Y_{1t-i} + \sum_{i=1}^p \phi_{1i}^2 Y_{2t-i} + \sum_{i=1}^p \phi_i^2 Y_{2t+i} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_{2t} = \phi_2^0 + \sum_{i=1}^p \phi_{2i}^1 Y_{1t-i} + \sum_{i=1}^p \phi_{2i}^2 Y_{2t-i} + \sum_{i=1}^p \phi_i^1 Y_{1t-i} + \varepsilon_{2t}$$

لأجل ذلك:

-  $H_0: \phi_1^2 = \phi_2^1 = \dots = \phi_p^1 = 0$  إذا كانت الفرضية التالية مقبولة:  $Y_{1t}$  لا تسبب  $Y_{2t}$

-  $H_0: \phi_1^1 = \phi_2^2 = \dots = \phi_p^2 = 0$  إذا كانت الفرضية التالية مقبولة:  $Y_{2t}$  لا تسبب  $Y_{1t}$

لأجل اختبار الفرضيتين، فإنه يمكن استخدام اختبار Fisher المتعلق بانعدام المعاملات. كما ان مفهوم السببية تجلى في حالة الخارجية (المتغير الخارجي) واشكال أخرى كالسببية الضعيفة والقوية او الصارمة، تم تطوير هذا العمل على وجه الخصوص من قبل (Engle, Hendry & Richard, 1983).

## تمارين الفصل

### تمرين 1

لتكن السيرورة التالي:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{1t} \\ \hat{\varepsilon}_{2t} \end{bmatrix}$$

1. حول هذه السيرورة الى طبيعة نظام المعادلات واي نوع من هذه النماذج؟

2. ادرس استقراريتها.

## الحل

1. هذا النوع هو من نماذج اشعة الانحدار الذاتي VAR لان كل المتغيرات تعتبر متغيرات داخلية.

التحويل من الصيغة المصفوفاتية الى طبيعة المعادلات:

$$Y_{1t} = 3 + 0.2Y_{1t-1} + 0.7Y_{2t-1} + \hat{\epsilon}_{1t}$$

$$Y_{2t} = 1 + 0.3Y_{1t-1} + 0.4Y_{2t-1} + \hat{\epsilon}_{2t}$$

2. تكون السيرورة  $VAR(p)$  تكون مستقرة إذا كان كثير الحدود المعرف انطلاقاً من محدد المصفوفة:

$$|I - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p| = 0$$

$$|I - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2| = 0 \text{ نحسب المحدد لهذه المصفوفة:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{vmatrix} L = \begin{vmatrix} 1-0.2L & -0.7L \\ -0.3L & 1-0.4L \end{vmatrix} = (1-0.2L)(1-0.4L) - (-0.3L)(-0.7L) = 0$$

$$= 1 - 0.6L - 0.13L^2 = 0$$

نقوم بحساب حلول المعادلة المتمثلة في الجذرين  $L_1, L_2$ :

$$L = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = (-0.6)^2 - 4(-0.13)(1) = 0.88$$

$$L_1 = \frac{0.6 + \sqrt{0.88}}{2(-0.13)} = -5.91$$

$$L_2 = \frac{0.6 - \sqrt{0.88}}{2(-0.13)} = 1.30$$

الحلان المتحصل عليهما بالقيمة المطلقة يقعا خارج الدائرة الوحدوية، اي:

$$|L_1| = |-5.91| > 1$$

$$|L_2| = 1.30 > 1$$

وبالتالي هذا النموذج مستقر.

## تمرين 2

ادرس استقرارية السيرورة التالية:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_{1t} \\ \hat{\epsilon}_{2t} \end{bmatrix}$$

الحل

بتطبيق نفس الخطوات التمرين 1، نجد:

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} L \right| = 1 - L + 0.13L^2 = 0$$

$$L_1 = 0.87$$

$$L_2 = -1.15 \Rightarrow |L_2| = |-1.15| = 1.15$$

الجزر:  $L_1 = 0.87$  يقع ضمن الدائرة الأحادية وبالتالي هذا النموذج غير مستقر.

### تمرين 3

تعمل نماذج VAR على نمذجة العلاقات الديناميكية (الحركية) بين مجموعة من المتغيرات المختارة

لوصف ظاهرة معينة ما. وعليه فقد توفر لدينا النموذج التالي:

$$Y_{1t} = 0.02324Y_{1t-1} - 0.5214Y_{2t-1} + 10.12 + \hat{\varepsilon}_{1t}$$

$$Y_{2t} = -0.2123Y_{1t-1} + 0.4036Y_{2t-1} - 8.025 + \hat{\varepsilon}_{2t}$$

- قم بدراسة تحليل الصدمات من الفترة  $t$  الى الفترة  $(t+2)$ .

### الحل

نعلم ان التغير في  $\hat{\varepsilon}_{1t}$  خلال فترة زمنية معينة يكون له نتيجة على  $Y_{1t}$  و  $Y_{1t+1}$  ثم على  $Y_{1t+2}$  ، فاذا حدثت

صدمة في اللحظة  $t$  على  $\hat{\varepsilon}_{1t}$  تساوي 1 فان إثرها يكون كالآتي:

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- في الفترة } t$$

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_{1t+1} \\ \Delta Y_{2t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02324 & -0.5214 \\ -0.2123 & 0.4036 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02324 \\ -0.2123 \end{pmatrix} \quad \text{- في الفترة } t+1$$

- في الفترة  $t+2$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta Y_{1t+2} \\ \Delta Y_{2t+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{11}^0 & \hat{\phi}_{11}^2 \\ \hat{\phi}_{21}^1 & \hat{\phi}_{21}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t+1} \\ Y_{2t+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.02324 & -0.5214 \\ -0.2123 & 0.4036 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.02324 \\ -0.2123 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.1112 \\ -0.0906 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

تشكل هذه القيم المحسوبة دالة استجابة بمعنى انها تقوم بحساب المضاعفات الديناميكية الموجودة أي

تبين رد فعل المتغيرين الداخليين:  $Y_{1t}, Y_{2t}$  على أثر حدوث صدمة في الخطأين العشوائيين:  $\hat{\varepsilon}_{1t}, \hat{\varepsilon}_{2t}$ .

## تمرين 4

بعد تقديرنا لنموذج  $UVAR$  غير المقيد و  $RVAR$  المقيد تحصلنا على النتائج التالية:

$$UVAR : \hat{Y}_{1t} = 0.02324Y_{1t-1} - 0.5214Y_{2t-1} + 10.12$$

$$R^2 = 0.34, T = 71, USSE = 110184.2, \sum_{UVAR} = 1369559.89$$

$$RVAR : \hat{Y}_{1t} = 0.2852Y_{1t-1} + 30.0280$$

$$R^2 = 0.098, T = 71, RSSE = 148256.2, \sum_{RVAR} = 1943498$$

USSE: Unrestricted Sum of Squares Error

RSSE: Restricted Sum of Squares Error

$\sum_{RVAR}$ : مصفوفة التباين-التباين المشترك لبواقى النموذج المقيد.

$\sum_{UVAR}$ : مصفوفة التباين-التباين المشترك لبواقى النموذج غير المقيد.

- قم بدراسة اختبار السببية بين المتغيرين:  $Y_{2t}, Y_{1t}$  وفق اختبار Granger 1969 بطريقتين مختلفتين.

## الحل

قبل الشروع في الحل، نلاحظ بان المتغير  $\hat{Y}_{1t}$  هو متغير داخلي في كل من النموذج المقيد وغير المقيد ولهذا ندرس فقط اتجاه السببية من  $\hat{Y}_{2t}$  نحو  $\hat{Y}_{1t}$  فقط. لأنه لو توفرت لدينا النتائج الخاصة من التقدير لنموذج  $\hat{Y}_{2t}$ ، فهنا يتم دراسة كذلك اتجاه السببية من  $\hat{Y}_{1t}$  نحو  $\hat{Y}_{2t}$ .

$H_0 : \phi_{11}^2 = \phi_{12}^2 = 0$  إذا كانت الفرضية التالية مقبولة:

- يمكننا استخدام مايلي:

1. اختبار Fisher المتعلق بانعدام المعاملات:

$$F_{cal} = \frac{(RSSE - USSE) / (dl_R - dl_U)}{(USSE) / (T - k)} = \frac{(RSSE - USSE) / c}{(USSE) / (T - k)} \rightsquigarrow F_{(c, T-k)}$$

$$F_{cal} = \frac{(148256.2 - 110184.2) / 1}{(110184.2) / (71 - 3)} = 23.496$$

$k$ : يمثل عدد المعالم المقدر.

$c$ : يمثل عدد القيود (عدد المعاملات التي نريد اختبارها في الفرضية العدمية). وهنا الامر يتعلق بمعلمة واحدة فقط.

بمقارنة القيمة المحسوبة:  $F_{cal} = 23.496$  مع القيمة المجدولة لإحصائية Fisher عند مستوى المعنوية  $\alpha = 5\%$ ، مع درجة الحرية:  $(c=1, T-k=71-3=68)$ ، أي:  $F_{1,68}^{0.05} \approx 4$ ، نجدها أكبر من القيمة المجدولة  $F_{cal} > F_{1,68}^{0.05}$  ومنه نرفض الفرضية العدمية  $H_0$ ،  $Y_{2t}$  تفسر معنويا المتغير  $Y_{1t}$  وهذا يعني أن هناك سببية وفق Granger تتجه من  $Y_{1t}$  نحو  $Y_{2t}$ .

2. او عن طريق المقارنة بين نموذج  $VAR$  غير المقيد ( $UVAR$ ) ونموذج  $VAR$  المقيد ( $RVAR$ ) بحساب نسبة المعقولية التالية:

$$L^* = (T - c) \left( \ln|\Sigma_{RVAR}| - \ln|\Sigma_{UVAR}| \right) \sim \chi_{2P}^2$$

$$L^* = (71 - 1) \left[ \ln(1943498) - \ln(1369559.89) \right]$$

$$L^* = 70(14.48 - 14.13) = 24.5$$

ومنه نجد:  $L^* = 24.5 > \chi_{2,P}^2 = \chi_{0.05}^2(2) = 5.991$  وبالتالي نرفض فرضية وجود القيد (أي رفض الفرضية

$H_0$ ).  $Y_{2t}$  تفسر معنويا المتغير  $Y_{1t}$  وهذا يعني أن هناك سببية وفق Granger تتجه من  $Y_{1t}$  نحو  $Y_{2t}$ .

## 4. التكامل المشترك ونموذج تصحيح الخطأ

### Cointegration and Error Correction Model (ECM)

تنشأ العديد من المشاكل عندما نريد التحقق من وجود علاقة خطية بين عدة متغيرات، بعضها يكون لها اتجاه عشوائي (جذر الوحدة)، وعندما نريد تقدير معلمات هذه العلاقة المفترضة: حتى لو، في الواقع، لا توجد علاقة خطية تربط هذه المتغيرات، فإنه يمكن لتقدير OLS أن يعطي نتائج مغالطة بشكل خاطئ وأن هذه العلاقة تكون موجودة (القيمة الكبيرة لمعامل التحديد  $R^2$ ، ومعنوية إحصائية Student.....). تعرف هذه الظاهرة باسم الانحدار الزائف (Granger & Newbold, 1974).

في الواقع، يخضع وجود علاقة حقيقية طويلة الأجل بين المتغيرات المتكاملة إلى شروط معينة، تسمى بعلاقة التكامل المشترك بين المتغيرات المتكاملة. بمعنى آخر، إذا كانت المتغيرات متكاملة (التي نتحقق منها بواسطة اختبارات جذر الوحدة)، يجب أن نتحقق من تكاملها المحتمل لمعرفة ما إذا كان لها بالفعل علاقة طويلة الأجل (Eric, 2009).

هذا التحليل ظهر على كل من (Granger, 1983), (Engle & Granger, 1987)، ويعتبر العديد من الاقتصاديين أن تحليل التكامل المشترك أحد أهم المفاهيم الجديدة في مجالات الاقتصاد القياسي وتحليل السلاسل الزمنية. سوف يتم توضيح شروط التكامل هذه بالتفصيل في هذا الفصل، بالإضافة إلى طرق التحقيق التجريبي من التكامل المشترك بين المتغيرات المتكاملة. وعليه سوف نتعرض في هذا الفصل إلى:

أ. مفهوم التكامل المشترك

ب. التكامل المشترك بين متغيرين

ج. تعميم التكامل المشترك ونموذج تصحيح الخطأ

## 1. مفهوم التكامل المشترك Concept of Cointegration

سوف نقوم بإعطاء بعض المفاهيم الضرورية حول تقنية التكامل المشترك والتي منها (Charpentier, 2006, p. 6):

- تحليل التكامل المشترك يسمح بتحديد العلاقة المشتركة بين عدة متغيرات. تم طرح هذا المفهوم سنة (Granger & Newbold, 1974) تحت اسم "الانحدارات الزائفة"، ثم تم إضفاء الطابع الرسمي عليه من قبل (Engle & Granger, 1987)، وأخيراً بواسطة Johansen في سنتي 1991 و1995.
- تكون السلسلة  $Y_t$  متكاملة من الدرجة  $d$  ( $d \geq 1$ ) إذا كان  $\Delta^{d-1}Y_t$  غير مستقر و  $\Delta^d Y_t$  مستقر. إذن تكون السلسلة مستقرة من الدرجة 0.
- لتكن السلسلة  $X_t$  مستقرة والسلسلة  $Y_t$  متكاملة من الدرجة 1، إذن يكون  $(X_t + Y_t)$  متكامل من الدرجة 1. ومع ذلك إذا كانت السلسلتان  $X_t, Y_t$  متكاملتان من الدرجة  $d$  فإن  $(X_t + Y_t)$  متكامل من الدرجة  $d$ . أي مستقر (في حالة إلغاء الاتجاهين العامين لبعضهما البعض).

## 1. خصائص درجة التكامل المشترك لسلسلة زمنية

تكون السلسلة متكاملة من الدرجة  $d: X_t \rightarrow I(d)$  إذا تم تفريقها  $d$  مرة من أجل جعلها مستقرة. لتكن سلسلة زمنية  $X_{1t}$  مستقرة وسلسلة زمنية  $X_{2t}$  متكاملة من الدرجة 1 (Bourbonnais, 2015, pp. 299-300):

$$\begin{aligned} X_{1t} &\rightarrow I(0) \\ X_{2t} &\rightarrow I(1) \end{aligned} \Rightarrow X_{1t} + X_{2t} \rightarrow I(1)$$

السلسلة:  $Y_t = X_{1t} + X_{2t}$  غير مستقرة لأنها ناتجة عن مجموع سلسلة زمنية مستقرة والأخرى بها اتجاه عام. لتكن السلسلتان  $X_{1t}, X_{2t}$  متكاملتين من الدرجة  $d$ :

$$\begin{aligned} X_{1t} &\rightarrow I(d) \\ X_{2t} &\rightarrow I(d) \end{aligned} \Rightarrow X_{1t} + X_{2t} \rightarrow I(?)$$

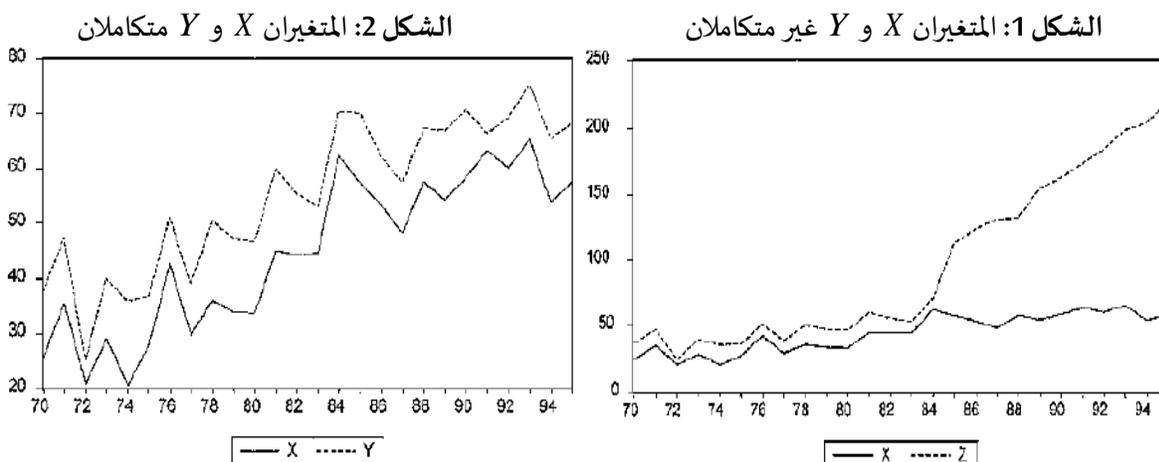
إذن، فما هي درجة تكامل التوليفة الخطية:  $\alpha X_t + \beta Y_t \rightarrow I(?)$ . في الواقع النتيجة تعتمد على إشارة المعاملين  $\alpha, \beta$  ووجود ديناميكية غير مستقرة مشتركة. إذا كانت:

$$\begin{aligned} X_{1t} &\rightarrow I(d) \\ X_{2t} &\rightarrow I(d') \quad d \neq d' \end{aligned} \Rightarrow X_{1t} + X_{2t} \rightarrow I(?)$$

فانه من غير المؤكد استنتاج درجة التكامل لمجموع السلسلتين لأنهما من درجتين مختلفتين.

لتكن السلسلتين الزمنيتين:  $X, Y$  لهما اتجاهين عامين:

- في الحالة الأولى، السلسلتان لهما اتجاه ثابت يتطور عبر الزمن في الفترة الأولى ثم اتجاه متباعد في الفترة الثانية. اذن السلسلتين غير متكاملتين وهذا ما يوضحه الشكل البياني 1.
- في الحالة الثانية، يكون للسلسلتين اتجاه ثابت يتطور عبر الزمن طوال الفترة بأكملها، وهنا تكون السلسلتين متكاملتين، أي هناك تطور متزامن طويل الاجل وهذا ما يوضحه الشكل البياني 2.



المصدر: (Bourbonnais, 2015, p. 300)

## 2. شروط التكامل المشترك

نقول ان السلسلتين  $X_t$  و  $Y_t$  متكاملتين إذا تحقق الشرطان التاليان (Bourbonnais, 2015, p. 301):

- إذا تضمننا اتجاهها عاما عشوائيا بنفس درجة التكامل  $d$ .
- توليفة خطية للسلسلتين تسمح بالحصول على سلسلة ذات درجة تكامل اقل.

ليكن:

$$X_t \rightarrow I(d)$$

$$Y_t \rightarrow I(d)$$

$$\alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_t \rightarrow I(d-b)$$

بحيث:

$$d \geq b > 0$$

$$\text{ونرمز بـ } X_t, Y_t \rightarrow CI(d, b)$$

حيث: يسمى  $[\alpha_1, \alpha_2]$  بشعاع التكامل المشترك.

في الحالة العامة لـ  $k$  متغير، فان:

$$X_{1t} \rightarrow I(d)$$

$$X_{2t} \rightarrow I(d)$$

...

$$X_{kt} \rightarrow I(d)$$

نشير الى:  $X_t = [X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt}]$

إذا وجد شعاع التكامل المشترك  $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k]$  ذو البعد  $(k \times 1)$  بحيث  $\alpha X_t \rightarrow I(d-b)$ ، فإن

عدد المتغيرات  $k$  لها تكاملاً مشتركاً وشعاع التكامل المشترك هو  $\alpha$ . نضع:  $X_t \rightarrow CI(d, b)$  مع:  $b > 0$ .

