الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة الدكتور الطاهر مولاي - سعيدة-
كلية العلوم الاقتصادية و العلوم التجارية و علوم التسيير

مطبوعة في :

احصاء 3

من اعداد: الدكتور بومدين محمد امين

مخصصة لطلبة السنة ثانية علوم اقتصادية و تجارية و علوم التسيير

السنة الجامعية: 2021-2022

مقدمة :

إن التطور التكنولوجي الحديث في جميع مجالات حياتنا المعاصرة من ناحية، ودخول العالم في عصر المعلوماتية، من ناحية أخرى، كل هذا أدى إلى ازدياد أهمية استخدام أساليب التحليل الإحصائي في جميع مجالات المعرفة، وعلى جميع المستويات. فعلى مستوى الاقتصاد القومي، أو مستوى الوحدات الاقتصادية، سواء كانت قطاع عام أو خاص، فإن الاحتياج إلى جمع البيانات واستخراج المعلومات منها على أساس من الدراسة المنهجية الحديثة، يعتبر من المسائل الحيوية في عصرنا الحديث، وهو ما تقوم به أساليب التحليل الإحصائي. حيث ان التحليل الاحصائي يلعب دورا هاما في كثير من حقول النشاط الانساني و هو مفيد جدا في تبادل المعلومات و الوصول الى الاستنتاجات و الاستدلالات من البيانات و من تم الارشاد الى التخطيط المنطقي و اتخاذ القرارات. و لهذا يهتم الاحصاء الاستدلالي بهذا الجزء من الدراسات الاحصائية الذي يعنى بتحليل البيانات للتوصل الى التنبؤ او الاستقراء و اتخاذ القرارات، عن طريق التركيز على الوصول إلى استنتاجات حول خصائص المجتمع من خلال استخدام المعلومات المتوفرة عن العينة.

ولقد تناولت هذه المطبوعة أهم هذه الأساليب وكيفية الوصول منها إلـي نتائج وقرارات إحصائية تفيد الباحث ومتخذ القرار. حيث تتطلب دراسة هذه الموضوعات الإلمام بمبادئ الإحصاء الرياضي و التعرف على اهم القوانين الاحتمالية خصوصا القوانين العشوائية المستمرة كالقانون الطبيعي، قانون ستيودنت، قانون كاي تربيع و قانون فيشر. و التي تعبر ضرورية لاستخدام اساليب الاحصاء التطبيقي خاصة نظريات التقدير و اختبار الفرضيات و هذا ما سنتناوله في الفصل الاول، اما الفصل الثاني فقد خصص لدراسة توزيع المعاينة لمختلف معالم العينة كالمتوسط الحسابي و النسبة و الفرق بين متوسطين و نسبتين. اما الفصل الثالث فسنتناول فيه نظريات التقديرات و التي تهتم بدراسة و تقدير معالم المجتمع سواء من خلال التقدير النقطي او التقدير بالمجال. اما الفصل الرابع و الاخير فقد تمحور حول اختبار الفرضيات للمتوسط الحسابي و الفرق بين متوسطين و حول النسبة و الفرق بين نسبتين، اضافة الى اختبار الفرضيات حول التباين و النسبة بين تباينين.

1- مفاهيم حول التوقع و التباين الرياضي:

1-1- التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) : E(x) (حسن و ايمان ، 2009، 70)

إذا كان لدينا x متغيرة عشوائية، قانون احتماله f(x) ، فإن توقعها يعطى بالصيغة التالية:

* في حالة متغيرة عشوائية متقطعة : $E(x) = \sum x. f(x)$

* في حالة متغيرة عشوائية مستمرة : $E(x) = \int x. f(x)$

*** مثال01 :**

X	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x. f(x)$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

* $E(x) = \frac{10}{5} = 2$

*** قاعدة : $E(x)\bar{X}$ ~**

*** خواص التوقع : E(x)**

1* $E(K) = K$

dem : $E(K) = \sum K. f(K)$

$= K. \sum f(K)$

$\Rightarrow E(K) = K$

2* $E(Kx) = K\, E(x)$

dem : $E(Kx) = \sum Kx. f(x)$

$= K. \sum x. f(x)$

$= K. E(x)$

3* $E(ax+ b) = a\, E(x) + b$

* بحيث: a، b ثوابت

dem : E(ax+ b) = $\sum(ax+b).f(x)$

= $\sum ax.f(x)$ + $\sum b.f(x)$

= a $\sum x.f(x)$ +b $\sum f(x)$

⇒ E(ax+ b) = a E(x) + b

1-2- التباين الرياضي : يعطى بالصيغة التالية : (حسن و ايمان ، 2009، 70).

VAR (x) = $E(x-Ex)^2$

⇒ VAR (x) = $E(x)^2$- $(Ex)^2$

* الانحراف المعياري : σ(x) = $\sqrt{VAR(x)}$

*** خواص التباين الرياضي :**

1* VAR(K) = 0

dem : VAR(K) = $E(K-E(K))^2$

= $E(K-K)^2$ = 0

2* VAR(Kx) = K^2 VAR(x)

dem : VAR(Kx) = $E(Kx)^2$- $(EKx)^2$

= $E(K^2x^2)$- $K^2(Ex)^2$

= K^2(Ex^2- $(Ex)^2$)

= K^2 VAR(x)

3* VAR(ax+b) = a^2 VAR(x)

* بحيث: a، b ثوابت

dem : VAR(ax+b) = $E(\mathrm{ax+b})^2$- $[E(\mathrm{ax+b})]^2$

= $[a^2x^2+2axb+b^2]$ - $[\mathrm{aE(x)+b}]^2$

$= a^2 E x^2 - a^2 (Ex)^2$

$= a^2 (E x^2 - (Ex)^2)$

$= a^2$ VAR(x)

$V(ax) = a^2\ \sigma x^2$

$\Rightarrow \sigma\ ax = |a|\ \sigma x$

تمرين 01 : من دفاتر محاسبية لمؤسسة IREAL التي تنتج و تبيع منتوجاتها، استخرجنا المعلومات التالية:

- حجم المبيعات المتوقع للسنة القادمة هو 7360 وحدة، اي $E(Q) = 7360$

- الانحراف المعياري 800 وحدة، اي $\sigma(Q)= 800$

- سعر بيع الوحدة 60 دج

- التكلفة المتغيرة للوحدة 52 دج

- التكاليف الثابتة، $CF= 56000$

- المطلوب: * حدد توقع النتيجة السنوية ؟

* حدد الانحراف المعياري للنتيجة ثم علق عليه ؟

الحل:

حل التمرين :

ترميز :

R: تمثل النتيجة

$\dot{R}$: تمثل الإيرادات

P: سعر بيع الوحدة

C: تمثل التكاليف

CF: تمثل التكاليف الثابتة

CV: تمثل التكاليف المتغيرة

- تحديد توقع النتيجة:

R = $\dot{R}$ - C

R = PQ - [CV+CF]

R = 60Q - 52Q - 56000

R= 8Q - 56000

E(ax+b) = aE(x)+b

E(ax+b) = aE(x)+b

E(R) = E(8Q) - 56000

= 8 E(Q) - 56000

= 8(7360) - 56000

= 2880

⇒ E(R) = 2880

*** تحديد الانحراف المعياري: σ(R) = ?**

$$\boldsymbol{\sigma^2}\textbf{(R)} = \boldsymbol{\sigma^2}\textbf{(ax+b)}= \boldsymbol{a^2\sigma^2}\textbf{(x)}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2}\textbf{(R)} = (\mathbf{8})^2\boldsymbol{\sigma^2}\textbf{(Q)} = (\mathbf{8})^2.\,(\mathbf{800})^2$$

⇒ σ(R) = 8(800) = 6400

⇒ σ(R) = 6400

تمرين 02 : إذا كانت قيمة المبيعات في- مؤسسه اورولي سعيدة- خلال 10 أيام مبينه في الجدول التالي :

المبيعات	**100**	**150**	**200**	**250**
عدد الايام	**4**	**3**	**2**	**1**

***المطلوب:**

1) تكوين متغير عشوائي منفصل

2)إيجاد القيمة المتوقعة، التباين و الانحراف المعياري لتوزيع المبيعات

3) علق على النتائج إحصائيا.

الحل:

*** ترميز: x م.ع يمثل مبيعات المؤسسة**

X	100	150	200	250
P(x)	0.4	0.3	0.2	0.1
xP(x)	40	45	40	25

***حساب التوزيع الرياضي : E(x)**

E(x)= $\sum xP(x)$ = (0.4)(100)+(0.3)(150)+(0.2)(200)+(0.1)(250)

⇒ E(x)=150

- التعليق : القيمة المتوقعة هي 150 وحدة

*** حساب التباين و الانحراف المعياري:**

VAR (x) = $E[x - E(x)]^2$

VAR (x) = $E(x)^2$- $[E(x)]^2$

* الطريقة الأولى:

* نعلم أن : E P(x) = $\sum P(x)f(x)$

أذن: = $\sum x^2$ P(x)$E(x)^2$

X - E(x)	-50	0	50	100
$(\mathbf{X} - \mathbf{E(x)})^2$	2500	0	2500	10000
$\mathbf{E}\ (\mathbf{X} - \mathbf{E(x)})^2$	1000	0	500	1000

⇒ V(x)=2500

$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma(x)} = \sqrt{\mathbf{2500}} = \mathbf{50}$

*** الطريقة الثانية:**

$(Ex)^2 = (150)^2 = 22500$

$E(x)^2 = \sum x^2 \text{ P(x)}$

$= \mathbf{(100)^2.(0.4)+(150)^2.(0.3)+(200)^2.(0.2)+(250)^2.(0.1)}$

$\mathbf{=25000}$

$\mathbf{V(x)=25000-22500}$

$\mathbf{= 2500}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma(x)} = \sqrt{\mathbf{2500}} = \mathbf{50}$

**** التعليق:***

المقصود بالانحراف المعياري في هذا المثال هو انحراف المبيعات عن المبيعات المتوقعة والمقدرة ب150 بمعنى آن مبيعات المؤسسة تتراوح ما بين: [100 و 200] ، أي $x \in [150 \pm 50]$

* عموما يستخدم التوقع في الاقتصاد لحساب معدل الأرباح أو الخسائر بينما يستخدم الانحراف المعياري لحساب الخطأ.