### 3. نموذج تصحيح الخطأ (Error Correction Model (ECM)

تم تقديم ما يسمى بنماذج تصحيح الخطأ في أوائل الثمانينيات، من قبل Hendry على وجه الخصوص.

تتيح هذه النماذج الديناميكية دمج التغيرات طويلة الأجل وقصيرة الأجل للمتغيرات (Charpentier, 2006, pp. 8-9).

لنعتبر المتغيرين:  $X_t$  و  $Y_t$  المتكاملين من نفس الدرجة 1 حيث:  $X_t, Y_t \rightarrow CI(1,1)$  و  $[\beta - 1]$

نضع  $\beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  أي  $\beta X_t - Y_t \rightarrow I(0)$  هو شعاع التكامل المشترك. في هذا النوع من المواصفات، كون أن

السلسلتين متكاملتين وغير مستقرتين يزيد من مشكلة التقدير. الجودة الإحصائية الجيدة للنموذج (القيمة

المرتفعة لـ:  $R^2$ ، والمعنوية الإحصائية للمعاملات) ترجع الى حقيقة ان السلسلتين غير مستقرتين (أي هناك

تكامل مشترك). في الانحدار المباشر لـ:  $Y_t$  على  $X_t$  - هذا عندما يكون:  $X_t, Y_t \rightarrow CI(1,1)$  - وبالتالي استخدام

هذا النموذج لأغراض التنبؤ فإنه يكون غير صالح، لأنه في الواقع، العلاقة المفسرة التي كشف عنها بواسطة

الانحدار ليست حقيقية، إنها ببساطة ناتجة عن علاقة بين اتجاهين.

بالتالي، تكمن المشكلة من ناحية، في إزالة علاقة التكامل المشترك (الاتجاه المشترك)، ومن ناحية أخرى،

بالبحث عن الارتباط الحقيقي بين المتغيرين: وهذا هو هدف نموذج تصحيح الخطأ  $ECM$  وهذا النموذج

على حد سواء (يعمل على جمع) هو نموذج ثابت  $(\beta_1 \Delta X_t)$  ونموذج ديناميكي  $(\beta_2 (Y_{t-1} - \beta_1 X_{t-1}))$ . وعليه

يمكن كتابة العلاقة التالية (Bourbonnais, 2015, pp. 301-302):

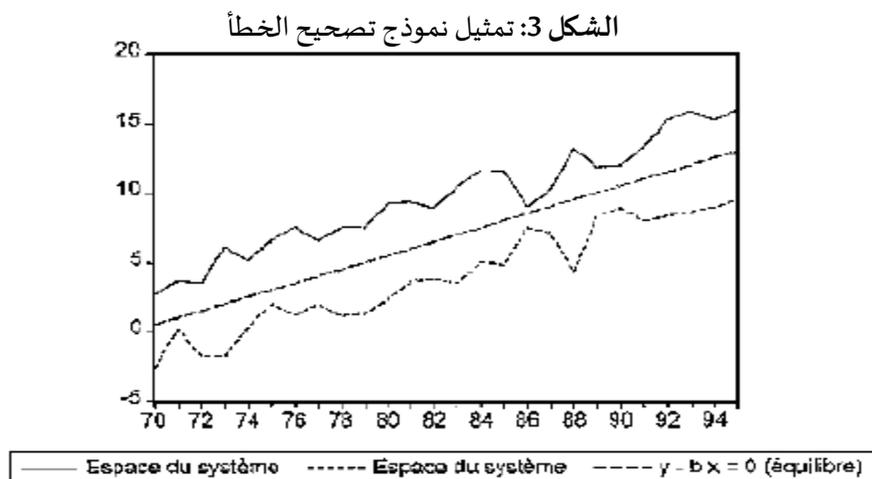
$$\Delta Y = \beta_1 \Delta X_t + \beta_2 (Y_{t-1} - \beta_1 X_{t-1})$$

$$I(0) \quad I(0) \quad I(0)$$

من خلال العلاقة طويلة الأجل، فإن نموذج تصحيح الخطأ يعمل على دمج التقلبات قصيرة الأجل.

المعامل:  $\beta_2$  (يجب أن يكون سالبا) ويمثل قوة الجذب (العودة او سرعة التعديل) نحو التوازن في المدى

الطويل.



يوضح الشكل 3 العلاقة طويلة الاجل  $X_t$  و  $Y_t$ :  $(Y_t - \beta X_t = 0)$  ومعادلة الخط المستقيم تمثل خط التوازن طويل الاجل للنظام، يتم تعريف منطقة تطور النظام خارج التوازن (ديناميكيات المدى القصير) من خلال الخطأ الملاحظ بين  $X_{t-1}$  و  $Y_{t-1}$ .

## II. التكامل المشترك بين متغيرين

تتطلب معالجة السلاسل الزمنية اختبار التكامل المشترك بين المتغيرات. وفي الواقع أن الخطر سوف يكون كبير جدا عند تقدير العلاقات "الزائفة" الذي يؤدي الى سوء تفسير النتائج. بناءً على هذا، سنقوم أولاً باختبار الحالة بمتغيرين ومن بعدها نقوم بتعميمها.

### 1. اختبار التكامل المشترك بين متغيرين

نأخذ الخوارزمية المكونة من الخطوتين التي اقترحها Engle and Granger - (Bourbonnais, 2015, p. 303):

#### - الخطوة 1: اختبار درجة تكامل المتغيرات

الشروط الضروري للتكامل المشترك يجب ان تكون السلسلتان متكاملتان من نفس الدرجة. إذا كان غير ذلك. فلا يمكن ان يكون هناك تكامل مشترك بينهما. لذلك، من الضروري أن يحدد بدقة نوع الاتجاه العام المحدد أو العشوائي لكل من المتغيرات، ثم درجة التكامل  $d$  لهما.

$$X_t \rightarrow I(d)$$

$$Y_t \rightarrow I(d)$$

وليكن:

## - الخطوة 2: تقدير العلاقة طويلة الاجل

إذا تحقق الشرط الضروري، فإنه يتم تقدير العلاقة طويلة الاجل بين المتغيرين بطريقة المربعات

$$Y_t = a_1 X_t + a_0 + \varepsilon_t \text{ :OLS الصغرى الاعتيادية}$$

لقبول علاقة التكامل المشترك، يجب أن تكون بواقي الانحدار مستقرة:  $\hat{\varepsilon}_t = \hat{Y}_t - \hat{a}_1 X_t$ . يتم باستخدام اختبارات (DF, ADF)، وفي هذه الحالة، لا يمكن استخدام جداول Dickey- Fuller، لان الاختبار يتعلق بالبواقي المقدره من العلاقة الساكنة وليس بالبواقي الحقيقية لعلاقة التكامل المشترك. لذلك، قام (MacKinnon, 1991) بمحاكاة الجداول التي تعتمد على عدد المشاهدات وعدد المتغيرات التفسيرية التي تظهر في العلاقة الإحصائية. إذا كانت البواقي مستقرة، فيمكننا عندئذ تقدير نموذج تصحيح الخطأ.

## 2. تقدير نموذج تصحيح الخطأ

حسب النظرية المقدمة من قبل (Engle & Granger, 1987) فإنه يمكن تمثيل جميع السلاسل الزمنية المتكاملة بنموذج تصحيح الخطأ. وتوفر هذه النظرية توليفة بين مقاربتين مستخدمة على نطاق واسع في الأدبيات الاقتصادية الحديثة (Charpentier, 2006, p. 8):

- مقارنة *ECM* الناتج عن فكرة التوفيق بين اهتمامات النظرية الاقتصادية مع الكتابة الدقيقة للمعادلات الاقتصادية.

- مقارنة *VAR* (الذي تم التطرق اليه سابقا)، والذي يأتي من منهج إحصائي بحت، نوع "الصندوق الأسود" Black Box.

سوف نقتصر على الطريقة الأكثر شيوعا لتقدير نموذج تصحيح الخطأ ونقتصر هنا على حالة متغير مفسر واحد فقط وبعدها سيتم التعميم على عدة متغيرات  $k$  (Bourbonnais, 2015, pp. 303-304):

لتكن السلسلتين:  $X_t$  و  $Y_t$  متكاملتين من الدرجة الأولى:  $X_t, Y_t \rightarrow I(1)$ ، التقدير بواسطة OLS للعلاقة طويلة الاجل يشير إلى استقرارية البواقي. اذن نضع:  $X_t, Y_t \rightarrow CI(1,1)$ ، لذلك يمكننا تقدير نموذج تصحيح الخطأ باتباع الخطوتين الاتيتين (Bourbonnais, 2015, pp. 303-304):

## - الخطوة 1: التقدير بواسطة OLS العلاقة طويلة الاجل

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t + \hat{\varepsilon}_t \quad (ECM)$$

- الخطوة 2: التقدير بواسطة OLS علاقة النموذج الديناميكي (أي المدى القصير)

$$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t \quad (\alpha_2 < 0)$$

- يجب أن يكون المعامل  $\alpha_2$  (قوة العودة نحو التوازن) سالبا ومعنوياً. خلاف ذلك، يجب رفض نمذجة *ECM*. لأنه في الواقع، آلية تصحيح الخطأ (التي تسمح لنا بالاتجاه نحو العلاقة طويلة المدى) ستتجه نحو الاتجاه المعاكس وتبتعد عن الهدف طويل المدى.
- يؤدي هذا الاجراء المتكون من الخطوتين السابقتين الى تقدير متقارب لمعاملات النموذج ويمكن تفسير الانحرافات المعيارية للمعاملات بطريقة كلاسيكية.
- تقدير نموذج تصحيح الخطأ لا يطرح أي مشكلة معينة ويتطلب ببساطة استخدام تقنية المربعات الصغرى الاعتيادية OLS.
- في حالة المتغيرات التفسيرية الإضافية التي لا يمكن الاحتفاظ بفرضية تكاملها، فإن إجراء التقدير هو نفسه باستثناء تقدير نموذج الخطوة 1 (معادلة طويلة الأجل) حيث تظهر هذه المتغيرات التفسيرية.

### III. تعميم التكامل المشترك ونموذج تصحيح الخطأ

بينت الأدبيات الاقتصادية الحديثة بخصوص نظرية التوازن أن سلسلة الماكرو اقتصادية المستقرة يمكن أن تكون نتيجة لمجموعة من المتغيرات غير المستقرة، وبالتالي الأهمية الحالية لتحليل التكامل المشترك لـ  $k$  من المتغيرات. كما اتضح أن تعميم من متغيرين إلى  $k$  متغير هو امر معقد للغاية نظراً لعدد اشعة التكامل المشترك المحتملة.

#### 1. التكامل المشترك بين $k$ متغير

ليكن النموذج القياسي التالي لـ  $k$  متغير مفسر (Bourbonnais, 2015, pp. 306-307):

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

إذا كانت المتغيرات:  $Y_t, X_{kt}$  غير مستقرة (متكاملة من الدرجة الأولى مثلاً:  $I(1)$ ) فإن وجود تكامل مشترك محتمل يعني أن المتغيرات يجب أن تكون غير مستقرة. كما في حالة متغيرين، إذا كانت التوليفة الخطية من هذه المتغيرات مستقرة، فإنه بعد ذلك يتم العمل على تكاملها. التقدير بواسطة OLS للنموذج يسمح اذن بحساب بواقي التقدير:

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \dots - \hat{\beta}_k X_{kt}$$

إذا كانت سلسلة البواقي المقدره هذه مستقرة، فإننا نقبل فرضية التكامل المشترك بين المتغيرات. اجراء اختبارات الاستقرار على البواقي المقدره يجب ان تكون انطلاقا من القيم الحرجة المجدولة لـ (MacKinnon,1991) بدلالة عدد المتغيرات الكلية للنموذج. يعطى شعاع التكامل المشترك بـ:

$$\left[1, -\hat{\beta}_0, -\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k\right]$$

مع ذلك، فإن الحالة متعددة المتغيرات أكثر تعقيدا من الحالة ذات متغيرين، وهذا بسبب التوليفات الخطية الممكنة للتكامل المشترك. على سبيل المثال، إذا كانت المتغيرات:  $Y_t, X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}$  لها تكامل مشترك بالزوج:  $Y_t, X_{1t} \rightarrow CI(1,1)$  و  $X_{2t}, X_{3t} \rightarrow CI(1,1)$  فان التوليفة الخطية لها تكون:  $I(0)$ .

لدينا:  $\hat{\varepsilon}_t^1 = Y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_{1t}$  و  $\hat{\varepsilon}_t^2 = X_{2t} - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 X_{3t}$  ينتج لنا:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\varepsilon}_t^1 + \hat{\varepsilon}_t^2 = Y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_{1t} + X_{2t} - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 X_{3t} \rightarrow I(0)$$

- نتحصل في هذه الحالة على شعاع آخر ممكن للتكامل المشترك:  $[1, -\hat{\alpha}_0, -\hat{\gamma}_0, -\hat{\alpha}_1, 1, \hat{\gamma}_k]$ . بشكل عام، في نموذج يحتوي على متغير تابع و  $k$  متغير مستقل (أي الكل يكون  $k+1$  متغير)، قد يوجد  $k$  شعاع تكامل مشترك مستقل خطيا. وعدد أشعة التكامل المشترك المستقلة خطيا يسمى بدرجة التكامل المشترك.

- إذا كانت المتغيرات لها نفس درجة التكامل (مثلا:  $I(1)$ ) فمن الممكن جدا وجود شعاع تكامل مشترك واحد، وإذا لم تكن لها نفس درجة التكامل، فانه من المؤكد انه ليس لها متجه وحيد للتكامل المشترك. - من الناحية العملية، عند القيام باختبار إمكانية وجود التكامل المشترك بين عدة متغيرات، فيجب اختباره أولا على جميع المتغيرات:  $k+1$ ، ثم - في حالة التكامل المشترك - ليتم اختباره بالأزواج بين متغيرات النموذج.

## 2. تقدير نموذج تصحيح الخطأ

بعد أن تم الكشف عن التكامل المشترك بواسطة الاختبارات السابقة، يجب مراعاة سيناريوهين:

- يوجد شعاع تكامل مشترك وحيد.

- يوجد عدة اشعة تكامل مشترك.

في حالة وجود شعاع تكامل مشترك وحيد، فيمكننا استخدام طرق التقدير التي تم تناولها في القسم

السابق، على سبيل المثال، الخوارزمية المكونة من الخطوتين التي اقترحها Engle and Granger.

- الخطوة 1: التقدير بواسطة OLS العلاقة طويلة الاجل وحساب البواقي

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \dots - \hat{\beta}_k X_{kt}$$

- الخطوة 2: التقدير بواسطة OLS علاقة النموذج الديناميكي (أي المدى القصير)

$$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_{1t} + \alpha_2 \Delta X_{2t} + \dots + \alpha_k \Delta X_{kt} + \gamma_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t$$

يجب أن يكون المعامل  $\gamma_1$  (قوة العودة نحو التوازن) سالبا ومعنويا كما في حالة متغير واحد مستقل. في اغلب الأحيان، لا يكون هناك شعاع تكامل مشترك واحد، وعليه فان طريقة Engle-Granger تكون غير صالحة.

في الواقع، ان المقدرات بواسطة طريقة OLS تكون غير متسقة وكفاءة مهما تكن اشعة التكامل المشترك. وفي هذه الحالة فانه يجب علينا، استخدام الصيغة الشعاعية لنموذج تصحيح الخطأ: (VECM) Vector Error Correction Model.

### 3. نموذج تصحيح الخطأ المتعدد VECM

لنقم اولا بفحص السيرورة (2) VAR بمتغيرات  $k$  في شكل مصفوفي (Bourbonnais, 2015, pp. 309-310):

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

مع:

-  $Y_t$ : متجه (شعاع) ذو البعد  $(k \times 1)$  الذي يتكون من المتغيرات:  $(Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{kt})$

-  $\Phi_0$ : شعاع ذو البعد  $(k \times 1)$

-  $\Phi_i$ : مصفوفة ذات البعد  $(k \times k)$

يمكن كتابة هذا النموذج في الفرق الاول:

$$Y_t - Y_{t-1} = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} - Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \Phi_0 + (\Phi_1 - I) Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad [1]$$

بعد القيام بعملية الفروقات من الدرجة الأولى، نقوم بإضافة وطرح:  $\Phi_1 Y_{t-2} - Y_{t-2}$  على المعادلة. أي:

$$\Delta Y_t = \Phi_0 + (\Phi_1 - I) Y_{t-1} + \Phi_1 Y_{t-2} - Y_{t-2} - \Phi_1 Y_{t-2} - Y_{t-2} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} - Y_{t-1} + \Phi_1 Y_{t-2} - Y_{t-2} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad [2]$$

نضع:  $\Delta Y_{t-1} = Y_{t-1} - Y_{t-2}$  ونقوم بتجميع العبارات في  $\Delta Y_{t-1}$  وبعد التبسيط، نتحصل على:

$$\Delta Y_t = \Phi_0 + (\Phi_1 - I) \Delta Y_{t-1} + (\Phi_1 + \Phi_2 - I) Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad [3]$$

ومع ذلك، من أجل إبراز علاقات التكامل المشترك - التي تربط متغيرات المستوى (الأصلية) والمتأخرة بفترة زمنية واحدة - نسعى إلى كتابة المعادلة [2] بدلالة  $Y_{t-1}$ ، او في المعادلة [1] يمكننا جمع وطرح  $\Phi_2 Y_{t-2}$  وبعد التبسيط نحصل على:

$$\Delta Y_t = \Phi_0 - \Phi_2 \Delta Y_{t-1} + (\Phi_1 + \Phi_2 - I) Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad [4]$$

$$\Delta Y_t = \Phi_0 + B_1 \Delta Y_{t-1} + \pi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad [5] \quad \text{او:}$$

$$\pi = (\Phi_1 + \Phi_2 - I) \quad \text{و:} \quad \Phi_2 = -B_1$$

يمكن تعميم هذه النتيجة على نموذج  $VAR(p)$  ذو  $k$  متغير في شكل مصفوفي:

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

مع:

-  $Y_t$ : شعاع ذو البعد  $(k \times 1)$  الذي يتكون من المتغيرات:  $(Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{kt})$

-  $\Phi_0$ : شعاع ذو البعد  $(k \times 1)$

-  $\Phi_i$ : مصفوفة ذات البعد  $(k \times k)$

يمكن كتابة هذا النموذج في الفروقات الأولى بطريقتين:

$$\Delta Y_t = \Phi_0 + (\Phi_1 - I) \Delta Y_{t-1} + (\Phi_2 + \Phi_1 - I) \Delta Y_{t-2} + \dots + (\Phi_{p-1} + \dots + \Phi_2 + \Phi_1 - I) \Delta Y_{t-p+1} + \pi Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \Phi_0 + B_1 \Delta Y_{t-1} + B_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + B_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + \pi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{او بدلالة } Y_{t-1}$$

$$\pi = \sum_{i=1}^n \Phi_i - I \quad \text{و} \quad \Phi_i \quad \text{هي دوال للمصفوفات}$$

يمكن كتابة المصفوفة  $\pi$  بالصيغة:  $\pi = \alpha \beta'$  حيث ان الشعاع  $\alpha$  يمثل قوة العودة نحو التوازن و  $\beta$  هو الشعاع الذي عناصره تعبر عن معاملات العلاقات طويلة الاجل للمتغيرات. لذلك تمثل كل توليفة خطية علاقة تكامل مشترك.

- إذا كانت جميع عناصر المصفوفة  $\pi$  معدومة (رتبة المصفوفة  $\pi$  تساوي الصفر وبالتالي فإن:

$$\Phi_0 + \dots + \Phi_2 + \Phi_1 = I$$

فانه يتم رفض نمذجة  $VECM$ . وعليه يتم تقدير نموذج  $VAR$  الكلاسيكي في الفروقات الأولى بعد إزالة الاتجاهات العامة.