تمرين 03 :

لنفترض أنك ببورصة الجزائر و أعطيت لك المعلومات التالية:

* سعر سهم صيدال في الزمن (T_0) = 500

التنبؤات الخاصة بالسهم في الزمن (T_1) موضح في الجدول التالي :

الاحتمال P(R)	الأرباح (R)	السعر الممكن في (T_1)
0.3	0	400
0.4	10	520
0.3	30	600

1* احسب مرودية السهم باستخدام احد المقاييس الإحصائية؟

2* الخطر المرتبط بمرودية السهم؟

الحل :

* نستخدم هنا مفهوم التوقع الرياضي لحساب مرودية السهم بحيث نرمز للمردوديه بــ R

$E(R) = \sum R.P(R)$

1* نحسب : R

$R_1 = \frac{p_{t1} - p_{t0} + D}{p_{t0}} = \frac{400-500+0}{500} = -20\%$

$R_2 = \frac{520-500+10}{500} = 6\%$

$R_3 \frac{600-500+20}{500} = 26$

R	-20 %	6 %	26%
P(R)	30 %	40%	30%
R. P(R)	-0.06	0.024	0.078

* حساب مردودية السهم المتوقعة :

$E(R) = \sum R.P(R)$ = -0.2(0.3) + 0.06(0.4)+0.26(0.3)

= -0.06+0.024+0.078

= 0.042 ⇒ **E(R)=4.2%**

*** حساب خطر السهم : (الانحراف المعياري)**

$V(R) = \mathrm{E}\,(\mathrm{R} - \mathrm{E(R)})^2$

$= \mathrm{E}\,(\mathrm{R}\,)^2 - (E(R))^2$

R - E(R)	-24.2%	1.8%	21.8%
$(\mathbf{R} - \mathbf{E(R)})^2$	0.058564	0.000324	0.047524
$\mathbf{E}\,(\mathbf{R} - \mathbf{E(R)})^2$	0.0175692	0.00001296	0.0142572

⇒ V (R) = 0.031

$\Rightarrow \sigma(R) = 0.17 = 17\%$

*** التعليق على النتائج:**

* أن الحصول على قيمة الانحراف المعياري المقدرة (17%) تعنى إن القيمة المتوقعة (4.2%) قد تتغير و تنحرف بما قيمته (17%)، أي $R\in[4.2\% \pm 17\%]$

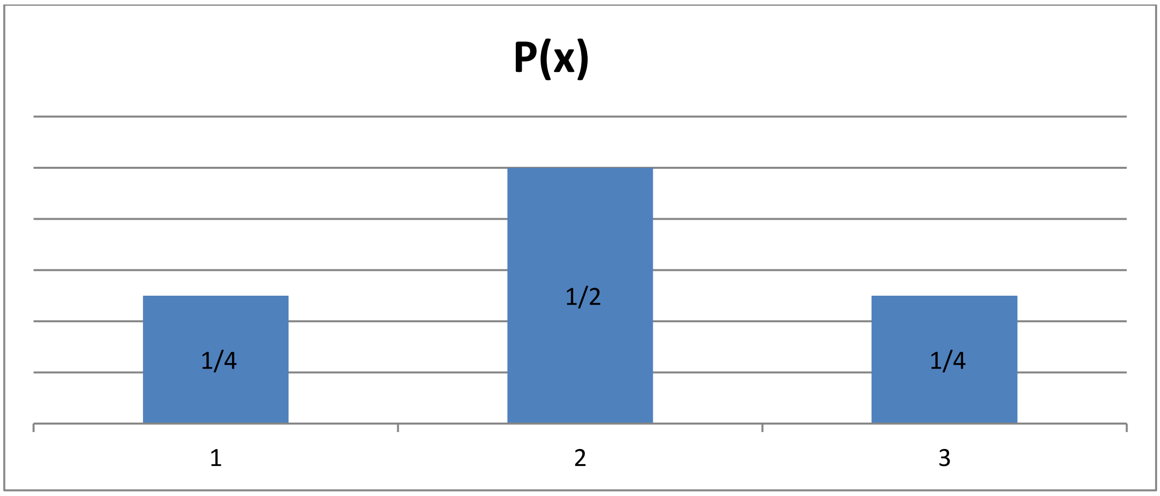
* **المنوال:** قيمة المنوال تقابل اكبر الاحتمالات:

$\forall\ x\in \Omega \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$

مثال:

3	2	1	**X**
1/4	1/2	1/4	**P(x)**

$\Rightarrow x_0 = 2$



- **دالة التوزيع:** تعطى بالصيغة التالية **(محمد صبحي ابو صالح، 2009، 167)**

$F(a) = P(x\leq a)$

$F(a) = \sum f(x)\ ,\ x\leq a$

مثال:

4	**3**	**2**	**1**	**0**	**X**
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	$f(x)$
5/5	4/5	3/5	2/5	1/5	**F(x)**

$F(2) = \sum f(x)$, $x \leq 2$

$= f(0) + f(1) + f(2)$

$= 1/5 + 1/5 + 1/5 = 3/5$

تمرين :

لنفترض أن الطلب الشهري لمتوج بالأطنان وهو متغير عشوائي مستمر تأخذ قيمتها من المجال [0.700], دالة كثافتها معطاة بالصيغة التالية

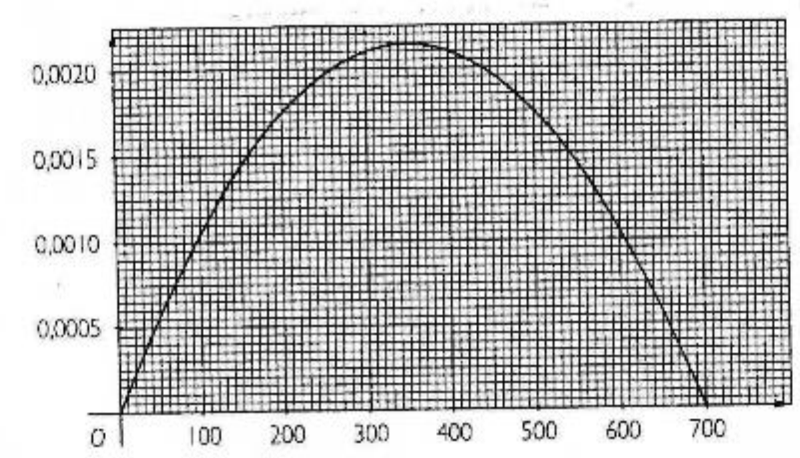
$$f(t)\begin{cases} f(t) = a(700t - t^2) & t \in [0.700] \\ f(t) = 0 \ ailleurs \end{cases}$$

مع العلم أن a ثابت و بإعطاء:

المعطيات:

- انظر التمثيل البياني الموالي:

التمثيل البياني لدالة الكثافة:



- نقبل أن :

$$\int_0^{100} f(t)dt = 0.0554 \quad ....(1)$$

العمل المطلوب: *باستعمال التمثيل البياني لدالة الكثافة و الصيغة (1) حدد احتمالات الطلب الشهري التالية:*

- اقل من 100 طن.

- اقل من 350 طن.
- أكثر من 600 طن.
- ما بين 100 و 350 طن.
- اقل من 800 طن.
- أكثر من 1000طن .
- يساوى 350طن.
- اقل من 350 طن شريطة انه أكثر من 100طن.

نرمز لدالة التوزيع بالرمز F وليكن ***المطلوب*** حساب F(100) وتحديد F

حل التمرين:

بالنظر إلى المعطيات و التمثيل البياني نجد :

1) $p(x \geq 100) = \int_0^{100} f(t)dt = 0.0554$

2) $p(x \geq 350) = 0.5$ (المنحنى متناظر و القيمة 350 هي منتصف المساحة)

3) $p(x \geq 600) = 0.0554$ (هي نفسها $p(x \geq 100)$ لان المنحنى متماثل)

4) $p(100 \leq x \leq 350) = p(x \leq 350) - p(x \leq 100) = 0.4446$

5) $p(x \leq 800) = 1$ (المساحة الكلية)

6) $p(x \geq 1000) = 0$ (حادث مستحيل)

7) $p(x = 350) = 0$ (لان المتغيرة مستمرة)

8) $p(x \leq 350 / x \geq 100) = \frac{p(x \leq 350) \cap p(x \geq 100)}{p(x \geq 100)} = \frac{p(100 \leq x \leq 350)}{p(x \geq 100)}$

$= \frac{0.4446}{1-0.0554}$

$= 0.4707 = \% \ 47.07$

دالة التوزيع : $F(100) = p(x \geq 100) = 0.0554$

$$F(t) = \begin{cases} f(t) = 0 \quad si\ t < 0 \\ f(t) = a(350t^2 - \frac{t^3}{3}) \quad \text{si} \quad 0 \leq \text{t} \leq 700 \\ f(t) = 1 \quad si\ t > 700 \end{cases}$$

2- التوزيعات المستمرة شائعة الاستخدام :

- القانون الطبيعي.