- إذا كان رتبة المصفوفة  $\pi$  تساوي  $k$ ، فهذا يعني أن المتغيرات كلها مستقرة في المستوى أي:  $I(0)$

ومشكل التكامل المشترك لا يطرح هنا، فمن الضروري تقدير نموذج  $VAR$  في المستوى.

- إذا كان رتبة المصفوفة  $\pi$  والتي نرمز لها بالرمز:  $r$  محصورة بين 1 و:  $k-1$  أي:  $(1 \leq r \leq k-1)$ .

اذن توجد  $r$  علاقات تكامل مشترك وتمثيل  $ECM$  يحدد بالمعادلة التالية:

$$\Delta Y_t = \Phi_0 + B_1 \Delta Y_{t-1} + B_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + B_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + \alpha \hat{\varepsilon}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\hat{\varepsilon}_t = \beta' Y_t \text{ مع}$$

#### 4. اختبار علاقة التكامل المشترك

لتحديد عدد علاقات التكامل المشترك، اقترح (Johansen, 1988) اختبارين بناءً على القيم الذاتية لمصفوفة باتباع الخطوتين التاليتين (Bourbonnais, 2015, pp. 310-313):

- الخطوة 1: حساب البواقي:  $u_t$  و  $v_t$

معادلة الانحدار الأولى:

$$\Delta Y_t = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 \Delta Y_{t-1} + \hat{\Phi}_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \hat{\Phi}_p \Delta Y_{t-p} + u_t$$

معادلة الانحدار الثانية:

$$Y_{t-1} = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 \Delta Y_{t-1} + \hat{\Phi}_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \hat{\Phi}_p \Delta Y_{t-p} + v_t$$

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \\ \dots \\ \dots \\ Y_{k,t} \end{pmatrix} \text{ مع}$$

لدينا نفس المتغيرات التفسيرية، فقط يتم تعديل مواصفات جملة المتغير المفسر (التابع). وبالتالي، فإن  $u_t$  و  $v_t$  هما مصفوفات البواقي ذو البعد  $(k, T)$ ، حيث  $k$  هو عدد المتغيرات،  $T$  هو عدد المشاهدات.

- الخطوة 2: حساب المصفوفة التي تسمح بحساب القيم الذاتية.

نقوم بحساب أربع مصفوفات التباين-التباين المشترك ذات البعد  $(k, k)$  انطلاقاً من بواقي التقدير  $u_t$  و  $v_t$

$$\hat{\Sigma}_{uu} = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{t=1}^T u_t u_t'$$

$$\hat{\Sigma}_{vv} = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{t=1}^T v_t v_t'$$

$$\hat{\Sigma}_{uv} = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{t=1}^T u_t v_t'$$

$$\hat{\Sigma}_{vu} = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{t=1}^T v_t u_t'$$

ثم نستخلص القيم الذاتية للمصفوفة  $M$  ذات البعد  $(k, k)$  المحسوبة بالطريقة التالية:

$$M = \hat{\Sigma}_{vv}^{-1} \hat{\Sigma}_{vu} \hat{\Sigma}_{uu}^{-1} \hat{\Sigma}_{uv}$$

### (1) اختبار الأثر Trace Test

انطلاقاً من هذه القيم الذاتية، نحسب الإحصائية:  $\lambda_{trace} = -T \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \lambda_i)$  مع  $T$  هو عدد المشاهدات،  $\lambda_i$  هي القيمة الذاتية رقم  $i$  للمصفوفة  $M$ ،  $r$  هو رتبة المصفوفة. هذه الإحصائية تتبع قانون احتمالي (مشابه لتوزيع  $\chi^2$ ) مجدول باستخدام المحاكاة لـ (Johansen & Juselius, 1990). يعمل اختبار Johansen هذا برفض الفرضيات البديلة:

- رتبة المصفوفة  $r$  تساوي الصفر ( $r=0$ )، أي:  $H_0: r=1$  مقابل الفرضية  $H_1: r > 0$ . إذا تم رفض الفرضية  $H_0$ ، فإننا ننتقل إلى الاختبار الموالي (إذا كانت  $\lambda_{trace} <$  من القيمة الحرجة المجدولة فإننا نرفض الفرضية  $H_0$ ).
- رتبة المصفوفة  $r$  تساوي 1 ( $r=1$ )، أي:  $H_0: r=1$  مقابل الفرضية  $H_1: r > 1$ . إذا تم رفض الفرضية  $H_0$ ، فإننا ننتقل إلى الاختبار الموالي (إذا كانت  $\lambda_{trace} <$  من القيمة الحرجة المجدولة فإننا نرفض الفرضية  $H_0$ ).
- رتبة المصفوفة  $r$  تساوي 2 ( $r=2$ )، أي:  $H_0: r=2$  مقابل الفرضية  $H_1: r > 2$ . إذا تم رفض الفرضية  $H_0$ ، فإننا ننتقل إلى الاختبار الموالي (إذا كانت  $\lambda_{trace} <$  من القيمة الحرجة المجدولة فإننا نرفض الفرضية  $H_0$ ). وهكذا.....

بعد رفض الفرضيات المختلفة  $H_0$  في نهاية المطاف، واختبرنا الفرضية  $H_0: r = k - 1$  مقابل الفرضية  $H_1: r = k$ ، وإذا قمنا برفض  $H_0$ ، فإن رتبة المصفوفة هي  $r = k$  (بمعنى عدد علاقات التكامل المشترك يساوي عدد المتغيرات) وبالتالي لا توجد علاقة تكامل مشتركة لأن المتغيرات كلها  $I(0)$ .

يوفر البرنامج الاقتصاد القياسي مباشرة كل هذه المعلومات: إحصائية الاثر المحسوبة بين 1 و k وكذلك القيم الحرجة المرتبطة بها.

لإجراء هذا الاختبار، يقترح Johansen خمس مواصفات تتعلق بأشعة التكامل المشترك أو بما يسمى بالتحديد لسلاسل VAR.

- لا يوجد اتجاه عام خطي في البيانات (السلاسل كلها DS بدون مشتقة):

1- عدم وجود الاتجاه الخطي في السلاسل والثابت في علاقات التكامل المشترك (الثابت في العلاقة طويلة الاجل ليس معنوياً). مثال على ذلك:

$$\Delta y_{1,t-1} = b_1^1 \Delta y_{1,t-1} + b_2^1 \Delta y_{2,t-1} + b_3^1 \Delta y_{3,t-1} + \alpha^1 (y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1} - \beta_3 y_{3,t-1}) + \varepsilon_t^1$$

2- عدم وجود الاتجاه الخطي في السلاسل، ولكن يوجد الثابت في علاقات التكامل المشترك (الثابت في العلاقة طويلة الاجل ليس معنوياً). مثال على ذلك:

$$\Delta y_{1,t} = b_1^1 \Delta y_{1,t-1} + b_2^1 \Delta y_{2,t-1} + b_3^1 \Delta y_{3,t-1} + \alpha^1 (y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1} - \beta_3 y_{3,t-1} - B_0) + \varepsilon_t^1$$

- وجود اتجاه عام خطي في البيانات (سلسلة واحدة على الأقل هي من نوع DS بالمشتقة):

3- وجود اتجاه عام خطي في السلاسل والثابت في علاقات التكامل المشترك. مثال على ذلك:

$$\Delta y_{1,t} = a_0^1 + b_1^1 \Delta y_{1,t-1} + b_2^1 \Delta y_{2,t-1} + b_3^1 \Delta y_{3,t-1} + \alpha^1 (y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1} - \beta_3 y_{3,t-1} - \beta_0) + \varepsilon_t^1$$

4- وجود اتجاه عام خطي في السلاسل والثابت في علاقات التكامل المشترك (سلسلة واحدة على الأقل هي من نوع TS). مثال على ذلك:

$$\Delta y_{1,t} = a_0^1 + b_1^1 \Delta y_{1,t-1} + b_2^1 \Delta y_{2,t-1} + b_3^1 \Delta y_{3,t-1} + \alpha^1 (y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1} - \beta_3 y_{3,t-1} - \beta_0 - ct) + \varepsilon_t^1$$

- وجود اتجاه تربيعي في البيانات:

5- وجود اتجاه تربيعي في السلاسل واتجاه خطي في علاقات التكامل. مثال على ذلك:

$$\Delta y_{1,t} = a_0^1 + bt + b_1^1 \Delta y_{1,t-1} + b_2^1 \Delta y_{2,t-1} + b_3^1 \Delta y_{3,t-1} + \alpha^1 (y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1} - \beta_3 y_{3,t-1} - \beta_0 - ct) + \varepsilon_t^1$$

يتم اختيار أحد هذه المواصفات حسب البيانات والشكل المحتمل للاتجاه العام (تحليل الخصائص العشوائية للسلاسل الزمنية أو من خلال الرسوم البيانية التي تساعدنا على التحديد). يلخص الجدول 1 اختيار مواصفات VECM تبعاً لأنواع السيرورات.

الجدول 1: تمثيل نموذج تصحيح الخطأ

الخاصية					نوع السيروورة
5	4	3	2	1	
			×	×	كل السيروورات هي نوع DS بدون مشتقة
		×			سيروورة واحدة على الأقل هي نوع DS بالمشتقة
	×				سيروورة واحدة على الأقل هي نوع TS
×					سيروورة واحدة على الأقل لها اتجاه تربيعي

(Bourbonnais, 2015, p. 301) المصدر:

## 2) اختبار القيمة الذاتية العظمى Maximum Eigenvalue

وهو الاختبار الثاني الذي اقترحه Johansen ويعطى بالإحصائية التالية:

$$\lambda_{\max} = -T \text{Log}(1 - \lambda_{r+1}) \quad , r = 0, 1, 2, \dots$$

يتم إجراء هذا الاختبار بشكل تسلسلي كما رأينا سابقا وهذا برفض الفرضيات البديلة. وفي حالة اختلاف الاختبارين (اختبار الأثر واختبار القيمة الذاتية العظمى)، نفضل اختبار الأثر الذي له قوة عالية.

## 5. اختبار ضعف المتغيرات الخارجية Weak Exogeneity

كل متغيرات النظام التي تشكل الشعاع  $Y_t$  تعتبر على أنها متغيرات داخلية. يتعلق هذا الاختبار بالمعامل  $\alpha$  الذي يمثل سرعة التعديل (قوة العودة نحو التوازن) سواء كانت هناك علاقة تكامل مشترك واحدة فقط او عدة علاقات للتكامل المشترك. ولأجل اختبار الفرضيات يمكننا تطبيق اختبار ضعف المتغيرات الخارجية. لنعتبر نموذج تصحيح الخطأ المتعدد التالي والذي يحتوي على علاقتين للتكامل المشترك  $r = 2$  وفجوتين

زمنين متباطئين  $p = 2$  (Cadoret, Benjammin, Martin, & Herrard, 2009, pp. 349-350):

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \\ \Delta Y_{3t} \end{pmatrix} = A + \begin{pmatrix} \Delta Y_{1t-1} \\ \Delta Y_{2t-1} \\ \Delta Y_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

المعاملات  $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$  تعطي على التوالي السرعة التي يتم بها تعديل:  $\Delta Y_{1t}, \Delta Y_{2t}, \Delta Y_{3t}$  عندما يتم اعطاء علاقة التكامل المشترك العلاقة:  $\beta_{11} Y_1 + \beta_{21} Y_2 + \beta_{31} Y_3$ . نفس الشيء لـ:  $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}$  تعطي على التوالي السرعة التي يتم بها تعديل:  $\Delta Y_{1t}, \Delta Y_{2t}, \Delta Y_{3t}$  عندما يتم اعطاء علاقة التكامل المشترك العلاقة:

$$\beta_{12} Y_1 + \beta_{22} Y_2 + \beta_{33} Y_3$$

إذا كان:  $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$ ، اذن علاقة التكامل المشترك لا تدخل في المعادلة الثالثة لنموذج  $VECM$ ، وهنا نعتبر ان المتغير  $Y_{3t}$  هو متغير خارجي ضعيف ويقدر بالصيغة الجزئية لنموذج  $VECM$  الاولي.

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{pmatrix} = A_0 Y_{3t} + \tilde{A}_1 \begin{pmatrix} \Delta Y_{1t-1} \\ \Delta Y_{2t-1} \\ \Delta Y_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

لأجل اختبار ضعف المتغيرات الخارجية يجب اختبار الفرضية:  $H_0: \alpha_{ij} = 0, j = 1, \dots, r$ . أي اختبار إذا كان السطر:  $i$  يتضمن عناصر صفرية. يتحقق هذا الاختبار بفرض قيود على الاسطر لأجل تطبيق اختبار نسبة المعقولية Likelihood Ratio، والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$LR = -2(\text{Log}L^* - \text{Log}L) = T \sum_{i=1}^r \text{Log} \frac{1 - \lambda^*}{1 - \lambda}$$

مع:  $r-1, \lambda^*$  تمثل القيم الذاتية المتحصل عندما يكون النموذج مقيدا. هذه الإحصائية تتبع توزيع  $\chi^2(r(N-m))$ . و:  $(N-m)$  هو عدد الاسطر ( $N$ : عدد السلاسل الزمنية) مع القيود.

## 6. اختبار الفرضيات لعلاقات التكامل المشترك

تشير اختبارات التكامل المشترك لـ Johansen إلى عدد اشعة التكامل المشترك. وتقديرات البيانات حسب العمود  $\beta$  (هو الشعاع الذي عناصره تعبر عن معاملات العلاقات طويلة الاجل للمتغيرات) ليست بالضرورة فريدة (وحيدة). من الضروري فرض قيود بدافع الترتيبات الاقتصادية من أجل الحصول على معلومات حول العلاقة الاقتصادية طويلة الأجل على سبيل المثال، يمكن استخدام قيد من النوع:  $\beta_{1j} = -\beta_{2j}$  لتحديد الاعمدة لـ  $\beta$ . اذن المشكل يتوقف على اختبارات القيود المبنية على أساس إحصائية  $LR$  لتحديد  $\beta$  (Cadoret, Benjammin, Martin, & Herrard, 2009, p. 350).

## 7. ملخص إجراء التقدير

من خلا ما سبق، سندعى في هذه الجانب بمحاولة تجميع الخطوات الرئيسية المتعلقة بتقدير نموذج تصحيح الخطأ المتعدد  $VECM$  (Bourbonnais, 2015, p. 314):

- الخطوة 1: تحديد عدد التأخيرات  $p$  (فترة التباطؤ) للنموذج (في المستوى أو باللوغاريتم للسلاسل الزمنية) وفقا لمعايير  $AIC$  أو  $SC$ .

- الخطوة 2: تقدير المصفوفة  $\pi$  والقيام باختبار Johansen مما يسمح بمعرفة عدد علاقات التكامل المشترك (تقترح البرامج عددا معيناً من المواصفات البديلة، مثل وجود الثابت في علاقة التكامل المشترك، تقييد الثابت، وجود اتجاه محدد.....).
- الخطوة 3: تحديد علاقات التكامل المشترك، أي العلاقات طويلة المدى بين المتغيرات.
- الخطوة 4: التقدير بطريقة المعقولية العظمى نموذج تصحيح الخطأ المتعدد  $VECM$ ، والتحقق من صحته باستخدام الاختبارات المعتادة: معنوية المعاملات والتحقق من أن البواقي المقدره هي تشويش ابيض (اختبار: Ljung-Box)، اختبارات ضعف المتغيرات الخارجية.
- الخطوة 5: وهي الخطوة الاخيرة، حيث يمكننا التحقق من أن تقدير بطريقة OLS للعلاقة طويلة الاجل تعطي نتائج متشابهة تقريبا (من حيث معنوية المعلمات المقدره) مع تلك التي تم الحصول عليها من خلال طريقة المعقولية العظمى.

## تمارين الفصل

## تمرين 1

لتكن لدينا السلسلة الزمنية  $Y_t, X_t$ :

$$Y_{1t} = 5t^2 - 4t + 6 + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_{2t} = -3t^2 + t - 2 + \varepsilon_{2t}$$

1. حدد الشروط اللازمة حتى تصبح السلسلتين متكاملتين تكاملاً مشتركاً.
2. بافتراض ان شروط التكامل المشترك هي محققة مع:  $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 5$ ، اثبت ان السلسلتين متكاملتين.

## الحل

1. نقول ان السلسلتين  $Y_{1t}$  و  $Y_{2t}$  متكاملتين إذا تحقق الشرطان التاليان:
  - إذا تضمننا اتجاهها عاماً عشوائياً بنفس درجة التكامل  $d$ .
  - توليفة خطية للسلسلتين تسمح بالحصول على سلسلة ذات درجة تكامل اقل.

ليكن:

$$Y_{1t} \rightarrow I(d)$$

$$Y_{2t} \rightarrow I(d)$$

$$\alpha_1 Y_{1t} + \alpha_2 Y_{2t} \rightarrow I(d-b)$$

بحيث:

مع:  $d \geq b > 0$

ونرمز بـ:  $X_t, Y_t \rightarrow CI(d, b)$

حيث: يسمى  $[\alpha_1, \alpha_2]$  بشعاع التكامل المشترك.

ليكن لدينا:

$$(Y_{1t} + Y_{2t}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 Y_{1t} + \alpha_2 Y_{2t} \rightarrow I(2-b)$$

حيث درجة التكامل بين السلسلتين هي  $d = 2$ ، أي السلسلتين متكاملتين من الدرجة الثانية  $I(2)$ .

2. اثبات بان السلسلتين متكاملتين.

نعلم ان السلسلة تكون متكاملة من الدرجة  $d: I(d) \rightarrow Z_t$  إذا تم تفريقها  $d$  مرة من اجل جعلها مستقرة،

وان التوليفة الخطية هي:  $[\alpha_1, \alpha_2] = [3, 5]$ ، حيث:

$$\alpha_1 Y_{1t} = 3(5t^2 - 4t + 6 + \varepsilon_{1t})$$

$$= 15t^2 - 12t + 18 + 3\varepsilon_{1t}$$

$$\alpha_2 Y_{2t} = 5(-3t^2 + t - 2 + \varepsilon_{2t})$$

$$= -15t^2 + 5t - 10 + 5\varepsilon_{2t}$$

ومنه:

$$Z_t = \alpha_1 Y_{1t} + \alpha_2 Y_{2t}$$

$$= 15t^2 - 12t + 18 + 3\varepsilon_{1t} - 15t^2 + 5t - 10 + 5\varepsilon_{2t}$$

$$= 8 - 7t + 3\varepsilon_{1t} + 5\varepsilon_{2t}$$

نضع:  $v_t = 3\varepsilon_{1t} + 5\varepsilon_{2t}$ ، نجد:

$$Z_t = 8 - 7t + v_t$$

حيث لابد بان السلسلة  $Z_t$  تكون متكاملة من الدرجة الأولى حتى يتحقق لنا التكامل المشترك بين السلسلتين:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

$$\Delta Z_t = [8 - 7t + v_t] - [8 - 7(t-1) + v_{t-1}]$$

$$\Delta Z_t = 7 + v_t - v_{t-1}$$

لنتحقق من شروط الاستقرار لـ:  $Z_t$

$$[1] \quad E(\Delta Z_t) = 7$$

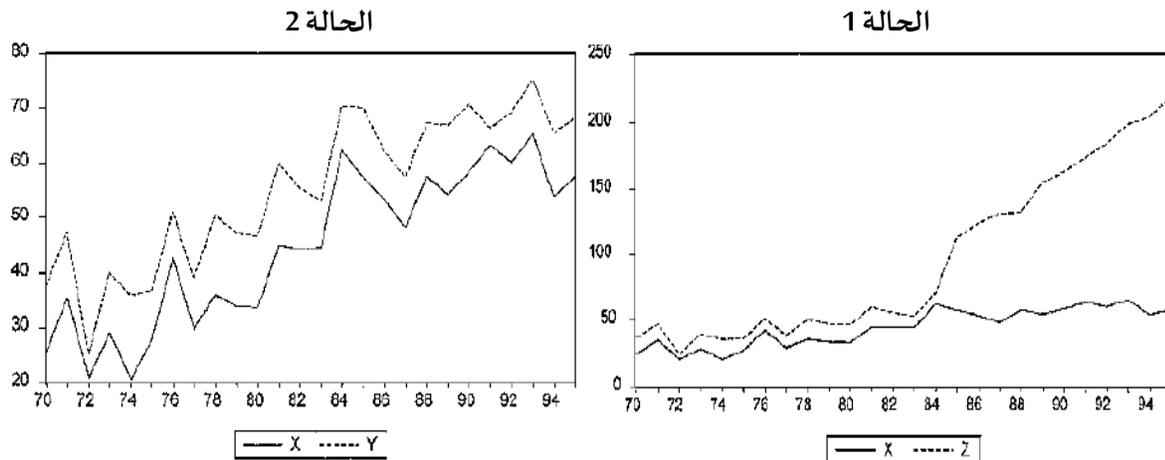
$$[2] \quad V(\Delta Z_t) = V(7 + v_t - v_{t-1}) \\ = 0 + V(v_t) - V(v_{t-1}) \\ = \sigma_v^2 - \sigma_v^2 = 0$$

$$[3] \quad \text{cov}(\Delta Z_t, \Delta Z_{t-1}) = E[\Delta Z_t - E(\Delta Z)] [\Delta Z_{t-1} - E(\Delta Z)] \\ = E[v_t - v_{t-1}] [v_{t-1} - v_{t-2}] = 0$$

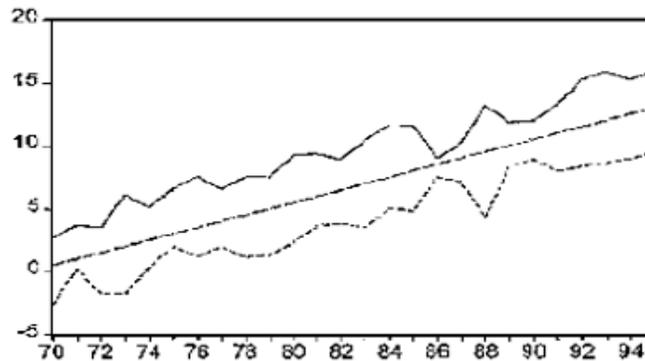
وعليه التوقع، التباين والتباين المشترك غير مرتبطين بالزمن  $t$  وبالتالي  $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$  هي سيرورة مستقرة.

## تمرين 2

لتكن لدينا السلسلة الزمنية  $X_t, Y_t$  في الحالتين الآتيتين:



## الحالة 3



1. اشرح هذه الحالات الثلاث؟

2. استنتج بيانياً درجة التكامل المشترك؟

## الحل

1. شرح هذه الحالات الثلاث:

- في الحالة الأولى، السلسلتان لهما اتجاه ثابت يتطور عبر الزمن في الفترة الأولى ثم اتجاه متباعد في الفترة الثانية. اذن السلسلتين غير متكاملتين تكاملاً مشتركاً.
- في الحالة الثانية، يكون للسلسلتين اتجاه ثابت يتطور عبر الزمن طوال الفترة بأكملها، وهنا تكون السلسلتين متكاملتين، أي هناك تطور متزامن طويل الأجل.
- في الحالة الثالثة، هناك علاقة طويلة الأجل بين  $X_t$  و  $Y_t$  أي ان السلسلتان قد تحقق بينهما تكامل مشترك وهذه العلاقة يمكن تمثيلها بمعادلة الخط المستقيم ( $Y_t - \beta X_t = 0$ ) وهو خط التوازن طويل الأجل للنظام، يتم تعريف منطقة تطور النظام خارج التوازن (ديناميكيات المدى القصير) من خلال الخطأ الملاحظ بين  $X_{t-1}$  و  $Y_{t-1}$ . مع العلم ان المنحنيين يمثلان مجال النظام.

2. استنتاج درجة التكامل الممكنة:

- في الحالة الأولى، بما انه السلسلتين غير مستقرتين فلا توجد علاقة تكامل مشترك. وانه من غير المؤكد استنتاج درجة التكامل لمجموع السلسلتين لانهما من درجتين مختلفتين.

$$\begin{aligned} X_t &\rightarrow I(d) \\ Y_t &\rightarrow I(d') \quad d \neq d' \end{aligned} \Rightarrow X_t + Y_t \rightarrow I(?)$$

- في الحالة الثانية مع الحالة الثالثة، فان السلسلتين مستقرتين عند التفاضل الأول وهناك علاقة توازنية طويلة الأجل (لان التكامل المشترك يطبق على سلاسل زمنية مستقرة عند الفرق الأول) مع العلم ان الحالة الثالثة تعكس نموذج تصحيح الخطأ، وبالتالي تكون درجة التكامل بين السلتين هي:

$$\begin{aligned} X_t &\rightarrow I(d) \\ Y_t &\rightarrow I(d') \quad d = d' \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} X_t + Y_t \rightarrow I(d) \\ X_t, Y_t \rightarrow CI(1,1) \end{cases}$$

## تمرين 3

حسب النظرية المقدمة من قبل (Engle & Granger. 1987) فانه يمكن تمثيل جميع السلاسل الزمنية المتكاملة بنموذج تصحيح الخطأ، وبعد التقدير بواسطة طريقة المربعات الصغرى OLS تحصلنا على النتائج التالية:

$$[1] Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_t + \hat{\varepsilon}_t$$

$$[2] \hat{\varepsilon}_t = \rho \hat{\varepsilon}_{t-1} + \mu_t, \quad \mu_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$[3] \Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t, \quad (\alpha_2 < 0)$$

مع العلم ان القيمة الحرجة الجدولية لاختبار انحدار التكامل المشترك لـ Durbin-Watson عند مستوى المعنوية:  $\alpha = 5\%$  هي 0.24 والقيمة المحسوبة هي 0.92، فالمطلوب مايلى:

1. ماذا تمثل هذه المعادلات الثلاثة؟
2. ماذا يمثل المعامل  $\alpha_2$  وماهي شروطه؟
3. اشتق حدود مناطق الارتباط لاختبار  $DW$ .
4. ما هو مبدأ هذا الاختبار؟
5. اختبر وجود تكامل مشترك بين المتغيرين  $X_t$  و  $Y_t$  عند مستوى المعنوية:  $\alpha = 5\%$ .

### الحل

1. شرح هذه المعادلات الثلاث:

- المعادلة [1] تمثل معادلة العلاقة التوازنية طويلة الاجل لنموذج تصحيح الخطأ  $ECM$ .
- المعادلة [2] تمثل معادلة اختبار الارتباط الذاتي التسلسلي التي تهدف إلى اختبار الفرضيات التالية:
 
$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$
- المعادلة [3] هي المعادلة المقدره بواسطة طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS لعلاقة النموذج الديناميكي (أي المدى القصير).
- 2. المعامل  $\alpha_2$  يمثل قوة العودة نحو التوازن ويجب ان يكون سالبا ومعنوياً. خلاف ذلك، يجب رفض نمذجة  $ECM$ . لأنه في الواقع، آلية تصحيح الخطأ (التي تسمح لنا بالاتجاه نحو العلاقة طويلة المدى) ستتجه نحو الاتجاه المعاكس وتبتعد عن الهدف طويل المدى.

3. اشتقاق حدود مناطق الارتباط لاختبار  $DW$

$$DW = 2(1 - \rho) = \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}{\sum_{t=2}^T \hat{\varepsilon}_{t-1}^2} \quad \text{نعلم ان:}$$

لأنه يمكن كتابة احصائية  $DW$  أيضا بدلالة معامل الارتباط  $\rho$ ، يصبح لدينا:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 + \sum_{t=2}^T \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$

نلاحظ أن:  $\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 \approx \sum_{t=2}^T \hat{\varepsilon}_{t-1}^2$  ينتج لنا اذن:

$$DW \approx \frac{2 \sum_{t=2}^T \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}{\sum_{t=2}^T \hat{\varepsilon}_{t-1}^2} - \frac{2 \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$

ومن جهة أخرى نعلم أن:

$$\rho = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$

$$DW = 2(1 - \rho)$$

ومنه:

-1	0	+1	$\rho$
ارتباط سالب	غياب ارتباط	ارتباط موجب	نوع الارتباط بين: $\hat{\varepsilon}_t$ و $\hat{\varepsilon}_{t-1}$
4	2	0	$DW_{cal}$

4. مبدأ هذا الاختبار هو أنه ينطلق من نفس مبدأ الانحدار الزائف ( $R^2 > DW$ )، حيث يحدث الانحدار الزائف عندما تكون القيمة المحسوبة لاختبار  $DW$  قريبة من الصفر وتكون أقل من قيمة  $DW$  الحرجة، ففي هذه الحالة لا يوجد تكامل مشترك بين المتغيرين لأنه هناك ارتباط ما بين البواقي (هنا أيضا تكون سلسلة البواقي المقدرة غير مستقرة وهو مخالف للخطوة الأولى من اختبار Granger-Engle. بينما كل ما ابتعدت القيمة المحسوبة لاختبار  $DW$  عن الصفر وتكون تفوق قيمة  $DW$  الحرجة، ففي هذه الحالة يمكن قبول وجود تكامل مشترك بين المتغيرين.

5. اختبر وجود تكامل مشترك بين المتغيرين  $X_t$  و  $Y_t$  عند مستوى المعنوية:  $\alpha = 5\%$ .

$H_0$ :  $\rho = 1$ : عدم وجود تكامل مشترك

$H_1$ :  $\rho < 1$ : وجود تكامل مشترك

بما ان القيمة المحسوبة لإحصائية  $DW = 0.92$  أكبر من القيمة الحرجة الجدولية والبالغة 0.24 فانه يتم رفض الفرضية العدمية  $H_0$  وقبول الفرضية البديلة  $H_1$  مما يعني وجود تكامل مشترك بين المتغيرين:  $X_t, Y_t$ .

## 5. نماذج الانحدار الذاتي المشروطة بعدم

### تجانس التباين

## Autoregressive Conditional Heteroscedastic (ARCH) Models

عالجنا في الفصول السابقة مختلف النماذج الخطية للسلاسل الزمنية مع إمكانية الكشف عنها من عدم خطيتها والتي ساهمت بالكثير في نمذجة الظواهر الاقتصادية مع محاولة التنبؤ بالقيم المستقبلية لها، غير انه هناك سلاسل الزمنية تواجه مشكلة حقيقية التي تتمثل في عدم ثبات تباينها لأخطائها العشوائية بمرور الزمن، الأمر الذي يتطلب رؤية مغايرة لنمذجة هذه الظواهر. فمن خلال دراسته لمعدلات التضخم في المملكة المتحدة سنة 1982، اقترح Engle استخدام فكرة المتغيرة العشوائية لتفسير عدم التجانس الشرطي، وهذا ما نجم عنه بما يسمى نماذج الانحدار الذاتي ذات التباين الشرطي غير المتجانس تم تعميمها الى نماذج *GARCH* في سنة 1986 بواسطة Bollerslev، وبعدها تم إنشاء نماذج *ARCH* مستحدثة التي تأخذ صفة عدم التناظر او التماثل.

اذن، نماذج *ARCH* و *GARCH* هما نموذجان يلعبان دورا رئيسيا في وصف السلسلة المالية بالنظر إلى السلوك لعدم ثبات تجانسها عبر الزمن، وهو أمر كان يتم اعتباره دائما من قبل نماذج *ARMA* التي تفترض أن التباين هو غير شرطي فيما يتعلق بالزمن. لذلك يتكون المبدأ العام من التساؤل حول خاصية عدم ثبات تجانس التباين للأخطاء العشوائية التي يتم الاحتفاظ بها بشكل عام في إطار النماذج الخطية. وعليه سوف نرى في هذا الفصل مايلي:

ا. مفاهيم

ii. صياغة نموذج ARCH

iii. خصائص نموذج ARCH

iv. تعميم، اختبار وتقدير نموذج ARCH

v. التنبؤ بنموذج ARCH/GARCH

vi. نماذج الانحدار الذاتي المشروطة بعدم تجانس الأخطاء المستحدثة

## 1. مفاهيم

عادة ما تواجه البيانات مشكلة حقيقية التي تتمثل في عدم ثبات التباين او بما يسمى بالتباين غير المتساوي، ففي حالة البيانات المقطعية مثلا يكون بسبب عدم ثبات التباين بين وحدات المقطع العرضي الفردية التي تشمل مشاهدات مقطعية مثل العائلات، الشركات، المناطق والبلدان. اما في حالة بيانات السلسلة الزمنية التي تتضمن عوائد الأصول، مثل عوائد الأسهم او أسعار الصرف للعملة الأجنبية، فيلاحظ عادة بانه هناك عدم ثبات التباين المشاهد على مدى فترات مختلفة يكون مرتبطا ذاتيا. تسمى هذه الظاهرة في الدراسات الاقتصادية بعدم ثبات التباين الشرطي ذو الانحدار الذاتي Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) (جوجارات، 2015، الصفحات 400-401).

من جهة أخرى، نجد بان حالة عدم التأكد خاصة في المسائل المالية والتي تنطلق باستخدام المتوسط الشرطي بدلا من المتوسط غير الشرطي في نماذج  $ARMA$  انه من شأنها أن تساهم في تحسين التنبؤات الناتجة عن هذه النماذج المختلطة، وللتفرقة بين هذين المفهومين، نعتبر السيرورة التالية (شيخي، 2011، الصفحات 311-312):

$$AR(1): Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث  $\varepsilon_t$  هو تشويش أبيض والمتوسط الشرطي يعطى بالعلاقة:  $E(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots) = \phi_1 Y_{t-1}$ ، بينما يكون المتوسط غير الشرطي معدوما.

بعدها تطورت الى فكرة العزوم من الدرجة الثانية التي أشار اليها (Engle, 1982) والتي مفادها استعمال مفهوم التباين الشرطي بدلا من التباين غير الشرطي في تحسين القيم التنبؤية، لأنه بينما يبقى هذا الأخير ثابتا بتغير الزمن، فان التباين الشرطي يمكن أن يترجم العلاقة بين المشاهدة  $Y_t$  والمشاهدات السابقة  $Y_{t-1}$ . فإذا أخذنا المثال السابق، يكون التباين الشرطي للسيرورة  $AR(1)$  من الشكل:

$$V(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots) = E\left(\left[Y_t - E(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)\right]^2 | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots\right)$$

بينما يكون التباين غير الشرطي كمايلي:

$$V(Y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - \phi_1^2)}$$

هذه المبادئ تعتبر بمثابة القاعدة الأساسية لصياغة نماذج ARCH وهي نماذج انحدار ذاتي ذات تباين شرطي غير متجانس التي أراد من خلالها (Engle, 1982) تعويض نقص نماذج ARMA ، خاصة في السلاسل الزمنية المالية التي تتميز بسرعة التقلبات The volatility المرتبطة بالزمن.

### 1. مشكل عدم تجانس تباينات الأخطاء

النماذج التي تطرقنا إليها سابقا تعتبر ان متوسط الأخطاء معدوم مع ثبات التباين بمرور الزمن وهي مستقلة فيما بينها، أي (شيخي، 2011، الصفحات 312-314):

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0, \forall t = 1, \dots, T \\ V(\varepsilon_t) &= E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2, \forall t = 1, \dots, T \\ \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = 0, \forall t \neq t', t, t' = 1, \dots, T \end{aligned}$$

في ظل عدم تحقق هذه الفرضيات الثلاث يصبح تقدير مصفوفة التباين-التباين المشترك صعبا، وهذا بسبب عدم تجانس الأخطاء والترابط فيما بينها وبالتالي يؤدي الى نتائج خاطئة عند تقدير النموذج المدروس. لحل هذه الاشكال، اقترح تكبير حجم العينة عند تقدير مصفوفة التباين وهذا من اجل الحصول على تقديرات متقاربة غير ان هذا الحل كان بصفة جزئية كونها تؤدي إلى تكبير عدد المعالم المقدره. من أجل ذلك اقترح الباحثون جملة من الحلول من بينها على سبيل المثال نموذج الانحدار الذاتي المعروف بالشكل:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \mu_t$$

$$E(\mu\mu') = \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_\mu^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_\mu^2 \end{bmatrix} \quad \text{حيث } \mu_t \text{ يمثل تشويش أبيض:}$$

في هذا النوع من النماذج تأخذ مصفوفة التباين-التباين المشترك لـ  $\varepsilon$  شكلا خاصا:

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_i) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_T) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_i) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(\varepsilon_i\varepsilon_1) & E(\varepsilon_i\varepsilon_2) & \vdots & E(\varepsilon_i\varepsilon_i) & \vdots & E(\varepsilon_i\varepsilon_T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(\varepsilon_T\varepsilon_1) & E(\varepsilon_T\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_T\varepsilon_i) & \dots & E(\varepsilon_T^2) \end{bmatrix}$$

من خلال مصفوفة التباين-التباين المشترك لـ  $\varepsilon$  نميز حالتين:

- حالة:  $t = t'$  ، تكون العناصر القطرية كلها متساوية:

$$E(\varepsilon_1^2) = \dots = E(\varepsilon_T^2) = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\mu^2}{1 - \rho^2}$$

- حالة:  $t \neq t'$  ، تكون العناصر غير القطرية كلها متساوية لعدد أسي متقارب:

$$E(\varepsilon, \varepsilon_{t-k}) = \rho^k \sigma_\varepsilon^2$$

في الحالتين، من اجل اخطاء مترابطة من الشكل  $AR(1)$  يكفي تقدير المعلمتين:  $\rho, \sigma^2$  ، حيث من أسباب عدم تجانس التباين في السلسلة الزمنية هو الحالة التي تكون فيها المشاهدات في شكل مجموعات غير متجانسة، فعلى سبيل المثال توزيع الانفاق الاسري لاصحاب الدخل المرتفع على السلع الكمالية ذات السعر المرتفع والسلع الضرورية، فانه حتما سيكون توزيع نفقاتها متذبذبا مما يؤدي إلى مشكلة عدم تجانس التباين في المعطيات المجمعة.

تركزت معظم الحلول لمشكلة عدم تجانس تباين الأخطاء في إيجاد تباين يتطور مع الزمن، حيث يتم إدخال متغيرات  $X_t$  جديدة مفسرة لهذا التطور، إضافة إلى ذلك كون التباين ثابتا في كل مجموعة أو فئة ويؤخذ التباين أو الانحراف المعياري كأنه دالة خطية لمتغيرات خارجية ويفترض هنا، أن المتغير الداخلي يكون مستقلا عن تغير التباين.

## 2. التوزيع الشرطي للتوقع

من المعروف ان  $\varepsilon_t$  هي سلسلة عشوائية حقيقية منفصلة ذات توزيع شرطي  $P(\varepsilon_t | s < t)$  ، وفي ظل شروط معينة مع معرفة القيم الملاحظة خلال المجال الزمني  $\{s < t\}$  ، فإن توقع لأي قيمة في اللحظة  $t$  ما هو الا هو ببساطة متوسطها الشرطي  $E(\varepsilon_t | s < t)$  .