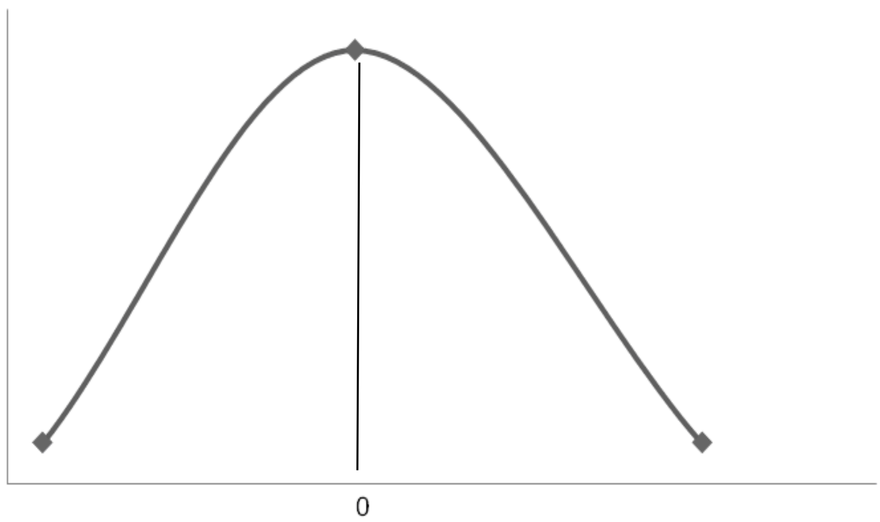
- توزيع ستيودنت.

- توزيع كاي تربيع.

- توزيع فيشر.

2-1- القانون الطبيعي:

يعتبر القانون الطبيعي من أهم القوانين المستمرة و مجرد اسمه يعطى الانطباع لذلك فهو يمثل أغلبية الظواهر الطبيعية و الاقتصادية و غيرها و له شكل حرس موضح بالشكل التالي : **(اموري و خالد و عبد المنعم ، 2013، 244).**



و هو معرف بالتوقع (μ)

و الانحراف المعياري (σ)

2-1-1- *خواص القانون الطبيعي:* (سالم و عماد ، 2007، 261).

1- متماثل حول العمود المقام على μ بمعنى إن عند النقطة μ المنحنى يقسم إلى جزئيين متساويين

- شكله يشبه الحرس.
- متوسطه ينطبق مع وسيطه و منواله (X=Mo=Me).
- يتقارب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر ($X \to \pm\infty$)
- المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوى (1)

2-1-2- *أنواع القانون الطبيعي :* (نبيل جمعة صالح النجار ،2015، 78).

يقسم القانون الطبيعي إلى نوعيين:

- ***القانون الطبيعي العام:*** Loi normale générale

وهو معرف بقيمة μ وσ^2 و عموما تعطى صيغته على النحو التالي :

$$X \backsim N\ (\mu\ ,\sigma^2)$$

و تقرأ (X) متغير عشوائي يتبع القانون الطبيعي العام

- دالة كثافة القانون الطبيعي : تعطى بالصيغة الآتية

$$F(x)= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

بحيث : $E(X)=\mu$ ، $V(X)=\sigma^2$

ملاحظه :

لا يمكننا حساب الاحتمالات باستخدام القانون الطبيعي العام لأنه ببساطة لا يوجد جداول مخصصه لذلك، مما يجعلنا نفكر في القانون الطبيعي الخاص.

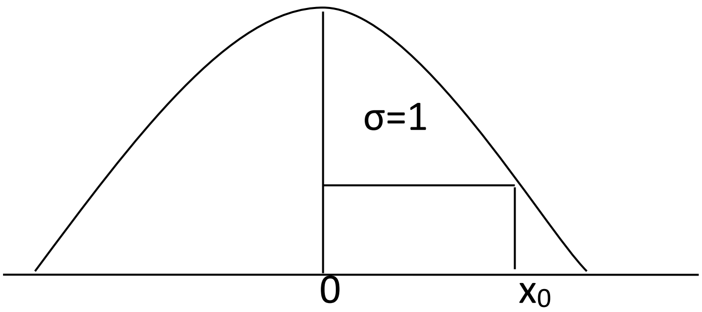
- ***القانون الطبيعي الخاص:***

هو حاله خاصة من القانون العام حيث توقعه ($E(X)=\mu=0$) وتباينه ($V(X)=\sigma^2=1$)

- تعطى دالة الكثافة بالصيغة التالية:

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}.e^{\frac{-x^2}{2}}$$

ملاحظة : يمكن حساب الاحتمالات باستخدام القانون الطبيعي الخاص لوجود جداول خاصة بذلك و الموضحة بالشكل التالي :



$p(x \leq x_0)=\alpha$

X	0.00	0.01	…………	0.09
0.0	0.5			
0.1				
. . . . . . 2.9				

مثال : احسب $P(x \leq 1.95)= ?$

مع العلم أن: $x \rightsquigarrow N(0.1)$

الحل : $P(X \leq 1.95)=0.9744$

نظرية : يجب تحويل القانون الطبيعي العام إلى القانون الطبيعي الخاص لحساب الاحتمالات وفقا للنظرية التالية :

$$\mathbf{X \rightsquigarrow V\ (\mu, \sigma^2)}$$

$$\mathbf{Y=\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma 2}} \rightsquigarrow N(0.1)}$$

مثال 01 : إذا كان (X) متغير عشوائي حيث : $X \rightsquigarrow N(0.1)$

احسب :

1) $P(0 \leq X \leq 1)$, 2) $P(0 \leq X \leq 2.12)$

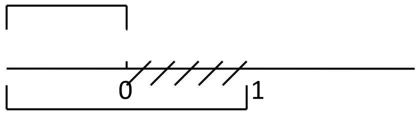
3) $P(X \geq 1)$, 4) $P(-2 \leq X \leq 1.5)$

مثال2 : إذا كان: $X \sim N(60.16)$

أحسب: $-p(x \geq 65)$

**** حل المثال1 :***

1* $P(0 \leq X \leq 1) = ?$



$= P(X \leq 1) - P(X \leq 0)$

$= 0.8413 - 0.5$

$= 0.3413 = .3413\%$

2* $P(0 \leq X \leq 2.12)$

$= P(X \leq 2.12) - P(X \leq 0)$

$= 0.9830 - 0.5 = 0.483 = 48.3\%$

3* $P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1)$

$= 1 - 0.8413 = 15.87\%$

4* $P(-2 \leq X \leq 1.5) = P(X \leq 1.5) - [1 - P(X \leq 2)]$

$= 0.9332 - 1 + 0.9772$

$= 0.9104 = 91.04\%$

**** حل المثال2 :***

$X \rightsquigarrow N(60.16)$

$P(X \geq 65) = 1 - P(X \leq 65)$

نعلم أن: $X \rightsquigarrow N(60.16)$

فإن: $Y = \frac{x-60}{4} \rightsquigarrow N(0.1)$

$\Rightarrow P(X \leq 65) = P(Y \leq \frac{65-60}{4})$

$\Rightarrow \quad P(X \leq 65) = P(Y \geq \frac{5}{4}) = P(Y \geq 1.25)$

$P(X \geq 65) = 1 - P(y \leq 1.25) = 1 - 0.8944$

$= 0.1056 = 10.56\%$

*** مثال3 :**

اذا كان $X \rightsquigarrow N(0.1)$

أحسب قيمة فى الحالات التالية :

1) $P(X \leq a) = 0.05$
2) $P(0 \leq X \leq a) = 0.19$
3) $P(X \leq a) = 0.8413$

**** حل المثال3 :***

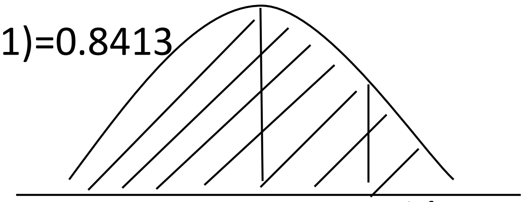
لدينا : $X \rightsquigarrow N(0.1)$

- إيجاد قيمة (a) :

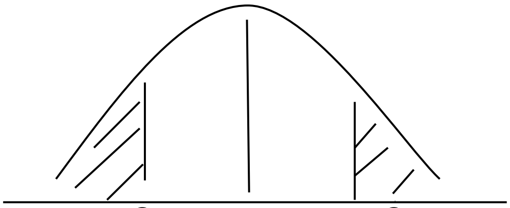
1) $P(X \leq a) = 0.8413$

من الجدول القانون الطبيعي الخاص نقرأ : a=1، معنى ذلك :

$P(x \leq 1) = 0.8413 = 84.13\%$



2) $P(X \le a)=0.05$



a=-b

* $P(X\le -a) = 1-P(x \le a) = 0.05$

$\Rightarrow 1-P(x \le b) =0.05 \quad \Rightarrow 1-0.05 = P(x \le b)$

$\Rightarrow P(x \le b) =0.95$

$b= 1.65 \Rightarrow \quad a=-1.65$

3) $P(0 \le X \le a)= P(x \le a) - P(x \le 0) =0.19 \quad \Rightarrow \; P(x \le a) = 0.69 \quad \Rightarrow a = 0.5$

**** التمرين الاول :***

استخرجنا البيانات التاليه من سجلات احدى المؤسسات التي تنتج و تبيع منتوجا واحد حجم المبيعات المتوقع (بافتراض ان حجم المبيعات يتبع التوزيع الطبيعي) للسنة القادمة :

$E(\Phi)=7360$

بانحراف المعيارى : $\sigma(\Phi)=800$

* سعر بيع الوحدة 60 دج، التكلفه المتغيره للوحدة 52 دج، التكاليف الثابتة السنوية 56000دج.

المطلوب :

1- تحقيق نقطة التعادل او تجاوزها.

2- ان تكون المبيعات اكبر من نقطة التعادل ب 800 وحدة.

3- ان تكون المبيعات بين 7200 وحده و 7600 وحدة.

4- ان تكون النتيجه اكبر من الصفر .