بنفس المنطق، يمكننا أيضا أن نبين من دون صعوبة، أن التباين الشرطي  $V(\varepsilon_t | s < t)$  ، يعتمد على القيم الماضية او السابقة للسيرورة. علاوة على ذلك، مع الأخذ بعين الاعتبار تعريف الدالة عشوائية بالمعنى الاحتمالي لمصطلح التوزيع الشرطي، فإن التوقع والتباين الشرطيين كلاهما متغيرين عشوائيين. من وجهة نظر التباين، هذه المعلومات لا تبينها بنية نماذج الاقتصاد القياسي الكلاسيكية، حيث غالبا ما نعمل في ظل افتراض تباين ثابت للتنبؤ أو يعتمد على عوامل خارجية. حول هذا الموضوع هو ما تجيب عليه نماذج ARCH التي قدمها (Engle, 1982) التي هي في الواقع، تطور سيرورات تعميم فرضية ثبات التباين، فيحين تقترح أمثلة لما قد تساهم به في نمذجة السلاسل الاقتصادية.

هذه السيرورات ذات متوسط معدوم وبدون ترابط ذاتي مع ثبات تجانس التباين الشرطي Conditional Homoscedasticity وعدم ثبات التجانس الشرطي Conditional Heteroscedasticity ولشرح سيرورات ARCH هذه كيف أدخلت في الادبيات الإحصائية، نقترح السيرورة الماركوفية من الدرجة الأولى (Hamid, Khenouse, & Zatout, 1998, pp. 17-18):

$$AR(1): \varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \mu_t$$

حيث  $\mu_t$ : سيرورة غوسية Gaussian، أي:  $\mu_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\mu^2)$  مع ان السيرورة الماركوفية هي ذات التوزيع الاحتمالي:  $P(\varepsilon_t | s < t) = P(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1})$ . بافتراض ان السيرورة انها مستقرة، أي:  $|\phi_1| < 1$ ، فمن الواضح ان:

$$\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1} \sim \mathcal{N}(\phi_1 \varepsilon_{t-1}, \sigma^2) \quad \text{و} \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}\right)$$

معنى هذا أن استخدام التوزيع الشرطي يمكن أن يحسن نوعية مجال التوقع في الاتجاه، حيث يتم استرداد المعلومات السابقة بمتوسط  $\phi_1 \varepsilon_{t-1}$  من جهة ومن جهة أخرى يتم تخفيض الانحراف عن هذه القيمة بمقدار

$$\pm \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \phi_1^2}}$$

لكن عند القدوم إلى الفكرة الرئيسة في استخدام المعلومات السابقة لمعرفة القيمة المستقبلية المتوقعة  $\varepsilon_t$ ، سيلاحظ أن ذاكرة السيرورة لا تظهر في الانحراف المعياري المتوقع، سواءً كان شرطياً أم لا. إذا استمر هذا التقدير للمجال الزمني المتوقع يصبح من الضروري وضع فئة أعم من النماذج. وعليه لا يوجد أي تحسن في حدود مجال التوقع بالرغم من محاولة الحد من ادخال العوامل الخارجية التي تفسر سلوك التباين وهذه الأخيرة هي حلول غير محققة لأنها مرتبطة بالزمن التي تترجم الى عدم استقرارية السيرورة. فاذا تم دراسة نماذج المتوسطات بشكل كاف، فان نموذج التباين ليس كذلك، من هنا اقترح (Engle, 1982) لأول مرة مواصفات ثابتة لنموذج التباين الشرطي، والتي تعرف كدالة انحدار ذاتي لمربعات الأخطاء العشوائية الماضية للسيرورة.

## II. صياغة نموذج ARCH

طور (Engle, 1982) نمودجا لوصف التباين المتغير بمرور الزمن. تسمى هذه المنهجية بالانحدار الذاتي المشروطة بعدم تجانس التباين ARCH. وقد أدى مفهوم نموذج ARCH إلى تطوير صيغ أخرى مماثلة من أجل تحديد وشرح تباين السلاسل الزمنية. قدم Engle نموذج  $ARCH(q)$  الخطي حيث يفترض أن التباين

الشرطي المتغير مع الزمن على انه هو دالة خطية للصدمات المربعة الماضية (Islam & Watanapalachaikul, 2012, p. 124)  $q$  يعتبر نموذج ARCH النموذج الأول الذي يوفر إطاراً منهجياً لنمذجة تقلب السلسلة الزمنية وهو من النماذج المتناظرة الذي يعني أن تأثير الصدمة (التقلب) يكون غير مرتبط بإشارتها (الصدمات الموجبة والسالبة لها نفس التأثير) وإنما بسعتها فقط وهذا بسبب ان تباين الخطأ الحالي يعتمد على مربع تباين الخطأ السابق الذي يؤدي الى اخفاء تأثير إشارة الخطأ أو الصدمة. من خلال هذا، نجد ان هذا النموذج يركز على فكرتين أساسيتين، الأولى تتمثل في: متوسط المتغير المصحح  $\varepsilon_t$  (عائد الأصول بالنسبة للبيانات المالية) الذي يكون غير مرتبط بشكل تسلسلي، ولكنه يكون متغير تابع. اما الفكرة الأساسية الثانية، فهي يمكن وصف التوابع لـ:  $\varepsilon_t$  بواسطة دالة تربيعية بسيطة لقيمها المتخلفة (Tsay, 2002, pp. 82-83). يعرف نموذج ARCH( $q$ ) كمايلي:

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t \beta + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \mu_t \sqrt{h_t} \\ h_t &= \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad \mu_t \sim \mathcal{N}(0,1) \\ \alpha_i &\geq 0, \alpha_0 > 0, i=1, \dots, q \end{aligned}$$

تسمى  $Y_t$  بمعادلة المتوسط وهي دالة للمتغيرات الخارجية  $X_t$  والخطأ العشوائي  $\varepsilon_t$ ، حيث ان:  $\mu_t$  هو سلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة والموزعة بشكل متماثل بمتوسط معدوم وتباين يساوي الواحد. مع أن المعاملات يجب تستوفي بعض شروط الانتظام:  $\alpha_1 \geq 0, \alpha_0 > 0$  للتأكد من أن التباين غير الشرطي لـ:  $\varepsilon_t$  يكون محدود. من الناحية العملية، غالبا ما يفترض أن:  $\mu_t$  يتبع التوزيع الطبيعي أو التوزيع القياسي لـ: Student. اما  $h_t$  فهي تمثل معادلة التباين الشرطي.

من خلال بنية النموذج، يلاحظ أنه كلما كان مربع الصدمات السابقة كبيرا  $\varepsilon_{t-i}^2$ ، فإنه ينطوي او يترك تباينا مشروطا أكبر  $h_t$  لمتوسط العائد المصحح  $\varepsilon_t$  وبالتالي، يميل إلى افتراض قيمة كبيرة (في المعامل). هذا يعني أنه في إطار ARCH، تميل الصدمات (التقلبات) الكبيرة إلى أن تتبعها صدمة كبيرة أخرى.

لبناء نموذج ARCH، فإنه يتم من اجراء ثلاث خطوات (Tsay, 2002, p. 86):

- (1) بناء نموذج اقتصادي (على سبيل المثال، نموذج ARMA) لسلسلة العوائد لإزالة الارتباط الخطي في البيانات، واستخدام سلسلة البواق من النموذج المقدر لاختبار تأثيرات ARCH.
- (2) تحديد رتب ARCH وإجراء التقدير.

(3) التحقق من نموذج ARCH المناسب بعناية مع تنقيحه اذا تطلب الامر ذلك.

### III. خصائص نموذج ARCH

لفهم خصائص نماذج ARCH، فانه من المفيد قبل ذلك دراسة نموذج ARCH(1) بعناية (Tsay, 2002, pp. 83-86)

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

حيث:  $\alpha_1 \geq 0, \alpha_0 > 0$ .

أولاً، يبقى المتوسط غير الشرطي لـ  $\varepsilon_t$  صفراً لأن:

$$E(\varepsilon_t) = E\left[E\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{t-1}}\right)\right] = E\left[E(\varepsilon_t | F_{t-1})\right] = E[\sigma_t E(\mu_t)] = 0$$

يمكن التعبير ايضاً عن  $\varepsilon_t$  بدلالة  $F_t$  كمية المعلومات المتاحة في الفترة  $t$ .

ثانياً، يمكن الحصول على التباين غير الشرطي لـ  $\varepsilon_t$  كما يلي:

$$V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E\left[E(\varepsilon_t^2 | F_{t-1})\right] = E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

لأن  $\varepsilon_t$  هي سيرة مستقرة، مع:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$V(\varepsilon_t) = V(\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

لذلك لدينا:

$$V(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 V(\varepsilon_t)$$

$$V(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

نظراً لأن تباين الخطأ العشوائي  $\varepsilon_t$  يجب أن يكون موجبا، فنحن بحاجة إلى ان يكون:  $0 \leq \alpha_1 < 1$ .

ثالثاً، في بعض التطبيقات، نحتاج إلى فترات ترتيب أعلى لـ  $\varepsilon_t$  وبالتالي، يجب أن تلي  $\alpha_1$  أيضاً بعض القيود

الإضافية. على سبيل المثال، لدراسة سلوك الذيل<sup>1</sup> (Tail Behavior)، يتطلب أن تكون اللحظة الرابعة لـ:

$\varepsilon_t$  محدودة. وفي ظل فرضية التوزيع الطبيعي لـ  $\mu_t$  يكون لدينا:

$$E(\varepsilon_t^4 | F_{t-1}) = 3\left[E(\varepsilon_t^2 | F_{t-1})\right]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2$$

وبالتالي:

<sup>1</sup> هنا نعي بمؤشر التفلطح Kurtosis الذي هو نسبة العزم المركز من الدرجة 4 على مربع العزم المركز من الدرجة 2. للمزيد من الاطلاع [انظر في الفصل الثاني. 1. 3. 3].

$$E(\varepsilon_t^4) = E[E(\varepsilon_t^4 | F_{t-1})] = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2 = 3E[\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-1}^4]$$

إذا كان  $\varepsilon_t$  هو الرتبة الرابعة المستقرة مع:  $m_4 = E(\varepsilon_t^4)$ ، فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} m_4 &= 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 V(\varepsilon_t) + \alpha_1^2 m_4] \\ &= 3\alpha_0^2 \left(1 + 2\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 m_4 \end{aligned}$$

بناء على ذلك:

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$$

هذه النتيجة لها تأثيران مهمان:

- بما أن للحظة الرابعة لـ  $\varepsilon_t$  هي موجبة، نرى أنه  $\alpha_1$  يجب أن يستوفي الشرط أيضا:  $1-3\alpha_1^2 > 0$  أي،

$$0 \leq \alpha_1^2 < \frac{1}{3}$$

- التفلطح غير الشرطي لـ  $\varepsilon_t$  هو:

$$\frac{E(\varepsilon_t^4)}{[V(\varepsilon_t)]^2} = 3 \frac{\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2} = 3 \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$$

وبالتالي، فإن التفلطح الزائد لـ  $\varepsilon_t$  هو توزيع الذيل لـ  $\varepsilon_t$  يكون كثيفا من التوزيع الطبيعي. وبعبارة أخرى، فإن صدمة الخطأ العشوائي  $\varepsilon_t$  لنموذج ARCH(1) الغوسي Gaussian الشرطي أكثر ترجيحا من سلسلة الضجة البيضاء الغوسية لإنتاج القيم المتطرفة (الشاذة) "Outliers". هذا يتفق مع النتائج التجريبية التي تظهر أن "القيم المتطرفة" تظهر في كثير من الأحيان في عوائد الأصول أكثر من تلك التي تنطوي على تسلسل مستقل وموزع بشكل متماثل للمتغيرات العشوائية العادية.

تستمر هذه الخصائص نفسها لنماذج ARCH العامة، ولكن تصبح الصيغ أكثر تعقيدا لنماذج ARCH ذات الرتب الأعلى. ويبقى الشرط:  $\alpha_i \geq 0$  للتأكد من أن التباين الشرطي  $\sigma_t^2$  يكون موجبا لجميع اللحظات الزمنية  $t$ .

في الواقع، الطريقة الطبيعية لتحقيق إيجابية التباين الشرطي هي إعادة كتابة نموذج ARCH(m) على

أنه:

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{h_t} = \mu_t \sigma_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + A'_{m,t-1} \Omega A_{m,t-1}$$

حيث:  $A_{m,t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-m})'$ ، و  $\Omega$  هي مصفوفة محددة غير سالبة ذات البعد  $m \times m$ . فنموذج  $ARCH(m)$  في معادلة التباين الشرطي يتطلب  $\Omega$  بأن يكون قطريا Diagonal. وبالتالي، يستخدم نموذج Engle منهجا مقتصدا لتقريب الدالة التربيعية.

#### IV. تعميم، اختبار وتقدير نموذج ARCH

سوف نقوم هنا أولا بتعميم نموذج ARCH وبعدها يتم اختباره وتقديره.

##### 1. تعميم نموذج ARCH

لأجل معالجة طول فترات الابطاء الكبيرة التي يتطلبها نموذج ARCH بترتيب خطي  $q$ ، فإنه اقترح (Bollerslev, 1986) تعميما بسيطا لمعادلة التباين الشرطي في السيرورة  $Y_t$  بما في ذلك القيم السابقة للتباين، ويسمى هذا النوع من النماذج الانحدار الذاتي المشروطة بعدم تجانس التباين المعممة (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)، والذي يكتب كمايلي (Bollerslev, 1986, pp. 308-310):

$$Y_t = X_t \beta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{h_t}, \quad \mu_t \sim \mathcal{N}(0,1) \quad [1]$$

$$h_t = \sigma_t^2 = V(\varepsilon_t | F_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2 \quad [2]$$

$$= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t$$

$$\alpha_i \geq 0, \alpha_0 > 0, \beta_j \geq 0, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, p$$

حيث  $L$  هو عامل التأخير، ويتم تقييد المعاملين  $A$  و  $B$  ليكونا موجبين.

بالنسبة لـ  $p=0$ ، تنخفض السيرورة إلى سيرورة  $ARCH(q)$ ، ولأجل:  $p=q=0$ ، فإن  $\varepsilon_t$  هي ببساطة ضجة بيضاء. في السيرورة  $ARCH(q)$ ، يتم تحديد التباين الشرطي كدالة خطية لتباين العينة السابقة فقط، بينما تسمح السيرورة  $GARCH(p,q)$  بدخول التباينات الشرطية المتأخرة أيضا. هذا يتوافق مع نوع من آلية التعلم المتكيفة.

يظهر امتداد سيرورة  $ARCH$  إلى سيرورة  $GARCH$  العديد من أوجه التشابه مع امتداد سيرورة  $MA$  إلى سيرورة  $ARMA$  في السلسلة الزمنية. وبما أن السيرورة عالية الرتبة فإنه يمكن تقريبها من خلال سيرورة  $ARMA$  ذات الرتبة الأقل، وأظهر (Bollerslev, 1986) أنه يمكن رؤية سيرورة  $GARCH$  المنخفضة الرتبة

كتقريب لسيرورة ARCH ذات الرتبة الأعلى. من الناحية العملية، يمكن ارجاع نماذج ARCH(q) الخطية إلى نماذج GARCH(1,1). في هذه الحالة، يكون التباين مستقرا فقط إذا كان:  $A(1) + B(1) < 1$ . وهكذا، فإن التباين في المتغير الذي يمثل الظاهرة المالية مثلا: (السعر الفوري الذي يمكن تفسيره على أنه تقلب في هذا السعر) يتم تحديده بالمعلومات بواسطة نموذج GARCH(1,1). في هذه الحالة أيضا، يشير وجود جذر الوحدة في توزيع التأخيرات إلى استمرار التقلبات في السلسلة الزمنية التي تنطوي على دراسة معقدة لنماذج IGARCH (والتي تتشابه مع بعض نماذج ARIMA) (Terraza & Zatout, 1993, p. 31).

نذكر على انه يتم الحصول على نموذج الانحدار GARCH(p, q) من خلال السماح للأخطاء العشوائية  $\varepsilon_t$  بان تكون صدمات في الانحدار الخطي.

$$Y_t = X_t \beta + \varepsilon_t$$

وكما أشار Sastry Pantula وحكام مجهولين آخرون، يتم إعطاء تمثيل مكافئ لسيرورة GARCH(p, q) بواسطة:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j} + v_t \quad [3]$$

$$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t = (\mu_t^2 - 1) h_t \quad [4]$$

$$\mu_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

حسب تعريف  $v_t$  فإنه لا يرتبط ارتباطا تسلسليا، وذو متوسط وتباين مشترك معدومين، ولكن تباين غير ثابت. لذلك، يمكن تفسير سيرورة GARCH(p, q) على أنها سيرورة انحدار ذاتي للمتوسط المتحرك ARMA في الأخطاء العشوائية المربعة  $\varepsilon_t^2$  للرتبة:  $m = \max\{p, q\}$  و  $p$ ، على التوالي، أي:  $ARMA(\max\{p, q\}, p)$ . على الرغم من أن تحديد المعلومات في المعادلة [3] قد يكون ذو معنى أو أكثر فائدة من وجهة نظر "نظرية السلسلة الزمنية"، فإن تطبيق المعادلة [1]، [2] أسهل في الممارسة العملية (Bollerslev, 1986, p. 310).

## 2. اختبار نموذج ARCH/GARCH

طور (Engle, 1982) اختبارا للتباين غير الشرطي في سياق نماذج ARCH استنادا إلى مبدأ مضاعف Lagrange Multiplier (LM). يكون التباين الشرطي  $h_t$  في نموذج ARCH(q) ثابتا (متجانس) إذا كانت المعلومات المتناظرة (المقابلة) للصدمات المربعة المبطأة  $\varepsilon_{t-i}^2$  تساوي الصفر. لذلك، يمكن صياغة الفرضية الصفرية للتباين الشرطي للأخطاء المتجانسة على أنها:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$$

حيث، يمكن حساب اختبار  $LM$  المتناظر على أنه:  $LM = TR^2$ ، حيث  $T$  هو حجم العينة ويتم الحصول على معامل التحديد  $R^2$  من انحدار مربعات البواقي على الثابت و  $q$  من تباطؤاتها.

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 + \hat{v}_t$$

يتم الحصول على البواقي المقدرة  $\hat{\varepsilon}_t$  من خلال تقدير نموذج المتوسط الشرطي للسلسلة الزمنية الملاحظة (الفعلية)  $Y_t$  تحت الفرضية الصفرية  $H_0$ . إحصائية اختبار  $LM$  لها توزيع تقاربي لـ  $\chi_p^2$ ، فإذا كان:  $LM > \chi_q^2$  فإننا نرفض الفرضية الصفرية  $H_0$  أي نعتبر أنه يمكن قبول  $ARCH(q)$  بمعنى عدم ثبات تباين تجانس الأخطاء. كما وضح (Lee, 1991) أن اختبار  $LM$  مقابل النموذج البديل  $GARCH(p, q)$ ، هو نفسه اختبار  $LM$  مقابل بديل الأخطاء  $ARCH(q)$  (Franses & Van Dijk, 2000, p. 157).

كما انه هناك طرق أخرى لهذا الاختبار والتي رأيناها سابقا التي تتمثل في اختبار Goldfeld-Quandt والتمثيل البياني "مخطط الارتباط Correlogram" لدالة الارتباط الذاتي لمربعات البواقي، فإذا كانت هناك قيم معينة لمعاملات الارتباط الذاتي تختلف معنويا عن الصفر (أي إذا كانت سلسلة مربعات البواقي غير مستقرة)، فإنه يمكن قبول فرضية عدم تجانس التباين الشرطي للأخطاء، أي أن الظاهرة المالية تخضع للسيرورة  $ARCH$  [انظر في الفصل الثاني. 4. 3. 1].

### 3. تقدير نموذج ARCH/GARCH

يمكن بشكل عام تقدير النماذج التي تحتوي على أخطاء تتميز بخاصية عدم تجانس التباين بثلاث طرق (Hurlin, 2006-2007, pp. 27-30):

- مقدرات من فئة المعقولية العظمى (Maximum Likelihood Estimators (MLE)
- مقدرات المعقولية العظمى الزائفة (Pseudo Maximum Likelihood Estimators (Pseudo-MLE)
- مقدرات عن طريق المرحلتين (Two-Step Estimators (2SE)

(1) مقدرات من فئة المعقولية العظمى تحت فرضية التوزيع الطبيعي ومقدرات المعقولية العظمى الزائفة نأخذ هنا نموذج (Gourieroux, 1992) وليكن النموذج التالي:

$$E(Y_t | Y_{t-1}, X_t) = m_t(Y_{t-1}, X_t, \theta) = m_t(\theta)$$

$$V(Y_t | Y_{t-1}, X_t) = h_t(Y_{t-1}, X_t, \theta) = h_t(\theta)$$

حيث  $\theta$  هي مجموعة المعالم الداخلة في صيغة كل من المتوسط الشرطي والتباين الشرطي. يمكن تمثيل معظم نماذج ARCH التي سنراها في هذا النموذج، وسنبداً بتقديم أساليب MLE و Pseudo-MLE.

• تطبيق اسلوب تقدير المعقولية العظمى والمعقولية العظمى الزائفة على نماذج ARCH/GARCH

نقدم بالتوازي طريقة MLE تحت فرضية التوزيع الشرطي الطبيعي للبواقي، وطريقة Pseudo-MLE. فالفكرة من طريقة Pseudo-MLE تكمن في تبيان انه إذا تم ارتكاب خطأ في التوزيع الشرطي للبواقي باستخدام لوغاريتم المعقولية العظمى على أساس التوزيع الطبيعي، فان مقدر المعقولية العظمى MLE الذي تم الحصول عليه على هذا النحو لا يزال بإمكانه بان يكون متقارب إذا كان القانون الحقيقي للبواقي ينتمي إلى نفس فئة القانون الطبيعي، لذلك نجد في الحالتين أن دالة المعقولية العظمى المعرفة للمقدين MLE و Pseudo-MLE هي نفسها. يتم كتابة دالة لوغاريتم المعقولية العظمى لعينة  $T$  من المشاهدات  $Y_i: j (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$  تحت فرضية التوزيع الشرطي الطبيعي كما يلي:

$$\log L(\theta) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log[h_t(\theta)] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - m_t(\theta)]^2}{h_t(\theta)}$$

حيث:  $h_t(\theta)$  تمثل التباين الشرطي.

لنطبق هذه الصيغة على حالة نموذج انحدار خطي ذو خطأ  $ARCH(q)$ :

$$Y_t = X_t \beta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{h_t}, \quad \mu_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0, \quad V(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

في هذه الحالة:

$$E(Y_t | Y_{t-1}, X_t) = m_t(\theta) = \beta X_t$$

$$V(Y_t | Y_{t-1}, X_t) = h_t(\theta) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (Y_{t-i} - \beta X_{t-i})^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

$$\theta = (\beta, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q) \in R^{q+2} \text{ مع}$$

وبالتالي، لوغاريتم دالة المعقولية العظمى تكتب:

$$\log L(\theta) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log \left[ \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (Y_{t-i} - \beta X_{t-i})^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Y_t - X_t \beta)^2 \times \left[ \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (Y_{t-i} - \beta X_{t-i})^2 \right]^{-1}$$

إن مقدرات فئة المعقولة العظمى MLE والمعقولة العظمى الزائفة Pseudo-MLE تحت فرضية التوزيع الطبيعي التي نرمز لها بـ  $\hat{\theta}$ ، حيث:  $\theta \in R^K$  تحقق في مجملها نظام غير خطي يتكون من  $K$  معادلة:

$$\left. \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}}$$

مع:

$$\left. \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t(\hat{\theta})} \left. \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - m_t(\hat{\theta})]^2}{h_t^2(\hat{\theta})} \left. \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} + \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - m_t(\hat{\theta})]}{h_t(\hat{\theta})} \left. \frac{\partial m_t(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}}$$

يمكننا أن نظهر أن هذا النظام يمكن أن يتجزأ إلى نظامين فرعيين عندما تدخل المعلمة  $\theta$  بشكل منفصل في صياغة التوقع والتباين الشرطي. وبالتالي، إذا كان لدينا:  $\theta = (\alpha \beta)'$ ، حيث تبرز  $\alpha$  فقط في التوقع الشرطي و  $\beta$  في التباين الشرطي، وبالتالي:

$$\left. \frac{\partial \log L(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{t=1}^T \left[ \frac{Y_t - m_t(\hat{\alpha})}{h_t(\hat{\beta})} \right] \left. \frac{\partial m_t(\alpha)}{\partial \theta} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}}$$

$$\left. \frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t(\hat{\beta})} \left. \frac{\partial h_t(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - m_t(\hat{\alpha})]^2}{h_t^2(\hat{\beta})} \left. \frac{\partial h_t(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\hat{\beta}}$$

في ظل شروط نظامية معينة، يكون مقدر المعقولة العظمى الزائفة Pseudo-MLE متقاربا وطبيعيا. ويحدد بواسطة الصيغة التالية:

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} N(0, J^{-1}IJ^{-1})$$

ومصفوفة التباين-التباين المشترك المتقاربة لمقدر المعقولة العظمى الزائفة Pseudo-MLE، يتم حسابها من:

$$J = E_0 \left[ -\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right], \quad I = E_0 \left[ \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta'} \right]$$

حيث  $E_0$  يمثل التوقع المأخوذ حسب اختلاف القانون. في الحالة التطبيقية، يتم تقدير المصفوفتين  $I, J$  مباشرة عن طريق استبدال التوقع  $E_0$  بالمتوسط التجريبي (أو التقديري) والمعلمة غير المعروفة  $\theta$  بالمقدر المتقارب  $\hat{\theta}$ . وبالتالي، نستخدم:

$$\hat{J} = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left. \frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta=\hat{\theta}}, \quad \hat{I} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left. \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta'} \right|_{\theta=\hat{\theta}}$$

والتباين المقدر لـ  $\hat{\theta}$ ، يحقق:

$$V\left[\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)\right]=\hat{J}^{-1}\hat{J}^{-1}$$

في الحالة ( $J=1$ ) التي يكون فيها القانون الحقيقي الأساسي طبيعياً (المعقولة العظمى)، فإن مصفوفة التباين-التباين المشترك تتقارب إلى:

$$V\left[\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)\right]=J^{-1}$$

$$V\left[\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)\right]=\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T\frac{1}{2h_t(\hat{\beta})^2}\frac{\partial h_t(\beta)}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=\hat{\beta}}\frac{\partial h_t(\beta)}{\partial\beta'}\bigg|_{s=\hat{\theta}}\right]^{-1}$$

في حالة المعقولة العظمى وعندما يمكننا فصل معلمات التوقع الشرطي والتباين المشروط، نستطيع ان نبين مايلي:

$$V\left[\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)\right]=\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T\frac{1}{2h_t(\hat{\beta})^2}\frac{\partial h_t(\beta)}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=\hat{\beta}}\frac{\partial h_t(\beta)}{\partial\beta'}\bigg|_{\beta=\hat{\beta}}\right]^{-1}$$

## 2) مقدرات عن طريق المرحلتين

هنا يتم تطبيق طريقة المربعات الصغرى المعممة لتقدير معالم النموذج ARCH حسب الخطوات التالية (شيخي، 2011، الصفحات 325-326):

$$Y_t = X_t\beta + \varepsilon_t \text{ تقدير نموذج الانحدار الكلاسيكي}$$

الخطوة الثانية: انطلاقاً من بواقي التقدير  $\hat{\varepsilon}_t$ ، نقدر الانحدار:  $\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 + \mu_t$  بطريقة المربعات

الصغرى العادية، فنحصل على المعالم المقدرة:  $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_q)$

الخطوة الثالثة: نقوم بحساب التباين الشرطي انطلاقاً من المعادلة:  $\hat{h}_t = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2$

الخطوة الرابعة: نعيد تقدير شعاع المعالم  $\beta$  بطريقة المربعات الصغرى العادية في النموذج الجديد:

$$\frac{Y_t}{\sqrt{\hat{h}_t}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{\hat{h}_t}} + \beta_1 \frac{X_{t1}}{\sqrt{\hat{h}_t}} + \beta_2 \frac{X_{t2}}{\sqrt{\hat{h}_t}} + \dots + \beta_k \frac{X_{tk}}{\sqrt{\hat{h}_t}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{\hat{h}_t}}$$

وهذا يعني أنه يتم إعادة تقدير المعالم بطريقة GLS:

$$\tilde{\beta} = (X\Omega^{-1}X)^{-1}(X\Omega^{-1}Y)$$

أي يتعلق الأمر بانحدار مرجح (ذات أوزان) مع معامل الترجيح  $\omega = \frac{1}{\sqrt{h_t}}$  و  $\Omega = \text{diag}(h_t)$  وبعد ذلك، يمكن

$$\tilde{\alpha} = (\tilde{\varepsilon}' \Omega^{-1} \tilde{\varepsilon})^{-1} (\tilde{\varepsilon}' \Omega^{-1} h^*)$$

يعتبر هنا تباين الأخطاء غير ثابت ومجال الثقة للتنبؤ دالة لتطايير السلسلة في حد ذاتها. كما ان تعتبر هذه الطريقة سهلة الاستخدام ولكن أقل فعالية من طريقة المعقولية العظمى.

قام (Weiss, 1986) بإدخال في التباين الشرطي تأثيرات إضافية للمتغيرات المفسرة. في الواقع، يمكن نمذجة نماذج *GARCH* ليس على السيرورات الأولية، ولكن على سيرورات الصدمات. هذا يجعل من الممكن إدخال تأثيرات إضافية مختلفة للمتغيرات التفسيرية سواءً في المتوسط الشرطي أو في التباين الشرطي. على سبيل المثال، يمكننا ان نعتبر نموذج انحدار خطي مع أخطاء *GARCH* (Hurlin, 2006-2007, pp. 53-54):

$$Y_t = X_t B + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \text{ GARCH}(p, q)$$

يمكننا ان نعتبر نموذج *ARMA* مع أخطاء *GARCH*:

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t \quad \varepsilon_t \text{ GARCH}(p, q)$$

أخيرا، يمكننا ان نتصور نموذج *ARMA* بحيث يكون للتباين غير الشرطي  $Y_t$  تأثير على التباين الشرطي

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

$$E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) = 0$$

$$V(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) = c + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \gamma_0 [E(Y_t / Y_{t-1})]^2 + \sum_{j=1}^p \gamma_j Y_{t-j}^2$$

#### V. التنبؤ بنموذج ARCH/GARCH

كما تم الشرح سابقا، يتمثل أحد الاستخدامات المحتملة لتقديرات التباين الشرطي في اقتراح فترات الثقة على المتغير الداخلي الذي تم إنشاؤه دون افتراض صفة الثبات مع الزمن من الرتبة الثانية. وهكذا، كما أشار (Gourieroux, 1992)، فإنه يظهر الفرق الرئيسي بين نموذج *ARMA* و *ARCH* عندما نقارن فترات الثقة فيما بينهما، حتى عندما يؤدي النموذجان إلى قيم ملائمة قريبة، فمن ناحية نمذجة *ARMA*، يتم بناء مجال الثقة مع تباين ثابت بمرور الزمن، وهذا ما لا نجده مع نموذج بصيغة *ARCH / GARCH* للبواقي (Gourieroux, 1992, p. 50).

توجد طريقتان مختلفتان للتحليل، الأولى وهي طريقة كلاسيكية التي تكمن في تقدير وتحليل السيرورة

كما لو أنه لدينا بيانات ذات تباين شرطي غير متجانس للأخطاء، فهنا تكون المقدرات لمعاملات كثيرات

الحدود:  $\phi, \theta$  متقاربة. في هذه الحالة، التنبؤ بأفق واحد لـ  $Y_t$  ونعني به المتغيرات:  $\hat{Y}_t = \left[ \frac{\hat{\phi}(L)}{\hat{\theta}(L)} - 1 \right] Y_t$  التي

تكون تحت شروط تعديلية غير متحيزة، حيث:  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ . أما مجالات التنبؤ فهي:

$$\left[ \hat{Y}_t \pm 2\hat{\sigma} \right] \text{ (يتم اهمال مقدرات } \phi, \theta \text{ مع } \hat{\sigma}^2 \text{ مقدر متقارب لـ } E(h_t)^2 \text{)}$$

الطريقة الثانية، تأخذ تطور سرعة التقلبات وتطبيق خطوات تقدير نموذج ARCH. إذا كانت:  $\hat{\theta}, \hat{\phi}$

تمثلان مقدري نموذجي الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة (على الترتيب)، فإن التنبؤ بأفق واحد لـ  $Y_t$  يعطى كمايلي (شيخي، 2011، صفحة 327):

$$\hat{Y}_t = \left[ \frac{\hat{\phi}(L)}{\hat{\theta}(L)} - 1 \right] Y_t$$

مجالات التنبؤ تحسب من العلاقة:  $\left[ \hat{Y}_t \pm Z_{\alpha/2} \hat{h}_t \right]$ ، حيث:  $\hat{h}_t$  مقدر سرعة التقلبات (التباين الشرطي) في اللحظة  $t$ .

## VI. نماذج الانحدار الذاتي المشروطة بعدم تجانس الأخطاء المستحدثة

ظهرت نماذج مستحدثة كنقد او رد على النماذج السابقة من طرف مجموعة من الباحثين المشهورين مثل (Engle & Bollerslev, 1986) (Nelson, 1991). (Gourieroux, 1992). حول تحديد علاقة مربع الخطأ العشوائي مع التباين الشرطي، فهذه العلاقة تتحقق فقط الا في الحالات التي تكون فيها التغيرات التي لها نفس تأثير الإشارة المتناظر والسعة (الصدمة)، أما في الحالات الأخرى المعاكسة، فهذه النماذج لم تأخذ آليات عدم التناظر بعين الاعتبار، ولأجل هذا فان النماذج المستحدثة تأخذ هذا الامر بعين الاعتبار والتي من بينها:

### 1. نماذج ARCH/GARCH غير المتناظرة Asymmetric ARCH/GARCH

تغطي الفئة الرئيسية الثانية نماذج ARCH غير الخطية وبشكل خاص تأخذ ظواهر عدم التماثل، فالفكرة الأساسية تكمن في ان تأثير عدم ثبات تباين تجانس الخطأ هو ليس هو نفسه اعتمادا على ما إذا كان الخطأ السابق إيجابيا أم سلبيا. تم اقتراح فئتين رئيسيتين من هذه النماذج وهي:

## 1) نماذج EGARCH

اقترحت من قبل (Nelson, 1991) السيرورة الأسية  $GARCH$  أو بما يسمى بنماذج  $EGARCH(p, q)$  Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity التي تعرف التباين الشرطي التالي (Hurlin, 2006-2007, pp. 59-60):

نقول ان السيرورة  $\varepsilon_t$  توافق نموذج  $EGARCH(p, q)$  إذا وفقط إذا كان:

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{h_t}$$

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\mu_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i})$$

البواقي  $\mu_t$  لها توزيع طبيعي وهي ضجة ضعيفة، حيث ان الدالة  $g(\cdot)$  تحقق:

$$g(\mu_{t-i}) = \theta \mu_{t-i} + \gamma (|\mu_{t-i}| - E[|\mu_{t-i}|])$$

إذا قمنا بوضع:  $a_i = \theta \alpha_i$  و  $b_i = \alpha_i \gamma$ ، فيمكن إعادة كتابة التباين الشرطي لـ  $\varepsilon_t$  كمايلي:

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q a_i \mu_{t-i} + \sum_{i=1}^q b_i (|\mu_{t-i}| - E[|\mu_{t-i}|]) + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i})$$

مثلا في حالة سيرورة  $EGARCH(1,1)$ ، فيكون لدينا:

$$\log(h_t) = \alpha_0 + a_1 \mu_{t-1} + b_1 (|\mu_{t-1}| - E[|\mu_{t-1}|]) + \beta_1 \log(h_{t-1})$$

يجب إبداء ملاحظتين على هذا المستوى:

- تتعلق بلوغاريتم التباين الشرطي  $h_t$  لـ  $\varepsilon_t$ ، وبالتالي لا يلزم فرض قيود على المعلمات المختلفة للمعادلة لضمان إيجابية  $h_t$ .

- يكشف التباين الشرطي  $h_t$  عن تأثير الإشارة المتناظر لـ  $a_1 \mu_{t-1}$  وتأثير الاتساع المقاس بواسطة المقدار:

$$b_1 (|\mu_{t-1}| - E[|\mu_{t-1}|])$$

في هذه المعادلة، القيمة  $E[|\mu_{t-1}|]$  تعتمد بشكل واضح على القانون المفترض لـ  $\mu_t$ . لدينا هنا أربعة توزيعات

محتفظ بها هنا:

$$E[|\mu_t|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{قانون Gaussian:}$$

$$E[|\mu_t|] = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right) \sqrt{v-2}}{\sqrt{\pi}(\tau-1)\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)} \quad \text{توزيع Student } \tau$$

$$E[|\mu_t|] = \frac{4\zeta^2 \Gamma\left(\frac{1+\tau}{2}\right) \sqrt{\tau-2}}{\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \sqrt{\pi}(\tau-1)\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)} \quad \text{قانون Student غير المتماثل المعلمي في } \zeta$$

$$E[|\mu_t|] = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{v}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)\Gamma\left(\frac{3}{v}\right)}} \quad \text{قانون توزيع الأخطاء المعمم للمعلمة } v$$

## 2 نماذج TARCH/TGARCH

طريقة أخرى لنمذجة عدم التماثل وتسمى بنماذج العتبة Threshold بما يتماشى مع نماذج TAR التي اقترحها (Engle & Bollerslev, 1986) والتي عمت من طرف (Rabemananjara & Zakoian, 1991). بنماذج Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity  $TGARCH(p, q)$ . نقول ان السيرورة  $\varepsilon_t$  توافق نموذج  $TGARCH(1,1)$  إذا وفقط إذا كان (Hurlin, 2006-2007, pp. 66-67):

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{h_t}$$

$$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha^+ \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} \geq 0} \varepsilon_{t-1} + \alpha^- \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1} + \beta_1 \sqrt{h_{t-1}}$$

حيث تكون البواقي  $\mu_t$  لها توزيع طبيعي وهي ضجة ضعيفة و  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0}$  تعين دالة المؤشر بحيث:  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 1$  إذا كانت:  $\varepsilon_{t-i} < 0$  و  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 0$  عكس ذلك.

هذه النماذج تشبه نماذج  $GJR-ARCH$  ولكنها تحدد عدم التناظر في الانحراف المعياري وليس في التباين الشرطي.