5- ان تكون النتيجه أكبر من 1600دج .

6- تحقيق خسارة مقدره ب 4800 دج او اكبر.

*** حل التمرين :**

Q : م. ع تمثل المبيعات

$$Q \rightsquigarrow N\,(7360, (800)^2)$$

1- احتمال تحقيق نقطة التعادل أو تجاوزها :

- حساب نقطة التعادل :

$$Q^* = 7000$$

1) $P\,(Q \geq 700) = 1 - P\,(Q \leq 700)$........................ (1)

$$Q \rightsquigarrow N\,(7360, (800)^2)$$

$$Y = \frac{Q-7360}{800} \rightsquigarrow N\,(0.1)$$

$1 \Leftrightarrow P\,(Y \leq \frac{700+7360}{800}) = 1 - P\,(Y \leq -0.45)$

$= P\,(Y \leq 0.45) = 67.36\%$

2) $P\,(X \geq 7800) = P\,(Y \geq 0.55)$

$= 1 - P\,(Y \leq 0.55)$

$= 1 - 0.7088$

$=0.2912$

3) $P(7200 \leq Q \leq 7600) = P(Q \leq 7600) - P(Q \leq 7200)$

$=P(Y \leq 0.3) - P(Y \leq 0.2)$

$=0.6179-[1-0.5733]$

$=0.1972$

4- حساب ان تكون النتيجه أكبر من الصفر:

*** تحديد القانون الاحتمالي للنتيجة السنوية :**

* $R= {}^{M}/_{CV-C.F}$

$R= \frac{M}{CV-CF}$

$=(60-52)\Phi-56000$

$=8\Phi-56000$

$R \rightsquigarrow (? , ?)$

$*E(Q)=7360 \Rightarrow E(R)=8E(Q)-56000$

$\Rightarrow E(R)=8.7360-56000=2880$

$*V(R)=(8)^2V(Q) \Rightarrow V(R)=64*(800)^2$

$\Rightarrow \sigma(R)=6400$

$\Rightarrow R \rightsquigarrow N(2880,(6400)^2)$

4) $P(R \geq 0)=1-P(R \leq 0)$

$= 1-P(Y- \frac{0-2880}{6400})$

$= 1-P(y \leq -0.45)$

$= 1 - [1-P(y \leq -0.45)]$

$= 67.36\%$

تمرين 02 : مؤسسه تنتج 03 انواع من الساعات : ساعة رجال، ساعة نساء و ساعة اطفال. اذا علمت ان الهامش على التكلفة المتغيرة المحقق من انتاج و بيع الساعات هو: 150 دج، 120 دج ، 180 على الترتيب. و التكاليف التابته السنويه 24600دج و لنفترض أن الطلب السنوى لساعات الرجال يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع 600 سا و انحراف 30سا . اما الطلب فيما يخص ساعات النساء فيخضع للتوزيع طبيعي بتوقيع 800 وانحراف 50.

و فيما يخص الطلب على ساعات الاطفال فيتبع كذلك التوزيع طبيعى بتوقيع1000 وانحراف 100

العمل المطلوب

1- حدد القانون الاحتمالى للنتيجة السنوية .

2- احسب احتمال ان تكون النتيجة اقل من 100000دج.

3- الى اي حد يمكن رفع التكاليف التابتة بحيث أن تكون النتيجة موجبة باحتمال 95 %.

الحل :

1- تحديد القانون الاحتمالى للنتيجه السنوية :

**** الترميز:***

X_1: م.ع يمثل الكميه المطلوبه لساعات الرجال .

X_2: م.ع يمثل الكميه المطلوبه لساعات النساء .

X3 : م.ع يمثل الكميه المطلوبه لساعات الأطفال.

$X_1 \sim N(600, (30)^2)$

$X_2 \sim N(800, (50)^2)$

$X_3 \sim N(1000, (100)^2)$

*هامش التكلفة المتغيرة الوحدوي :

$X_1=150, \quad X2=120, \quad X3=180$

* التكاليف الثابتة : 246000 دج

$$R= M/_{CV} - C.F$$

$$R=[150X_1+120X_2+180X_3] - 246000$$

$$R \sim N\ (?,?)$$

* $E(R) = 150E(x_1) + 120E(x_2) + 180E(x_3) - 246000$
$= 150(600)+120(800)+180(1000)-246000$
$\Rightarrow \quad E(R) = 120.000$ DA

* $V(R) = (150)^2V(x_1) + = (120)^2V(x_2) + = (180)^2V(x_3)$

$\Rightarrow V(R) = (150)^2(30)^2 + (120)^2(50)^2 + (180)^2(100)^2$

$\Rightarrow \sigma_R = \sqrt{V(R)} = 19500$ DA

$$R \sim N\ (120000, (19500)^2)$$

2) حساب احتمال ان تكون النتيجه اقل من 100000

$2) P(R \leq 100000) = P(Y \leq -1.03)$
$= P(Y \geq 1.03) = 1 - P(Y \leq 1.03) = 0.1515$

3) حساب حد التكاليف الحدية لكي تكون النتيجة موجبة باحتمال 95

$$R \sim N\ (366000\text{-}C.F, (19500)^2)$$

3) $P(R \geq 0) \quad = 95\%$

$\Rightarrow 1 - P(R \leq 0) = 0.95$

$\Rightarrow \quad 1 - P(Y \leq \frac{0-(366000-C.F)}{19500}) = 0.95$

$\Rightarrow$ 1-P(Y≤ $\frac{-(366000+C.F)}{19500}$) = 0.05

$\Rightarrow$ 1-P(Y≤$\frac{-(366000+C.F)}{19500}$) = -1.65

$\Rightarrow$ CF = (-1.65) (19500) +366000

$\Rightarrow$ **CF = 333922,5 DA**

***ملحق1 :**

إذا كان لدينا : $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$

فإن : $Y = aX+b$

$Y \rightsquigarrow N(a\,E(X)+b, a^2V(X))$

***ملحق2** : X_1 , X_2 متغيرين مستقلين بحيث :

$X_1 \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma_2^2)$

إذا كان لدينا : $Y = x_1+x_2$

فإن : $Y \rightsquigarrow N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

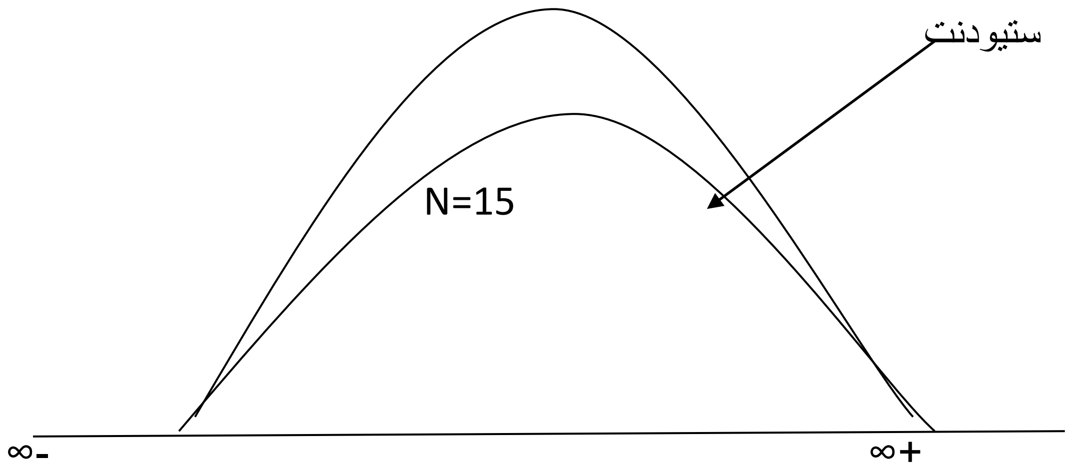
***ملحق3 :**

إذا كان لدينا : $Z=X+Y$

فإن : $Z \rightsquigarrow N(\mu_1-\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

2-2- قانون ستيودنت : (محمد صبحي ابو صالح ،2009، 236)

هو من القوانين المشتقة الشائعة الاستخدام و هو شبيه بالقانون الطبيعي الخاص بمعني أن له شكل جرس وهو مماثل غير انه اقل انخفاض من القانون الطبيعي و هو معرف بعدد درجات الحرية و الشكل التالي يوضح ذلك :



- **القانون الاحتمالي لستيودنت :**

نقول إن المتغيرة () تتبع قانون ستيودنت إذا كانت من الشكل الأتي:

$$T=\frac{X}{\sqrt{\frac{y}{n}}}$$

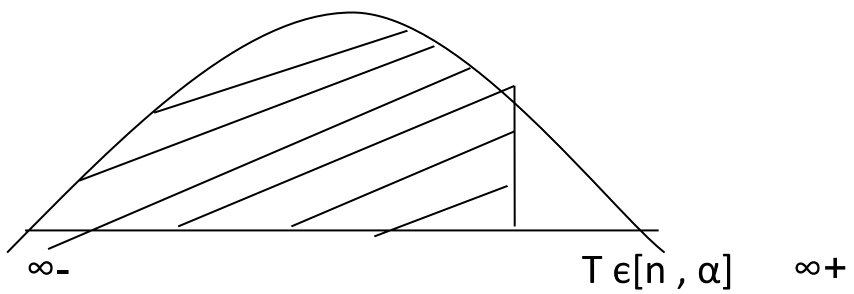
بحيث :

$X \rightsquigarrow N(0,1)$

$Y \rightsquigarrow \chi^2(n)$

فإن : $E(T)=0$ ، $V(T)=n$

* لحساب الاحتمال نستعين بالشكل و الجدول التالي:



* T[α,n]: تقرا قيمة ستيودنت التي تقع إلى يسارها مساحة (الاحتمال) α تحت درجة n

α \ n	99%..

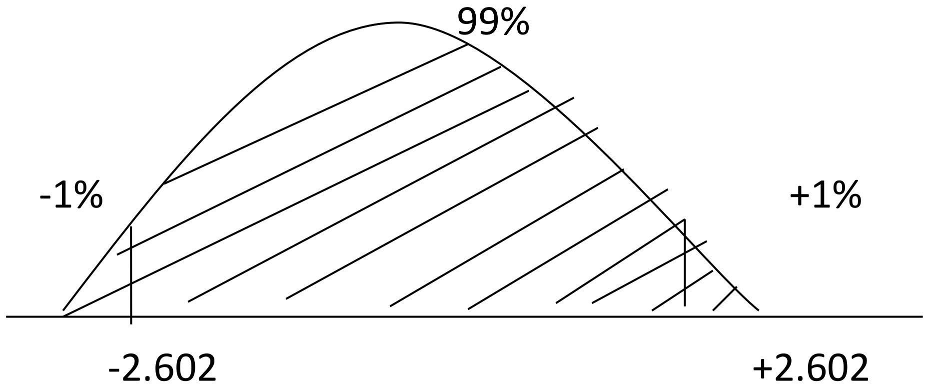
1 500	T ϵ [n, α]

T ϵ[1 , 99]

مثال :

ماهي قيمه ستيودنت التي يقع إلى يسارها مساحة قدرها1% تحث درجة حرية 15

- من جدول قانون ستيودنت تقرأ :



T ϵ[1% , 15]=-2.602

قاعدة :

T ϵ[α , n]=-[1-α ,n] ⇒ [99%,15] =-t[1%,15]

2.602=-(-2.602)

ملاحظة هامة : يمكن تقريب قانون ستيودنت بالقانون الطبيعي لما تكون عدد درجات الحرية(حجم العينة) أكبر أو تساوي 30

3-2- قانون كاي تربيع : (خالد قاسم سمور ،2007، 271)

هو من القوانين المستمرة الشائعة الاستخدام فى مجال[+∞. 0] وهو معرف كذلك بعد درجات الحرية وهو احد مشتقات القانون الطبيعي يستخدم كثيرا في دراسة الاختبارات.

- إذا كان لدينا (X) متغيرة عشوائية تتبع القانون الطبيعي الخاص (0،1)

فإن :

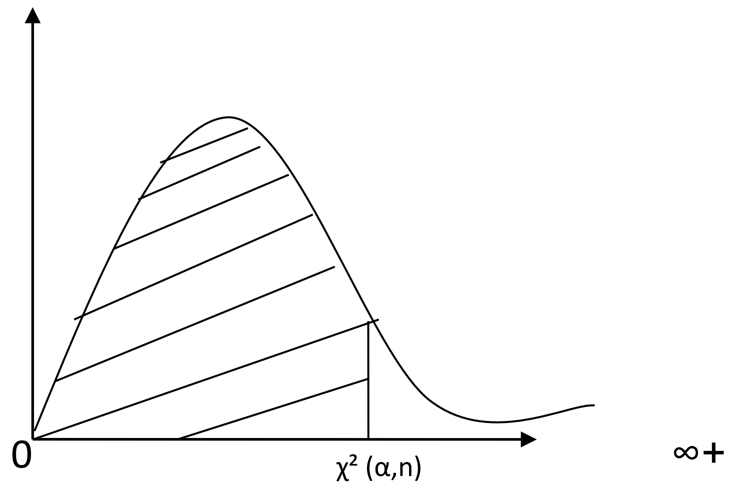
$$S= \sum_{i=1}^{n} xi2 \quad \rightsquigarrow \chi^2 (n)$$

$$E(s) = n$$

$$V(s)=2n$$

- قراءة الاحتمال من جدول قانون كاي تربيع :

لحساب الاحتمال نستعين بالشكل و الجدول التالي :



x[n,α] نقرأ قيمة كاي تربيع التي تقع إلى يسارها احتمال قدره (α) تحت درجة حرية n

مثال1 :

-ما قيمة كاي تربيع التي يقع إلى يسارها مساحة قدرها 99 تحت درجة حرية 10.

$$\chi^2 (99\%,10) = 23.209$$

مثال2:

- ما هي قيمة كاي تربيع التي يقع الى يمينها 1% من المساحة تحت درجة حرية 10

$$\chi^2\ (1\%,10) = 23.209$$

*** تمرين 01 :**

x_1 ، x_2 ، x_3 متغيرات عشوائية مستقلة بحيث :

$$x_1 \sim N\ (2\ ,25)$$

$$x_2 \sim N\ (3\ ,36)$$

$$x_3 \sim N\ (4\ ,49)$$

نضع :

$$y_1=0.2(x_1-2)$$

$$y_2=0.16(x_2-3)$$

$$y_3=0.142(x_3-4)$$

المطلوب :

1- احسب: $p\ (y_1^2+y_2^2+y_3^2 \leq 7.81) = ?$

2- احسب a بحيث : $p\ (y_1^2+y_2^2 \leq a) = \%99$

الحل :

$$x_1 \sim N\ (0\ ,1)$$

$$y_1 \sim\ ?$$

$$\frac{x_1-2}{5} = \frac{1}{5}(x_1-2) = y_1$$

$$\Rightarrow \quad y_1 \sim N\ (0\ ,1)$$

1- حساب :

$p\,(y_1^2+y_2^2+y_3^2 \leq 7.81)$

$y_1^2+y_2^2+y_3^2 \leadsto \chi^2(3)$

* نقرا من جدول كاي تربيع $P(s \leq 7.81) = \%\ 95$

2- حساب :

$p(y_1^2+y_2^2 \leq a) = \%99$

$y_1^2+y_2^2+ \leadsto \chi^2(2)$

* نقرا من جدول كاي تربيع تحت درجة حرية 2 .

$\chi^2(\%99{,}2) = 9.21$

تمرين 02 : إذا كان لدينا X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين بحيث :

$X \leadsto N(0,1) \quad , \quad y \leadsto N(2,1)$

احسب احتمال : $P(x^2+y^2-4y-5.2 \leq 0) = ?$

الحل :

نعلم أن : $X \leadsto N(0,1) \quad , \quad y \leadsto N(2,1)$

$\Rightarrow \quad \frac{y-2}{1} \leadsto N(0,1)$

$x^2 + \left(\frac{y-2}{1}\right)^2 = x^2+y^2-4y+4$

$\Rightarrow x^2+y^2-4y+4 \leadsto \chi^2(2)$

*$P(x^2+y^2-4y-5.2 \leq 0) = P(x^2+y^2-4y+4-9.2 \leq 0)$

$= P(x^2 + y^2 - 4y + 4 \leq 9.2) = p(\chi^2(2) \leq 9.2)$

$\Rightarrow P(x^2 + y^2 - 4y - 5.2 \leq 0) = \%\ 99$

4-2- قانون FICHER : (نبيل جمعة صالح النجار ،2015، 86)

هو من القوانين المستمرة الشائعة الاستخدام خصوصا في الاختبارات الإحصائية بدرجتي حرية m للبسط و n للمقام .

*** إذا كان :**

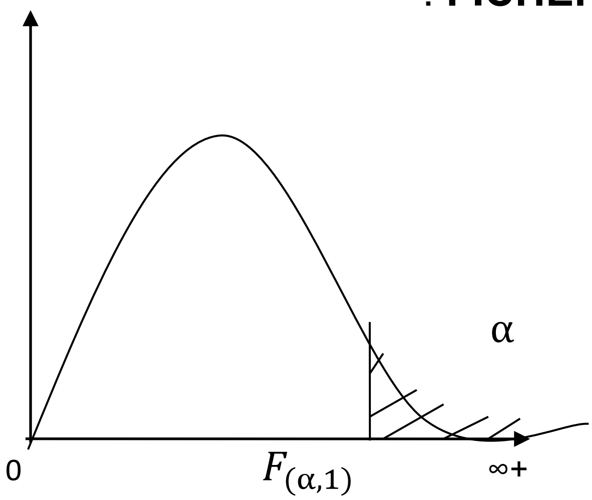
$$x \sim \chi^2(n) \quad , \quad y \sim \chi^2(m)$$

فإن :

$$Z = \frac{x/n}{y/m} \sim F_{n,m}$$

$$E(Z) = \frac{m}{m-2}$$

- قراءة الاحتمال من جدول قانون **FICHER** :



تقرا قيمة F التي تقع الى يسار... ية في البسط (m) و المقام (n).

أمثلة :

1- ماهي قيمة F التي تقع الى يسارها مساحة 95 % و درجة حرية 9 للبسط و7 المقام.

$$F(\%95, 9, 7) = 9.21$$

2 - ماهي قيمة F التي تقع الى يسارها مساحة 99 % و درجة حرية 15 للبسط و 11 المقام .