مع العلم ان، نماذج  $GJR-ARCH$  التي اقترحها (Glosten, Jagannathan & Runkle. 1993) تأخذ في الحسبان الاحداث غير المتوقعة، أي المفاجئة وهذا بإدخال متغير مفسر جديد. نقول ان السيرورة  $\varepsilon_t$  توافق نموذج  $GJR-ARCH(p, q)$  إذا وفقط إذا كان (Hurlin, 2006-2007, pp. 62-63):

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

حيث تكون البواقي  $\mu_t$  لها توزيع طبيعي وهي ضجة ضعيفة و  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0}$  تعين دالة المؤشر بحيث:  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 1$  إذا كانت:  $\varepsilon_{t-i} < 0$  و  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 0$  عكس ذلك. مثلا في حالة سيرورة  $GJR-ARCH(1,1)$ ، فيكون لدينا:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

ما يمكن كتابته على النحو التالي:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha^+ \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} \geq 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha^- \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

مما يسمح لنا بالقراءة المعاملات المحددة مباشرة المتعلقة بالبواقي الموجبة:  $\alpha^+ = \alpha_1$  والسالبة:  $\alpha^- = \alpha_1 + \gamma_1$

## 2. نماذج ARCH-M / GARCH-M

يفترض عدد من النظريات في التمويل نوعا من العلاقة بين متوسط العائد والتباين. إحدى الطرق لأخذ ذلك في الاعتبار هي كتابة العوائد كدالة للتباين الشرطي أو بعبارة أخرى، ادخال التباين الشرطي في معادلة التوقع الشرطي الذي يصبح متغيرا مفسرا. يسمح نموذج  $GARCH$  في متوسط النموذج  $GARCH-M$  للتباين الشرطي بأن يكون له تأثيرات متوسطة. في معظم الاوقات، سوف يكون لمصطلح التباين الشرطي له تفسير علاوة المخاطر المتغيرة الزمن (Islam & Watanapalachaikul, 2012, p. 132). صيغة  $GARCH-M$  كمايلي:

$$\begin{aligned} h_t = \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2 \\ &= \alpha_0 + A(L) \varepsilon_t^2 + B(L) h_t \end{aligned}$$

## 3. نماذج GARCH غير المستقرة IGARCH

تتوافق السيرورات  $IGARCH(p, q)$  التي اقترحها (Engle & Bollerslev, 1986) مع حالة جذر الوحدة في سيرورة التباين الشرطي. وتتميز هذه النماذج بان لها تأثير صمود Persistence Effects في التباين. أي أن كل صدمة على التباين الشرطي الحالي تؤثر على جميع القيم المستقبلية المتوقعة. إن دراسة الاستقرارية (الرتبة الثانية) لسيرورة  $GARCH$  تقتضي الى إثبات أن التباين غير الشرطي مستقل عن الزمن بشكل متقارب (Gourieroux, 1992)، ويكتب على الشكل التالي (Hurlin, 2006-2007, pp. 55-59):

$$\begin{aligned} h_t = \sigma_t^2 &= V(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2 \\ \alpha_i &\geq 0, \alpha_0 > 0, \beta_j \geq 0, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

تتقارب بشكل مستقر للدرجة الثانية إذا كان فقط:  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$  ، وفي حالة وجود نموذج

$IGARCH(p, q)$  يشترط بان يكون:  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$  صدمة على التباين تنعكس على تنبؤات كل قيمها

المستقبلية دالة رد الفعل على التذبذبات تؤول إلى حد ثابت غير معدوم.

#### 4. نماذج GARCH ذات الذاكرة الطويلة

تندرج هذه النماذج في خانة نماذج GARCH المتكاملة الكسرية، والتي من بينها:

##### (1) نماذج FIGARCH

عندما يكون التناقص الأسّي سريعاً جداً بحيث لا يتوافق مع ذلك الملاحظ في دالة الارتباط الذاتي، فإن النماذج السابقة التي رأيناها تعتبر أنها ليست مناسبة.

مع السيورة  $IGARCH$ ، قدموا (Baillie, Bollerslev & Mikkelsen, 1996) النمذجة في الحالة التي تكون فقط معاملات الارتباط على شكل قطع زائد Hyperbolic. في هذا العرض التقديمي، نقتصر على الحد الأدنى من الرتبين، أي:  $p = q = 1$ ، وهي حالة السيورة  $GARCH(1,1)$  (Hurlin, 2006-2007, pp. 72-73):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

$$(1 - \beta_1 L) h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad \text{يمكن كتابتها على الشكل:}$$

$$h_t = \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1 L} + \frac{\alpha_1}{1 - \beta_1 L} \varepsilon_{t-1}^2$$

$$= \frac{\alpha_0}{\beta(1)} + \left[ 1 - \frac{1 - \delta_1 L}{1 - \beta_1 L} \right] \varepsilon_t^2 \quad \text{يكون لدينا:}$$

$$= \frac{\alpha_0}{\beta(1)} + \vartheta(L) \varepsilon_t^2$$

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$\vartheta(L) = \left[ 1 - \frac{1 - \delta_1 L}{1 - \beta_1 L} \right] \quad \text{مع}^1$$

<sup>1</sup> في الواقع، ليكن:  $c = \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1 L} = \frac{\alpha_0}{\beta(L)}$ ، إذن:  $c = c - \beta_1 c = (1 - \beta_1 L)c$  وبالتالي من ناحية:  $c = \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} = \frac{\alpha_0}{\beta(1)}$ . علاوة على ذلك، إذا عبرنا عن الحد الأخير

كدالة لـ  $\varepsilon_t^2$  وليس لـ  $\varepsilon_{t-1}^2$ :  $\frac{\alpha_1}{1 - \beta_1 L} \varepsilon_{t-1}^2 = \frac{\alpha_1 L}{1 - \beta_1 L} \varepsilon_t^2$ ، إذن:  $\frac{\alpha_1 L}{1 - \beta_1 L} = 1 - 1 + \frac{\alpha_1 L}{1 - \beta_1 L} = 1 - \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)L}{1 - \beta_1 L}$ . لاحظ أن هذا فقط من أجل سهولة الكتابة،

خاصة على الرغم من وجود  $\varepsilon_t^2$ ، لدينا دائماً:  $E_{t-1}(h_t) = h_t$ .

حسب السيرورة  $IGARCH$  ، وتحت القيد:  $\sigma_1 = \alpha_1 + \beta_1$  نجد:

$$h_t = \frac{\alpha_0}{\beta(1)} + \left[ 1 - \frac{1-L}{1-\beta_1 L} \right] \varepsilon_t^2$$

$$\mathcal{G}(L) = \left[ 1 - \frac{1}{\beta(L)} (1-L) \right] \quad \text{اذن ان:}$$

السيرورة  $FIGARCH$  تدرج قوة كسرية Power Fractional على عبارة الفرق الموجودة في الصيغة الأخيرة. يصبح لدينا إذن:

$$\mathcal{G}(L) = \left[ 1 - \frac{1}{\beta(L)} (1-L)^d \right], 0 \leq d \leq 1$$

يمكن تمديد الفرق الكسري إلى سلسلة McLaurin لإعطاء كثير الحدود من درجة لانهائية في  $L$ :

$$\begin{aligned} (1-L)^d &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-d)} L^i \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\Gamma(i-d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(1-d)} L^i \\ &= 1 - dL + \frac{d(d-1)L^2}{2!} - \frac{d(d-1)(d-2)L^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

في هذه المعادلة الأخيرة، لدينا:  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-d)} L^i = 1$  والتي توضح بوضوح الصلة الموجودة بين نموذج

$FIGARCH$  و  $IGARCH$ . ومع ذلك، يتميز النموذج  $FIGARCH$  بتناقص سريع في معاملات التأخير، وهذا ما يمكن أن نسميه بالذاكرة الطويلة Long Memory. بين (Davidson, 2002) أن ذاكرة هذه السيرورة تزداد كلما  $d$  اقترب من الصفر. وهو عكس تماما في السيرورات الكسرية في التوقع: مع نماذج  $ARFIMA$ ، تكون الذاكرة هي دالة متزايدة مع  $d$ . لذلك يجب أن نتذكر أنه "يعتبر نموذج  $FIGARCH$  كحالة وسيطة بين نموذج  $GARCH$  المستقرة و  $IGARCH$ ، بنفس الطريقة التي نعتبر فيها ان السيرورة  $I(d)$  على مستوى وسيطي بين  $I(0)$  و  $I(1)$  هي مظلمة.

## 2) نماذج HYGARCH

تم تقديم سيرورة  $GARCH$  ذات القطع الزائد Hyperbolic بواسطة (Davidson, 2002). الفكرة هي بناء نموذج يشمل نموذج  $FIGARCH$  من أجل اختبار القيود المفروضة من قبل هذا الأخير. يتم الحصول عليها بوضع<sup>1</sup> (Hurlin, 2006-2007, p. 73):

$$g(L) = 1 - \frac{1}{\beta(L)} (1 + \alpha((1-L)^d - 1))$$

$$\alpha \geq 0$$

حسب (Davidson, 2002) يتعلق النموذج  $FIGARCH$  والنموذج  $GARCH$  على التوالي بالحالات:  $\alpha = 1$  و  $\alpha = 0$ ، غير أنه عندما تكون:  $\alpha = 0$ ، فإن الأس  $d$  لا يمكن تحديده ويؤثر سلبا على بناء اختبارات الفروض لـ  $\alpha$ . ومع ذلك، فإن اقتراب المقدّر  $\hat{\alpha}$  من الوحدة موات لتمثيل نموذج  $FIGARCH$ . في هذا الجانب الأخير، يجب أيضا أن تحدد الخصائص التقاربية لمقدري الحد الأقصى أو شبه الحد الأقصى للمعقولية العظمى التي تكون غير مضمونة بشكل جيد. على وجه الخصوص، حتى في العينات الكبيرة، لا تنطبق فترات الثقة التي تم إنشاؤها وفقا للقواعد المعتادة (على سبيل المثال الانحرافات المعيارية  $\pm 2$  لمستوى الثقة 95%).

## 3) نماذج FAPARCH

هذه سيرورة كسرية تتميز بتناقص سريع لمعاملات الارتباط الذاتي على شكل قطع زائد يسمح فيها بوجود عدم التناظر المرتبط بإشارة الصدمات وفقا للميكانيزم المميز لسيرورة  $APARCH$ . يتم كتابة معادلة التقلبات الشرطية المقابلة كمايلي (Hurlin, 2006-2007, p. 73):

$$h_t^2 = \frac{\alpha_0}{\beta(1)} + \left[ 1 - \frac{1}{\beta(L)} (1-L)^d \right] (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1 \varepsilon_{t-1})^\sigma$$

## تمارين الفصل

<sup>1</sup> بشكل أعم، يتم وضع:  $g(L) = 1 - \frac{\sigma(L)}{\beta(L)} (1 + \alpha((1-L)^d - 1))$

<sup>2</sup> في الحقيقة، عندما تكون:  $\alpha = 0$ ، فإن نموذج  $HYGARCH$  يتوافق مع نموذج  $GARCH$  حيث تكون:  $\alpha_1 = -\beta_1$  أو حتى  $\sigma_1 = 0$  في الكتابات السابقة.

## تمرين 1

لتكن السيرورة التالية:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$E(Y_t | Y_{t-1}) = \phi_1 Y_{t-1}$$

1. ماذا تمثل هذه السيرورة؟
2. استنتج المتوسط غير الشرطي؟
3. ما هي فائدة استخدام المتوسط الشرطي بدلا من المتوسط غير الشرطي؟

الحل

1. تمثل هذه السيرورة نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الاولى (AR(1)).
2. إذا كان المتوسط الشرطي هو:  $E(Y_t | Y_{t-1}) = \phi_1 Y_{t-1}$ ، فإن المتوسط غير الشرطي يكون معدوما:  $E(Y_t) = 0$ .
3. تكمن فائدة استخدام المتوسط الشرطي بدلا من المتوسط غير الشرطي هو انه في حالة عدم التأكد (خاصة في المسائل المالية) تعتمد على استخدام المتوسط الشرطي بدلا من المتوسط غير الشرطي في نماذج ARMA انه من شأنها أن تساهم في تحسين التنبؤات الناتجة عن هذه النماذج المختلطة.

## تمرين 2

يكن نموذج ARCH(q) كمايلي:

$$Y_t = X_t \beta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad \mu_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\alpha_i \geq 0, \alpha_0 > 0, i = 1, \dots, q$$

1. اشرح هذه المعادلات؟
2. قم بتعميم هذا النموذج؟

الحل

1. شرح هذه المعادلات:

- تسمى  $Y_t$  بمعادلة المتوسط (معادلة التابع او العائد) وهي دالة للمتغيرات الخارجية  $X_t$  والخطأ العشوائي  $\varepsilon_t$ .
- $h_t$  تمثل معادلة التباين الشرطي.
- $\mu_t$  هو سلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة والموزعة بشكل متماثل بمتوسط معدوم وتباين يساوي الواحد.
- يجب على المعاملات تستوفي بعض شروط الانتظام:  $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$  للتأكد من أن التباين غير الشرطي لـ  $\varepsilon_t$  يكون محدود.

2. تعميم النموذج:

نأخذ النموذج السابق  $ARCH(q)$  مع إضافة الحد  $\sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2$  في معادلة التباين الشرطي، وليكن  $GARCH(p, q)$ :

$$Y_t = X_t \beta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \mu_t \sqrt{h_t}, \quad \mu_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$h_t = \sigma_t^2 = V(\varepsilon_t | F_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2$$

$$= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t$$

$$\alpha_i \geq 0, \alpha_0 > 0, \beta_j \geq 0, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, p$$

# قائمة التمارين

## الفصل 1. طرق الاستقطاب على المدى القصير

- 47 تمرين 1 — اختبار تعاقب الاشارات
- 48 تمرين 2 — اختبار Daniel لعينة صغيرة
- 49 تمرين 3 — اختبار Daniel لعينة كبيرة
- 50 تمرين 4 — اختبار Kruskal Wallis
- 52 تمرين 5 — التنبؤ بنموذج استقطاب بسيط مع تقييمه
- 54 تمرين 6 — إزالة المركبة الموسمية
- 55 تمرين 7 — تمهيد سلسلة زمنية
- 57 تمرين 8 — تحديد نوع مركبات سلسلة زمنية
- 58 تمرين 9 — أحد طرق تمهيد سلسلة زمنية
- 61 تمرين 10 — معالجة مركبة موسمية لسلسلة زمنية

## الفصل 2. أدوات تحليل السلاسل الزمنية

- 113 تمرين 1 — دراسة استقرارية سلسلة زمنية
- 114 تمرين 2 — دراسة استقرارية سلسلة زمنية بواسطة دالة الارتباط الذاتي
- 117 تمرين 3 — دراسة دالة الارتباط الذاتي لسيرورة تشويش ابيض
- 117 تمرين 4 — كتابة نموذج انحدار ذاتي ومتوسط متحرك مختلط ذو درجة أولى في شكل نهائي
- 118 تمرين 5 — اثبات:  $AR(1) = MA(\infty)$
- 118 تمرين 6 — دراسة اختبار جذر وحدة
- 119 تمرين 7 — دراسة الاستقرارية لنموذج سير عشوائي
- 120 تمرين 8 — دراسة الاستقرارية لنموذج اتجاه عام
- 122 تمرين 9 — دراسة الاستقرارية لنموذج انحدار ذاتي ذو درجة ثانية
- 122 تمرين 10 — دراسة الاستقرارية لنموذج متوسط متحرك ذو درجة أولى

## الفصل 3. نماذج اشعة الانحدار الذاتي

- 135 تمرين 1 — دراسة الاستقرارية لنموذج اشعة الانحدار الذاتي من الدرجة الثانية
- 137 تمرين 2 — دراسة الاستقرارية لنموذج اشعة الانحدار الذاتي من الدرجة الثانية
- 137 تمرين 3 — تحليل الصدمات لنموذج اشعة الانحدار الذاتي من الدرجة الثانية

138	تمرين 4 — دراسة السببية لمتغيرين
	الفصل 4. التكامل المشترك ونموذج تصحيح الخطأ
155	تمرين 1 — اثبات سلسلتين متكاملتين تكاملاً مشتركاً
157	تمرين 2 — استنتاج درجات تكامل مشترك
158	تمرين 3 — دراسة نموذج تصحيح خطأ مع التكامل المشترك
	الفصل 5. نماذج الانحدار الذاتي المشروطة بعدم تجانس التباين
183	تمرين 1 — توضيح عن المتوسط الشرطي والمتوسط غير الشرطي لنموذج $ARCH$
183	تمرين 2 — توضيح عن نموذج $ARCH(p)$ ونموذج $GARCH(p, q)$

## الجدول الإحصائية

1. جدول القيم الحرجة لاختبار  $R$

2. جدول القيم الحرجة لمعامل Spearman

3. جدول توزيع Laplace-Gauss

4. جدول توزيع Student

5. جدول توزيع Chi-Deux

6. جدول توزيع Fisher-Snedecor

7. جدول توزيع Dickey-Fuller

8. جدول توزيع Durbin-Watson

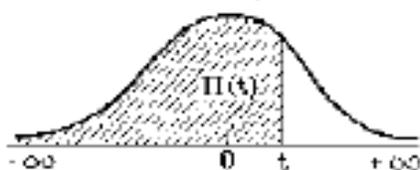
1. القيم الحرجة لاختبار  $R$

$R_u$	$R_l$	$m$	$R_u$	$R_l$	$m$
19	8	13	10	2	5
20	9	14	11	3	6
22	10	15	13	3	7
23	11	16	14	4	8
25	11	17	15	5	9
26	12	18	16	6	10
27	13	19	17	7	11
28	14	20	17	7	12

2. القيم الحرجة لمعامل الارتباط ل: Spearman

0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	$\frac{1}{2}\alpha$	$n$
0.002	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	$\alpha$	
-	-	-	-	0.8	0.8		4
-	-	0.9	0.9	0.8	0.7		5
-	0.9429	0.8857	0.8286	0.7714	0.6		6
0.9643	0.8929	0.8571	0.745	0.6789	0.5357		7
0.9286	0.8571	0.8095	0.7143	0.619	0.5		8
0.9	0.8167	0.7667	0.6833	0.5833	0.4667		9
0.8667	0.7818	0.7333	0.6364	0.5515	0.4424		10
0.8364	0.7545	0.7	0.609	0.5273	0.4182		11
0.8182	0.7273	0.6713	0.5804	0.4965	0.3986		12
0.7912	0.6978	0.6429	0.5549	0.478	0.3791		13
0.767	0.6747	0.622	0.5341	0.4593	0.3626		14
0.7464	0.6536	0.6	0.5179	0.4429	0.35		15
0.7265	0.6324	0.5824	0.5	0.4265	0.3382		16
0.7083	0.6152	0.5637	0.4853	0.4118	0.326		17
0.6904	0.5975	0.5480	0.4716	0.3994	0.3148		18
0.6737	0.5825	0.5333	0.4779	0.3895	0.3070		19
0.6586	0.5684	0.5203	0.4451	0.3789	0.2977		20
0.6455	0.5545	0.5078	0.4351	0.3688	0.299		21
0.6318	0.5426	0.4963	0.4241	0.3597	0.2829		22
0.6186	0.5306	0.4852	0.415	0.3518	0.2767		23
0.6070	0.52	0.4748	0.4061	0.3435	0.2704		24
0.5962	0.51	0.4654	0.3977	0.3362	0.2646		25
0.5856	0.5002	0.4564	0.3894	0.3299	0.2588		26
0.5757	0.4915	0.4481	0.3822	0.3236	0.254		27
0.568	0.4828	0.4401	0.3749	0.3175	0.249		28
0.5567	0.4744	0.432	0.3685	0.3113	0.2443		29
0.5479	0.4665	0.4251	0.362	0.3059	0.24		30

### 3. TABLE DE LA LOI DE LAPLACE-GAUSS (Probabilité de trouver une valeur inférieure à $x$ )



$$\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-t^2/2} dt .$$

$t$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

#### TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE $X$

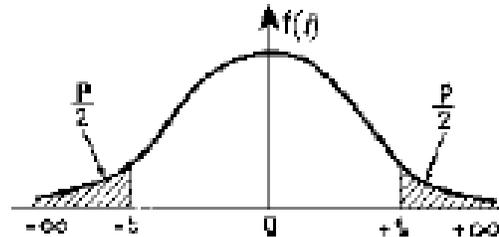
$x$	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(x)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

*Nota.* — La table donne les valeurs de  $F(x)$  pour  $x$  positif. Lorsque  $x$  est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemples : pour  $x = 1,37$   $F(x) = 0,9147$   
pour  $x = -1,37$   $F(x) = 0,0853$

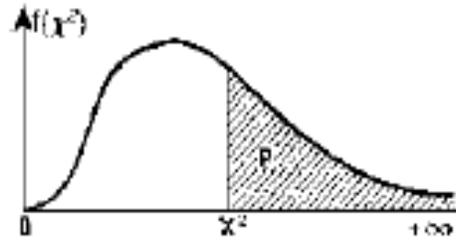
#### 4. TABLE DE LA LOI DE STUDENT

Valeurs de  $T$  ayant la probabilité  $P$  d'être dépassées en valeur absolue



$\nu$	$P=0,90$	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
$\infty$	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

5. TABLE DE LA LOI DU CHI-DEUX  
Valeurs de  $\chi^2$  ayant la probabilité  $P$  d'être dépassées



$\nu$	$P = 0,90$	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,662	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Lorsque  $\nu > 30$ , on peut admettre que la quantité  $\sqrt{2} \chi^2 - \sqrt{2\nu - 1}$  suit la loi normale réduite.