$F(\%99,15,11) = \quad 9.21$

3- ماهي قيمة F التي تقع الى يسارها مساحة 1 % و درجة حرية 11 للبسط و15 المقام.

$$F(\%1,11,15) = \frac{1}{4.25} =$$

قاعدة : $$\mathbf{F[\alpha ,n ,m] =\frac{1}{F[1-\alpha,m,n]}}$$

1- مفهوم الاحصاء الاستدلالي:

1-1- تعريف الإحصاء الاستدلالي:

يطلق على الإحصاء الاستدلالي اسم الإحصاء الاستنتاجي ويعرف بأنه النوع الثاني من أنواع علوم الإحصاء، والتي تهتم بدراسة العلاقة بين المتغيرات المرتبطة بالدراسات الإحصائية. حيث يستخدم الإحصاء الاستدلالي في تفسير وشرح الظواهر المختلفة بالإضافة إلى التنبؤ بالأحداث المتوقعة المتعلقة بها و الوصول الى الاستنتاجات حول خصائص المجتمع من خلال استخدام المعلومات المتوفرة من العينة المسحوبة من هذا المجتمع أي أنه يهدف إلى التعميم من العينة إلى المجتمع، و ذلك من خلال الاعتماد على اساليب احصائية متمثلة اساسا في المعاينة و التقدير و اختبار الفرضيات **(عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى،2000، 72).**

2-1- مفاهيم عامة مرتبطة بالإحصاء الاستدلالي :

قبل التطرق الى مبادئ المعاينة و مبادئ الاحصاء الاستدلالي لابد من تسليط الضوء على بعض المفاهيم الأساسية المستخدمة في هذا المجال :

- **المجتمع الاحصائي:**

هو مجموع كل المفردات الممكنة سواء كانت أفرادا أو أشياء أو وحدات تجريبية أو قياسات موضوع الاهتمام في الدراسة، وقد يتكون المجتمع من عدد محدود من المفردات أو أن يكون عدد مفرداته لا نهائي، كما أن المجتمع قد يكون حقيقيا أو افتراضيا. ويمكن أن نميز بين طريقتين لدراسة مجتمع ما الاولى متمثلة في الحصر الشامل و هو جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع المراد دراسته. وفي بعض الحالات لا نتمكن من حصر كل مفردات المجتمع أو قد تحتاج عملية جمع البيانات من جميع المفردات إلى وقت طويل أو جهد أو تكاليف باهظة، مما يجعلنا في الكثير من هذه الحالات نستخدم الطريقة الثانية المتمثلة في العينة من خلال جمع البيانات بأخذ جزء فقط من مفردات المجتمع **(الاسدي و فارس، 2014، 35)**

➢ **العينة:**

هي جزء محدود من مفردات المجتمع يتم اختيارها بطريقة احتمالية أو بطريقة غير احتمالية بحيث تكون ممثلة للمجتمع ككل وتستخدم المعلومات التي تستنتج من ذلك الجزء لدراسة المجتمع التي سحبت منه العينة. وأسلوب العينات شائع الاستعمال عند إجراء الدراسات والبحوث الاحصائية لأن تكاليفها أقل وبواسطتها يمكن الحصول على نتائج سريعة مقارنة بأسلوب الحصر الشامل الذي يتم فيه جمع البيانات من كل مفردات المجتمع**(شفيق العتوم،2008، 27)**

➢ **المعاينـة:**

هـي عبـارة عـن "مجموعة من العمليات التي تسمح بانتقاء مجموعة فرعية من مجتمع البحث، بهدف تكوين عينة. ما يمكن وصـف المعاينـة بأنهـا "مجموعـة مـن العمليات الإحصائية التي تتم من أجل اختيار مجموعة جزئية من المجتمع المستهدف بالدراسة. ونظر لكون عملية المعاينة لا تقتصر على الإجراءات الإحصائية فقط فمن الملائم تعميم الوصف من خلال تعريف المعاينة بأنها مجموعة من الإجراءات الفنية التي تتخذ من طرف الباحث في سبيل سحب عدد (جزئي) من الوحدات المتكونة للمجتمع المستهدف بالدراسة ؛ وذلك بغرض استخدم هذه العينة من الوحدات في تمثيل المجتمع المسحوبة منه **(سعد الحاج بن جخدل، 2019، 15).**

➢ **المعلمة :**

هي قيمة عددية تصف ظاهرة ما في المجتمع الإحصائي وقد تكون هذه القيمة وسطا حسابيا أو وسيطا أو نسبة أو تباينا... الخ. تكون هذه القيمة ثابتة للظاهرة الواحدة في المجتمع وتختلف من مجتمع لأخر حيث يمكن تمييز المجتمع بهذه القيمة واستخدامها في مقارنة عدة مجتمعات احصائية مختلفة وهذه المعالم ترافق المتغير العشوائي وهي التي تميز المجتمعات عن بعضها البعض ونحن نعلم مثلا أن لكل مجتمع متوسطا وعلى ذلك فإن متوسط المجتمع معلمة من معالمه ويتحدد المجتمع بمعرفة هذه المعلمة. في معظم التطبيقات العملية لا نقوم

عادة بدراسة كل مفردات المجتمع ولذلك فإن قيم المتغير لجميع مفردات المجتمع تكون مجهولة، وبالتالي تكون القيم الحقيقية لمعلم المجتمع مجهولة، وهنا يجب أن تحصل على تقدير للقيمة الحقيقية لهذه المعالم باستخدام البيانات المتوفرة من العينة، ولكي يتم ذلك يجب أن تستخدم ما يسمى بالإحصاءات **(امتثال و عادل، 2019، 05).**

➢ **الإحصائية :**

عبارة عن كل قيمة تحسب من العينة أو هي عبارة عن متغير قيمته تعتمد على العينة، وهي قيمة متغيرة لأنها تختلف من عينة إلى أخرى داخل المجتمع الواحد. وبذلك فإن الإحصاء هو مقياس لوصف خاصية من خصائص العينة وتتحدد قيمته من مفردات العينة، ومثال هذه الإحصاءات متوسط المتغير محسوب من بيانات العينة (أو اختصارا متوسط العينة) وكذلك نسبة مفردات العينة التي تتوفر فيها صفة معينة، وتفيدنا الإحصاءات في أنها مقاييس تصف العينة نفسها وأنها أيضا تمكننا من عمل الاستدلال حول معالم المجتمع الذي تم اختيار العينة منه **(امتثال و عادل، 2019، 05).**

1-3- مبررات استخدام المعاينة:

هناك الكثير من المبررات لاستخدام أسلوب المعاينة و التي تؤكد على أهميته في عملية البحث العلمي والتي نذكر من بينها:

- إن دراسة الباحث لجميع وحدات المجتمع المرجعي ؛ وبسبب الجهد الذي تأخذه منه - تزيد من احتمالية وقوعه في الأخطاء وذلك نتيجة تعقد وتعدد العمليات التي سيجريها على هذا المستوى ؛ وعليه فانتهاجه لأسلوب المعاينة سيضعه أمام وضع أبسط نقل فيه احتمالات الخطأ.

- تحتاج اغلب بحوث العلوم الاجتماعية – بسبب تعقدها- إلى دراسات متأنية يدقق فيها أصحابها في جميع التفاصيل ، وذلك لإدراك العلاقات التي تحكمها ؛ ولن يكون هذا الأمر متاحا للباحثين إلا إذا تعاملوا مع أعداد قليلة من وحدات المجتمع المرجعي ؛ وذلك باستخراج عينات ممثلة لهذا المجتمع.

- بسبب أسبقيته على الدراسة، يمنح أسلوب المعاينة الباحثين صورة مبدئية عن المعطيات والصعوبات التي سيواجهها لاحقا أثناء دراستهم الأساسية.

- يسمح أسلوب المعاينة للباحثين بالحصول على معلومات كثيرة باستخدام موارد بشرية قليلة؛ وذلك ما يجعلهم يشرفون بشكل مباشر وشخصي على جمع البيانات بدون الاستعانة بباحثين مساعدين مما يضمن تكوين صورة متماسكة عن المتغيرات المدروسة.

- يتلاءم أسلوب المعاينة مع تلك الدراسات المستعجلة والدراسات الدورية ؛ حيث أن لجوء الباحثين إلى المسح الشامل يجعلهم أبطأ في جمع المعلومات ، وبالتالي قد تتجاوزهم بعض الأحداث وتتغير بين أيديهم كثير من المعطيات ، مما يفقد دراساتهم قيمتها الاجتماعية والاقتصادية.

- كثيرة هي المجتمعات المرجعية التي تتكون من وحدات حساسة ؛ بحيث مكن لعملية الحصر الشامل أن تتلفها ، ومثال ذلك دراسة الباحث لمبحث يتعلق بتحليل مكونات مواد صيدلانية ؛ مما يجعل الباحث في هذه الحالات مضطرا للاستخدام سلوب المعاينة حفاظا على بقية المجتمع المرجعي.

- وبوصفها اقتطاعا لجزء فقط من المجتمع المرجعي- توفر المعاينة الباحث الكثير من الجهود ، فتنخفض بذلك تكاليف دراسته : ويقل وقت إجرائها ؛ وتزيد من كفاءة أدواته ووسائله **(سعد الحاج بن جخدل، 2019، 14).**

4-1- العوامل المؤثرة في تحديد حجم العينة:

- عندما يكون هناك عدد من المتغيرات غير المضبوطة (المتغيرات الدخيلة).

- عندما يتوقع أن يكون هنالك إهدار كبير في عدد المبحوثين.

- عندما يكون المطلوب فحص الفرضيات على مستوى دلالة إحصائية مرتفع.

- عندما يكون مجتمع الدراسة غير متجانس من حيث المتغيرات قيد الدراسة.

- عندما يتوقع أن يكون هنالك أثر قليل للمعالجة التجريبية.

- عندما يتطلب تصميم الدراسة تقسيم العينة إلى عينات جزئية صغير(**الاسدي و فارس، 2014، 40) .**

1-5- انواع العينات :

للمعاينة طرق متعددة تعتمد على نوعية المجتمع المراد دراسته وعلى الهدف من الدراسة، وتقسم العينات إلى عينات احتمالية وعينات غير احتمالية.

1-5-1- المعاينة الاحتمالية:

تتمتع المعاينة الاحتمالية بميزة فريدة تتلخص في أن التضمين المحتمل لأي عنصر في المجتمع البحثي المستهدف في العينة يحدث بلا تحيز، وذلك استنادا للانتخاب العشوائي الذي يتيح للباحثين تقدير مدى احتمال اختلاف الاستنتاجات القائمة على العينة ، عن تلك التي قد يجدها الباحث فيما لو تمت دراسة المجتمع البحثي ككل.

وبهذا تعتبر العشوائية عاملا مشتركا بين جميع التصاميم الخاصة بالمعاينة الاحتمالية ؛ وهي تشير إلى استعانة الباحثين بالحظ والصدفة في اختيارهم لوحدات المعاينة، و نؤكد هنا على أن الصدفة التي نعنيها هنا هي صدفة مراقبة وليست صدفة فجائية، وذلك لأننا نخضعها لمجموعة من الاحتياطات، على رأسها التأكد من البناء السليم والكامل لاطار المعاينة بحيث نضمن إعطاء الفرصة لجميع وحدات إطار المعاينة للظهور ضمن المجموعة المختارة **(سعد الحاج بن جخدل، 2019، 34).**

- **العينة العشوائية البسيطة:**

ويلجأ إليها الباحث في حالة ما إذا كان مجتمع الدراسة ليس كبيراً ويحمل قدراً من التجانس بين المفردات للصفة أو الصفات موضع الدراسة. و العينة العشوائية البسيطة تستغل فرص متكافئة لمفردات المجتمع للدخول في العينة ولكن المفردات التي تدخل في العينة تكون عن طريق الصدفة البحتة. و الاختيار العشوائي يتم يدوياً عن طريق بطاقات متماثلة في الحجم

واللون أو عن طريق جداول الأعداد العشوائية أو عن طريق الحاسب الآلي. ولكي يتحقق ذلك فإن الأمر يتطلب تحديد مفردات المجتمع تحديداً كاملاً ويكون هذا التحديد على شكل قائمة (أو خريطة) تضم كل مفردات المجتمع وهذه القائمة تسمى الإطار ولا يجوز الاختيار العشوائي إلا من المفردات التي يضمها الإطار **(محمد صبحي ابو صالح، 2009، 254).**

- **طريقة العينة المنتظمة:**

يتم في هذه الطريقة اختيار وحدة العينة المرقمة U والتي تسمى وحدة العينة وهي حجم المجتمع الإحصائي إلى حجم العينة، ثم اختيار رقم عشوائي بين 1 و U ليكون رقم العنصر الأول في العينة ثم إضافة U ومضاعفاتها على رقم العنصر الأول في العينة إلى أن تحصل على حجم العينة المطلوب. تستخدم طريقة العينة المنتظمة إذا كان المجتمع الإحصائي كبيرا ومتجانساً بالنسبة للمتغيرات محل الدراسة. فمثلا إذا كان المجتمع الإحصائي مكون من 100000 عنصر وأن حجم العينة المطلوب هو 500 فإن وحدة العينة U تساوي :

$$U = \frac{100000}{500} = 200$$

ثم نختار رقما عشوائيا بين 1 و 200 وليكن مثلا 150، فهذا يكون رقم العنصر الأول في العينة ثم نضيف 200 ومضاعفاتها إلى رقم العنصر الأول لنحصل على أرقام العناصر وهي 150، 350، 550، 750، 950، 1150، وهكذا حتى نحصل على حجم العينة المؤلفة من 500 عنصر.

تعتبر هذه الطريقة أسهل في اختيار عناصر العينة من طريقة العينة العشوائية البسيطة لأنه يتم اختيار جميع مفردات العينة بمجرد تحديد وحدة العينة واختيار العنصر الأول من المجتمع الإحصائي عشوائيا . كما أن المجتمع الإحصائي يمثل في العينة المنتظمة بطريقة متساوية. ولكن يعاب على أتباع طريقة العينة العشوائية المنتظمة انه إذا كانت الظاهرة موضوع الدراسة تعكس اتجاهات دورية للظاهرة وكان طول وحدة العينة U مساويا لطول

الدورة فإن ذلك يؤدي إلى اختيار عينة غير ممثلة للمجتمع ومن ثم عدم دقة التقديرات **(بدر و عبابنة، 22).**

➢ **العينة العشوائية الطبقية:**

تنحصر خطوات اختيار هذا النوع من العينات في عدة خطوات؛ هي:

- تقسيم مجتمع الدراسة الأصلي إلى طبقات أو مجتمعات صغيرة غير متداخلة.

- تحديد نسبة أفراد العينة من كل طبقة وبما يتناسب مع عددها الكلي.

- اختيار عشوائي لأفراد العينة من كل طبقة.**(عليان وغنيم، 2000، 146)**

يتم اختيار العينة الطبقية العشوائية وفق طريقتين:

- **طريقة التوزيع غير المتناسب(المحدود):**

وتسمى أيضا طريقة التوزيع المتساوي؛ حيث يوزع حجم العينة الكلي على مختلف الطبقات بالتساوي دون النظر إلى حجم الطبقات.. " .**(عطية،1999، 27)**

* **مثال:** إذا افترضنا أن طلبة كلية العلوم الاجتماعية البالغ عددهم 1000 طالب موزعين على المستويات الآتية: سنة أولى - سنة ثانية - سنة ثالثة - سنة رابعة، والمطلوب أخذ عينة حجمها (200) طالب بشكل ممثل للمجتمع تمثيلا صحيحا، كما يأتي:

طلبة السنة الأولى: 400 طالب. طلبة السنة الثانية: 200 طالب. طلبة السنة الثالثة: 200 طالب. طلبة السنة الرابعة: 200 طالب.

وباعتماد أسلوب العينة الطبقية ذات التوزيع غير المتناسب، نأخذ من كل مستوى دراسي (50) طالبا بغض النظر عن أعداد الطلبة في كل مستوى، ومن ثم يؤخذ هؤلاء الطلبة من كل مستوى بالطريقة العشوائية، وذلك ضمانا لتمثيل عناصر المستوى الد ارسي في العينة.

- **طريقة التوزيع المتناسب:**

تتلخص هذه الطريقة باختيار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة، بحيث يكون حجم هذه العينة يتناسب وحجم الطبقة المأخوذة منها، وهذا يعني أن نتعامل مع كل طبقة وكأنها مجتمع قائم بذاته لأخذ العينة . وفيما يلي العلاقة التي يمكن إتباعها لتحديد حجم العينة للطبقة **(نبيل جمعة خالد النجار، 2015، 96):**

$$\text{حجم عينة الطبقة} = \frac{\text{حجم الطبقة}}{\text{حجم المجتمع}} \times \text{حجم العينة للمجتمع.}$$

مثال: طلبة كلية العلوم الاجتماعية(1000) طالب، يتوزعون على 4 تخصصات، عددهم (100)، (500)، (200)، (200)، والمطلوب اختيار عينة مقدارها (100) طالب.

- الطبقة الأولى: التخصص الأولى $= \frac{100}{1000} \times 100 = 10$

- الطبقة الثانية: التخصص الثاني $= \frac{500}{1000} \times 100 = 50$

- الطبقة الثالثة: التخصص الثالث $= \frac{200}{1000} \times 100 = 20$

- الطبقة الرابعة: التخصص الرابع$= \frac{200}{1000} \times 100 = 20$

- **العينة متعددة المراحل أو العنقودية:**

يلجأ إليها الباحث عندما يكون مجتمع الدراسة كبير جداً ومتناثراً على مساحات شاسعة تكلف الكثير من الوقت والجهد في التنقل بينها عند جمع البيانات، أيضاً في حالة عدم وجود إطار يضم جميع مفردات المجتمع فيستحيل الاختيار العشوائي مباشر من المجتمع. لهذا يلجأ الباحث إلى أخذ العينة على مراحل متعددة متتالية. في المرحلة الأولى يتم تقسيم المجتمع إلى عدد محدد من وحدات المعاينة الكبيرة الحجم ومنها يختار بعضها عشوائياً ثم يتلو ذلك كمرحلة ثانية تقسيم الوحدات المختارة عشوائياً من المرحلة الأولى إلى وحدات أقل منها في الحجم ثم يختار بعضها عشوائياً.. وهكذا تتابع مراحل التقسيم والاختيار العشوائي ، وعدد هذه المراحل ليس ثابت بل يتوقف على طبيعة مجتمع الدراسة وإمكانيات الباحث .. في

المرحلة الأخيرة يصل الباحث إلى وحدات المعاينة التي سيجمع عنها بيانات البحث ويطلق عليها وحدات المعاينة الأولية **(عبد الله فلاح المنيزل، 2008، 41)**

1-5-2- العينات الغير احتمالية:

يتم اختيار العينة في هذا النوع من العينات بشكل متعمد، ونجري الدراسة على مجموعة محددة لا يخضع اختيارها للقرعة. من هذه العينات:

- **العينة الهادفة (القصدية):**

يقوم فيها الباحث باختيار أفراد يعرف مسبقا بأنهم الأقدر على تقديم المعلومات عن الظاهرة قيد الدراسة، ولهذا يجدر بالباحث أن يوازن بين التحيز الناتج عن العينة المقصودة وما توفره من معلومات صادقة **(الجادري،2016، 113).**

- **العينة الحصصية:**

يختارها الباحث بسرعة وسهولة، حيث يقوم بتقسيم مجتمع الدراسة الأصلي إلى فئات، ثم يختار عددا من أفراد كل فئة، فإذا أراد الباحث أن يدرس اتجاهات المجتمع نحو المخدرات، فإنه يعمد إلى تقسيم المجتمع إلى فئات: متعلمين، موظفين، أطباء...، على أن يختار من كل فئة عددا مناسبا، والفرق بين هذه الطريقة وطريقة العينة العشوائية الطبقية أنه في العينة الحصصية يختار العينة كما يريد دون الالتزام بشروط، فيختار الطلاب أو المعلمين، في حين لا يختار الباحث عينة كما يريد في العينة الطبقية **(طويطي مصطفى، 1999، 92)**