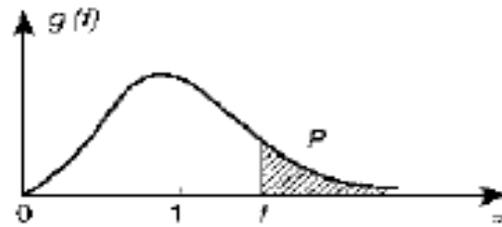
*Exemple :*

Calculez la valeur de  $\chi^2$  correspondant à une probabilité  $P = 0,10$  de dépassement lorsque  $\nu = 41$ . À l'aide de la table 1, on calcule, pour  $P = 0,10$ ,  $x = 1,2816$ .

$$D'où : \chi^2 = \frac{[x + \sqrt{2\nu - 1}]^2}{2} = \frac{1}{2}[1,2816 + \sqrt{82 - 1}]^2 = \frac{1}{2}(10,2816)^2 = 52,85.$$

## 6 . TABLE DE LA LOI DE FISHER-SNEDECOR

Valeurs de  $F$  ayant la probabilité  $P$  d'être dépassées ( $F = s_1^2/s_2^2$ )



$v_2$	$v_1 = 1$		$v_1 = 2$		$v_1 = 3$		$v_1 = 4$		$v_1 = 5$	
	$P = 0,05$	$P = 0,01$								
1	161,4	4 052	199,5	4 999	215,7	5 403	224,6	5 625	230,2	5 764
2	18,51	98,49	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,81	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	15,98	6,26	15,52
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,05	10,97
6	5,99	13,74	5,14	10,91	4,76	9,78	4,53	9,15	4,39	8,75
7	5,59	12,25	4,74	9,55	4,35	8,45	4,12	7,85	3,97	7,45
8	5,32	11,26	4,46	8,65	4,07	7,59	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,55	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,20	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,88	6,93	3,49	5,95	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,80	6,70	3,41	5,74	3,18	5,20	3,02	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,51	3,34	5,56	3,11	5,03	2,96	4,69
15	4,54	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,28	3,55	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,94	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,38	5,57	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,86
26	4,22	7,72	3,37	5,53	2,98	4,64	2,74	4,14	2,59	3,82
27	4,21	7,68	3,35	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,57	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,45	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,54	2,70	4,04	2,54	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,51	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,45	3,51
60	4,00	7,08	3,15	4,98	2,76	4,13	2,52	3,65	2,37	3,34
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,95	2,45	3,48	2,29	3,17
$\infty$	3,84	6,64	2,99	4,60	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02

Nota. —  $s_1^2$  est la plus grande des deux variances estimées, avec  $v_1$  degrés de liberté.

### 7. TABLES DE DICKEY-FULLER

Modèle [1] sans tendance et sans terme constant

Modèle [2] sans tendance et avec terme constant

Modèle [3] avec tendance et avec terme constant

Tables de la distribution du  $t_{\phi_1}$

Nombre observations $n$	Probabilités								
	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99	
25	-2,66	-2,26	-1,95	-1,60	0,92	1,33	1,70	2,16	Modèle [1]
50	-2,62	-2,25	-1,95	-1,61	0,91	1,31	1,66	2,08	
100	-2,60	-2,4	-1,95	-1,61	0,91	1,29	1,64	2,03	
250	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,29	1,63	2,01	
500	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,28	1,62	2,00	
$\infty$	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,28	1,62	2,00	
25	-3,75	-3,33	-3,00	-2,63	-0,37	0,00	0,34	0,72	Modèle [2]
50	-3,58	-3,22	-2,93	-2,60	-0,40	-0,03	0,29	0,66	
100	-3,51	-3,17	-2,89	-2,58	-0,42	-0,05	0,26	0,63	
250	-3,46	-3,14	-2,88	-2,57	-0,42	-0,06	0,24	0,62	
500	-3,44	-3,13	-2,87	-2,57	-0,43	-0,07	0,24	0,61	
$\infty$	-3,43	-3,12	-2,86	-2,57	-0,44	-0,07	0,23	0,60	
25	-4,38	-3,95	-3,60	-3,24	-1,14	-0,80	-0,50	-0,15	Modèle [3]
50	-4,15	-3,80	-3,50	-3,18	-1,19	-0,87	-0,58	-0,24	
100	-4,04	-3,73	-3,45	-3,15	-1,22	-0,90	-0,62	-0,28	
250	-3,99	-3,69	-3,43	-3,13	-1,23	-0,92	-0,64	-0,31	
500	-3,98	-3,68	-3,42	-3,13	-1,24	-0,93	-0,65	-0,32	
$\infty$	-3,96	-3,66	-3,41	-3,12	-1,25	-0,94	-0,66	-0,33	

Tables de la distribution des  $t_c$  et  $t_b$  (test bilatéral)

$n$	Modèle [2]			Modèle [3]					
	Constante $c$			Constante $c$			Tendance $b$		
	2 %	5 %	10 %	2 %	5 %	10 %	2 %	5 %	10 %
25	3,41	2,97	2,61	4,05	3,59	3,20	3,74	3,25	2,85
50	3,28	2,89	2,56	3,87	3,47	3,14	3,60	3,18	2,81
100	3,22	2,86	2,54	3,78	3,42	3,11	3,53	3,14	2,79
250	3,19	2,84	2,53	3,74	3,39	3,09	3,49	3,12	2,79
500	3,18	2,83	2,52	3,72	3,38	3,08	3,48	3,11	2,78
$\infty$	3,18	2,83	2,52	3,71	3,38	3,08	3,46	3,11	2,78

8. TABLE DE DURBIN-WATSON  
 Risque  $\alpha = 5 \%$

$n$	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$		$k = 5$	
	$d_1$	$d_2$								
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,48	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

$k$  est le nombre de variables exogènes (constante exclue).  
 $n$  est la taille de l'échantillon.

## قائمة المراجع

- Beaulieu, J. J., & Miron, J. A. (1993). Seasonal Unit Roots in Aggregate U.S. Data. *Journal of Econometrics*, 55, 305–328.
- Bisaglia, L., & Gerolimetto, M. (2014). Testing for (non) Linearity in Economic Time Series: a Monte Carlo Comparison. Department of Statistical Sciences, University of Padua, Working Paper Series, 3, 1-24.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. 31(3), 307-327.
- Bourbonnais, R. (2015). *Économétrie-9e édition: Cours et exercices corrigés*. Paris: Dunod.
- Bourbonnais, R., & Terraza, M. (1998). *Analyse des Séries Temporelles en Economie*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Box, G. P., & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day.
- Brock, W. A., Dechert, W. D., & Scheinkman, J. A. (1987). A Test for Independence Based on the Correlation Dimension Mimeo. Department of Economics, University of Wisconsin at Madison, and University of Houston.
- Brock, W., Dechert, W., & Scheinkman, j. (1996). A Test for Independence Based on the Correlation Dimension. *Econometric Reviews*, 15, 197-235.
- Cadoret, I., Benjammin, C., Martin, F., & Herrard, N. (2009). *Econométrie appliquée: methodes, applications*. Corrigés. belgique: de boeck.
- Chan, K. S., & Tong, H. (1986). On Estimating Thresholds in Autoregressive Models. *Journal of time series analysis*, 7(3), 179-190.
- Charpentier, A. (2006). *Cours de Séries Temporelles: Théorie et Applications*. 2. DESS Actuariat & DESS Mathématiques de la Décision: Université Paris Dauphine, France.
- Christiano, L. J. (1992). Searching for a Break in GNP. *Journal of Business & Economic Statistics*, 10(3), 237-250.
- Darné, O., & Diebolt, C. (2002). A Note on Seasonal Unit Root Tests. *Quality and Quantity*, 36(3), 305-310.
- Davies, N., & Petrucci, J. (1986). Detecting Non-Linearity in Time Series. *The statistician*, 35, 271-280.
- Dickey, D. A., Hasza, D. P., & Fuller, W. A. (1984). Testing for Unit Roots in seasonal Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 79, 355–367.

- Ekionea, J. B., Bernard, P., & Plaisent, M. (2011). Consensus par la méthode Delphi sur les concepts clés des capacités organisationnelles spécifiques de la gestion des connaissances. *Recherches qualitatives*, 29(3), 168-192.
- Engle, R. F., & Granger, C. W. (1987). Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing. *Econometrica*, 55(2), 251-276.
- Engle, R. (1982). Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.
- Engle, R. F., Hendry, D. F., & Richard, J. F. (1983). Exogeneity. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 51(2), 277-304.
- Eric, D. (2009). *Econométrie*. France: Pearson Education .
- Franses, P. H., & Van Dijk, D. (2000). *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge University Press.
- Ghysels, E., Lee, H. S., & Noh, J. (1994). Testing for Unit Roots in Seasonal time Series: Some Theoretical Extensions and a Monte Carlo Investigation. *Journal of Econometrics*, 62, 415-442.
- Glynn, J., Perera, N., & Verma, R. (2007). Unit Root Tests and Structural Breaks: A Survey with Applications. *Cuantitativos para la Economía y la Empresa = Journal of Quantitative Methods for Economics and Revista de Métodos*, 3(1), 63-79.
- Gossé, J. B., & Guillaumin, C. (2011). Christopher A. Sims et la représentation VAR. 1-15.
- Gossé, J. B., & Guillaumin, C. (2013). L'apport de la représentation VAR de Christopher A. Sims à la science économique. *L'Actualité économique*, 89(4), 305-319.
- Gourieroux, C. (1992). *Modèles ARCH et Applications Financières*. Collection ENSAE, Economica.
- Granger, C. W. (1983). *Co-integrated variables and error-correcting models* (Doctoral dissertation, Discussion Paper 83-13. Department of Economics, University of California at San Diego).
- Granger, C., & Andersen, A. (1978). *An introduction to bilinear time series models*. Vandenhoeck and Ruprecht, Gottingen.
- Granger, C., & Newbold, P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2(2), 111-120.
- Granger, C., & Newbold, P. (1976). The use of R<sup>2</sup> to Determine the Appropriate Transformation of Regression Variables. *Journal of Econometrics*, 4(3), 205-210.
- Hamid, K., Khenouse, A., & Zatout, A. (1998). Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastique. *Revue d'Economie et de Statistique Appliquée*, INPS(0), 16-26.
- Hamilton, J. (1994). *Time series analysis (Vol. 2)*. New Jersey: Princeton.

- Hamisultane, H. (2002). *Econométrie des Séries Temporelles*. Licence. France. 2002. (cel-01261174).
- Hurlin, C. (2006-2007). *Econométrie pour la Finance: Modeles ARCH-GARCH, Applications à la VAR*. Université d'Orléans, Faculté de Droit, d'Economie et de Gestion, Econométrie et Statistique Appliquée (ESA) .
- Hylleberg, S. (1992). *Modelling Seasonality*. Oxford: Oxford University Press.
- Hylleberg, S., Engle, R. F., Granger, C. J., & Yoo, B. S. (1990). Seasonal Integration and Cointegration. *Journal of Econometrics*, 44, 215–238.
- Islam, S. M., & Watanapalachaikul, S. (2012). *Empirical Finance: Modelling and Analysis of Emerging Financial and Stock Markets*. Berlin: Springer Science & Business Media.
- Jarque, C. M., & Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics letters*, 6(3), 255-259.
- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of economic dynamics and control*, 12(2-3), 231-254.
- Johansen, S., & Juselius. (1990). Maximum likelihood estimation and to the demand for money inference on cointegration with application. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52.
- Keenan, D. (1985). A Tukey Nonadditivity-Type Test for Time Series. *Biometrika*, 2, 39-44.
- Lee, J. H. (1991). A Lagrange Multiplier Test for GARCH Model. *Economics Letter*, 37(3), 265-271.
- Ling, T. Y., Nor, A. M., Saud, N. A., & Ahmad, Z. (2013). Testing for Unit Roots and Structural Breaks: Evidence from Selected ASEAN Macroeconomic Time Series. *International Journal of Trade, Economics and Finance*, 4(4), 230-237.
- Lubrano, M. (2007). *Modeles VAR, modeles VAR structurels et modeles à équations simultanées*. GREQE-CNRS.
- Lumsdaine, R. L., & Papell, D. H. (1997). Multiple Trend Breaks and the Unit-Root Hypothesis. *Review of Economics and Statistics*, 79, 212-218.
- McLeod, A., & Li, W. (1983). Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations. *Journal of time series analysis*, 4, 269-273.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 59(2), 347-370.
- Perron, P. (1989). The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis. *Econometrica*, 57, 1361-1401.
- Pfaff, B. (2008). *Analysis of Integrated Series with R and Cointegrated Time with R*. Springer Science & Business Media.

- Rakotomalala, R. (2011). Tests de Normalité–Techniques Empiriques et Tests Statistiques. Université Lumière Lyon 2, 2, 1-53.
- Ramsey, J. (1969). Tests for Specification Errors in Classical Linear Least Squares regression analysis. Journal of the Royal Statistical Society. Series B 31, 350-371.
- Sims, C. A. (1980). Macroeconomics and reality. Econometrica: journal of the Econometric Society, 1-48.
- Sims, C. A. (1996). Macroeconomics and methodology. Journal of Economic Perspectives. 10(1), 105-120.
- Teräsvirta, T., Lin, C. F., & Granger, C. W. (1993). Power of the Neural Network Linearity Test. Journal of Time Series Analysis, 14(2), 209-220.
- Terraza, M., & Zatout, A. (1993). Modélisation de l'Hétéroscédasticité Conditionnelle du Prix Spot du Marché Pétrolier de l'OCDE. Journal de la Société Française de Statistique, 134(3), 21-39.
- Tsay, R. (1986). Non-Linearity Tests for Time Series. Biometrika, 73, 461-466.
- Tsay, R. (2002). Analysis of Financial Time Series: Financial Econometrics. John Wiley & Sons.
- Waheed, M., Alam, T., & Ghauri, S. P. (2006). Structural Breaks and Unit Root: Evidence from Pakistani Macroeconomic Time Series. MPRA Paper No. 1797, 1-18.
- White, H. (1989). An Additional Hidden Unit Test for Neglected Nonlinearity in Multilayer Feedforward Networks. Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks, Washington, DC I, 451-455.
- Zivot, E., & Wang, J. (2007). Modeling financial time series with S-Plus (Vol. 2). Springer Science & Business Media.
- Zivot, E., & Andrews, D. (1992). Further Evidence of Great Crash, The Oil Price Shock and Unit Root Hypothesis. Journal of Business and Economic Statistics, 10, 251-270.
- البشير ، ز. ع. ع. (2016). تحليل السلاسل الزمنية (في مجال التكرار و مجال الزمن). الاردن: دار الجنان للنشر والتوزيع، ط1.
- البلداوي ، ع. ع. ، ون ، ع. الحميدي. (2008). الاساليب الكمية التطبيقية في ادارة الاعمال : التالف العلمي الثلاثي الادارة. بحوث العمليات. الاحصاء. الاردن: دار وائل ، ط1.
- البيروتى ، ع. ك. (2009). الاحصاء الحيوي. غزة: جامعة الازهر، كلية العلوم الاقتصادية، قسم الاحصاء.
- السواغي ، خ. م. (2018). مبادئ الاقتصاد القياسي. الاردن: دار الكتاب الثقافي.

- الشويرف ، م.ع، ون ، ا. البيباص. (2015). التنبؤ بالكميات المنتجة من النفط الخام في ليبيا باستخدام النماذج المحددة (نماذج التمهيد الاسي) خلال الفترة 1972-2013م. مجلة العلوم الاقتصادية والسياسية، 3-30.
- بري ، ع.م.ع. (2002). طرق التنبؤ الاحصائي. المملكة العربية السعودية: جامعة الملك سعود، الجزء الاول.
- جلاطو ، ج. (2007). الاحصاء التطبيقي مع تمارين ومسائل محلولة. الجزائر: دار الخلدونية، ط1.
- جوجارات ، د. (2015). الاقتصاد القياسي (المجلد 2). المملكة العربية السعودية: دار المريخ للنشر.
- جودت ، أ. (2015). التخطيطي الاستراتيجي لنظم المعلومات. الاردن: دار المجد للنشر والتوزيع، ط 1.
- حامد ، ج. (2003). أساليب التنبؤ. المعهد العربي للتخطيط - الكويت، 2(14)، 1-19.
- حسن ، ا.م، و م ، ع. محمد احمد. (د.ت). مبادئ الاستدلال الإحصائي. الإسكندرية: الدار الجامعية.
- مولود ، ح. (1998). نماذج و تقنيات التنبؤ القصير المدى : دراسة مدعمة بأمثلة محلولة. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
- مولود ، ح. (2010). السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ القصير المدى. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، ط 3.
- دلهوم ، خ. (2009-2008). أساليب التنبؤ بالمبيعات. رسالة ماجستير غير منشورة، كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير، جامعة باتنة.
- راتول ، م. (2006). الاحصاء الوصفي. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، ط 2.
- شرابي ، ع. (2000). طرق احصائية للتوقع الاقتصادي. الجزائر: الديوان الوطني للمطبوعات الجامعية.
- شعراوي ، س.م. (2005). مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية. جدة: مركز النشر العلمي، جامعة الملك عبد العزيز.
- شيخي ، م. (2011). طرق الاقتصاد القياسي: محاضرات وتطبيقات. الاردن: دار الحامد، ط 1.
- عبدالمحمدي ، ن.ع، و ع ، س. طعمه. (2011). استخدام نماذج السلاسل الزمنية الموسمية للتنبؤ باستهلاك الطاقة الكهربائية في مدينة الفلوجة. مجلة جامعة الأنبار للعلوم الاقتصادية والإدارية، 4(7)، 21-43.
- عطية ، ع.م. (2005). الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق. الاسكندرية: الدار الجامعية.
- لزعز ، ع. (2000). الإحصاء وتوفيق المنحنيات. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
- يحياوي ، م. (2014). التقنيات الكمية في ادارة الاعمال: محاضرات و تمارين. الاردن: دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.