- **العينة العرضية:**

وهي العينة التي في متناول اليد وتعتمد على اختيار الباحث للعينة التي يسهل الحصول عليها، فإذا أراد الباحث التعرف على أسباب تفضيل أفراد المجتمع لممارسة نوع نشاط محدد، قد يجد من الأسر اختيار العينة من تلاميذ المدارس المحيطة بالمنطقة التي يقطن بها أو القريبة من مقر عمله، ذلك لأنه يستطيع أن يجمع البيانات منها بسهولة **(صابر وخفاجة،2002، 194)**

- **عينة الصدفة:**

في مثل هذا النوع من العينات يلجأ الباحث إلى اعتماد العينات المتوفرة لديه، والتي في الغالب لا تمثل مجتمع الدراسة ويصعب تعميم نتائجها، وفي بعض الأحيان لا يستجيب بعض أفراد العينة المختارة، فيلجأ الباحث إلى اختيار أفراد آخرين يتطوعون لتعبئة نماذج الاستبيان، وهذا النوع من العينات يعرف بعينات المتطوعين، وهي لا تمثل مجتمع الدراسة. **(عليان وغنيم،2000، 148)**

- **عينة كرة الثلج:**

تقوم هذه الطريقة على اختيار فرد معين وبناءا على ما يقدمه هذا الفرد من معلومات تهم موضوع دراسة الباحث يقرر الباحث من هو الشخص الثاني الذي سيقوم باختياره لاستكمال المعلومات والمشاهدات المطلوبة، لذلك سميت بعينة الكرة الثلجية، حيث يعتبر الفرد الأول النقطة التي سيبدأ حولها التكثيف لاكتمال الكرة أي اكتمال العينة.**(عليان وغنيم ،2000، 148)**

2- توزيع المعاينة:

يمكن إعطاء تعريف شامل لتوزيع المعاينة على أنه التوزيع الاحتمالي الذي يحدد الاحتمالات الممكنة لقيم إحصائية العينة، وتوزيع المعاينة لإحصائية ما يعتمد على عدد مشاهدات حجمها(n)، وهو التوزيع الاحتمالي لهذه الاحصائية الناتج عن تكرار سحب العينات ذات الحجم (n) ، كل مرة نخلص إلى قيمة ما لهذه الاحصائية **(خالد قاسم سمور، 2007، 323)**

و منه فإن توزيع المعاينة هو معرفة و تحديد القوانين الاحتمالية لإحصائيات العينة مثلا :

* ما هو قانون الإحصائية ($\bar{x}$)

* ما هو القانون الإحصائي للنسبة (p)

*للفرق بين الوسطين ($\bar{x}$ - $\bar{y}$)

* ما هو القانون الإحصائي للفرق بين نسبتين ($p_1 - p_2$)

*ما هو قانون الإحصائية (s^2)

2-1- توزيع المعاينة للمتوسط $(\bar{x})$:

على فرض أن هذه الإحصائية التي نريد تكوين توزيعها الاحتمالي هي الوسط الحسابي ، وليكن لدينا مجتمع ما عدد مفرداته N مفردة، ويتبع توزيعا احتماليا معينا، على فرض أننا سحبنا عيلة عشوائية حجمها (n) من هذا المجتمع، ثم قمنا بحساب وسطها الحسابي$(\bar{x}_1)$ ، ثم سحبنا عنة عشوائية ثانية حجمها (n) من ذات المجتمع، ثم قمنا بحساب وسطها الحسابي $(\bar{x}_2)$، ...وهكذا، أي إذا قمنا بتكرار السحب، وسحبنا كل العينات الممكن سحبها من هذا المجتمع فإنه سيتوفر لدينا عدد كبير من قيم المتوسطات الحسابية للعينات، هذه القيم لـ $(\bar{x})$ تشكل مجتمعا آخر عدد مفرداته أكبر بكثير من مفردات المجتمع الأصلي، وعلى ذلك يمكن النظر لهذا المقياس (الوسط الحسابي) على أنه متغير عشوائي يأخذ قيما مختلفة، ويتبع توزيعا احتماليا معينا قد يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي. ويسمى هذا المجتمع الجديد بمجتمع توزيع المعاينة للوسط الحسابي.(شفيق العتوم، 2008، 318)

و عليه فإن توزيع المعاينة لأي إحصائية يعمل على تحديد توقع و تباين هذه الإحصائية. و بالتالي تحديد القانون الاحتمالي الذي تتبعه (قانون طبيعي , فيشر , أم ستيودنت).

- **مثال توضيحي :**

مؤسسة تنتج 5 السلع (E,D,C,B,A) اوزانها المقابلة لها موضحة في الجدول الاتي :

جدول رقم (II-01) يوضح السلع و الأوزان المقابلة لها:

السلعة	الوزن
A	6
B	4
C	15
D	6

E	10

*** العمل المطلوب:**

- حدد المجتمع الإحصائي و أحسب متوسطه و تباينه.
- إيجاد جميع العينات الممكنة المكونة من سلعتين و التي يمكن سحبها من هذا المجتمع بالإرجاع، ثم إيجاد توزيع المعاينة لـ $(\bar{x})$ هذه الحالة ومنه حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لـ $(\bar{x})$
- ايجاد جميع العينات الممكنة المكونة من سلعتين التي يمكن سحبها من هذا المجتمع بدون إرجاع، ثم إيجاد توزيع المعاينـة فـي هـده الحالة ومنه حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لـ $(\bar{x})$
- قارن بين متوسط و تباين المتوسطات و متوسط و تباين المجتمع ماذا تستنتج؟

الحل :

1- المجتمع الإحصائي يتمثل في اوزان 5 سلع

- متوسط المجتمع (متوسط الوزن) :

$$\mu_X = \frac{6+4+15+6+10}{5} \Rightarrow \mu_X = 8.2$$

- تباين و انحراف المعياري للمجتمع :

$$\sigma_x{}^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N} = 15.36$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}} = 3.919$$

2-1- 1- توزيع المعاينة في حالة السحب بدون إرجاع :

- عدد العينات الممكن تكوينها : **الترتيب غير مهم + التكرار غير مقبول**

$C_5^2 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ عينات

جدول رقم (2-II) يوضح مختلف العينات و متوسطاتها :

العينات	الأوزان	المتوسطات
AB	6+4	5
AC	15+6	10.5
AD	6+6	6
AE	10+6	8
BC	15+4	9.5
BD	6+4	5
BE	10+4	7
CD	6+15	10.5
CE	10+15	12.5
DE	10+6	8
المجموع		**82**

- **حساب متوسط المتوسطات :**

جدول رقم (3-II) : يوضح احتمال تكرار المتوسط

$\bar{x}$	التكرار	$P(\bar{x}=x)$
5	2	0.2
6	1	0.1
7	1	0.1

0.2	2	8
0.1	1	9.5
0.2	2	10.5
0.1	1	12.5
1	**10**	**المجموع**

- $\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x})$
- $E(\bar{x}) = \sum \bar{x}\,.\,\mathrm{P}(\bar{x})$

$$\Rightarrow E(\bar{x}) = (0.2)(5) + (6)(1) + (7)(1) + (8)(2) + (9.5)(1)) + (10.5)(2) + (12.5)(1)$$

$$\Rightarrow E(\bar{x}) = 8.2$$

- **حساب الانحراف المعياري للمتوسط الحسابي:**

$$\sigma_x{}^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N} = 5.76$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2}{\text{عدد العينات}}} = \sqrt{5.76} = 2.4$$

- المقارنة بين متوسط و تباين المتوسطات و متوسط و تباين المجتمع في حالة المعاينة بدون إرجاع:

نلاحظ ان :

1* $\mu_{\bar{x}} = \mu_X = 7.68$

2* $\sigma_x \neq \sigma_{\bar{x}}$

الا انه يمكن حساب الانحراف المعياري لمتوسط العينة (σ_x) من خلال العلاقة الاتية:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{15.36}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{5-2}{5-1}}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{3.919}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$\Rightarrow \ \sigma_{\bar{x}} = 2.40$

➢ **قاعدة :** في حالة السحب بدون إرجاع او في حالة المجتمعات الصغيرة ($n \geq N5\%$) فإن:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}} = \mu_X \\ \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \end{cases}$$

2-1-2-توزيع المعاينة في حالة السحب بالإرجاع :

- عدد العينات الممكن تكوينها : **الترتيب مهم + التكرار مقبول**

$N^n = 5^2 = 10$ عينات

جدول رقم (4-II) يوضح مختلف العينات و متوسطاتها :

المتوسطات	الأوزان	العينات
6	6+6	AA
5	6+4	AB
10.5	6+15	AC
6	6+6	AD
8	6+10	AE

5	4+6	BA
4	4+4	BB
9.5	4+15	BC
5	4+6	BD
7	4+10	BE
10.5	15+6	CA
9.5	15+4	CB
15	15+15	CC
10.5	15+6	CD
12.5	15+10	CE
6	6+6	DA
5	6+4	DB
10.5	6+15	DC
6	6+6	DD
8	6+10	DE
8	10+6	EA
7	10+4	EB
12.5	10+15	EC
8	10+6	ED
10	10+10	EE
205		**المجموع**

- **حساب متوسط المتوسطات :**

جدول رقم (04) يوضح احتمال تكرار المتوسط

$P(\bar{x}=x)$	التكرار	$\bar{x}$
0.04	1	4
0.16	4	5
0.16	4	6
0.08	2	7
0.16	4	8
0.08	2	9.5
0.04	1	10
0.16	4	10.5
0.08	2	12.5
0.04	1	15
1	**25**	**المجموع**

- $\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x})$
- $E(\bar{x}) = \sum \bar{x} . P(\bar{x})$

$\Rightarrow E(\bar{x}) = (0.04)(4) + (0.16)(5) + (0.16)(6) + (0.08)(7) + (0.16)(8)) + (0.08)(9.5) + (0.04)(10) + (0.16)(10.5)) + (0.08)(12.5) + (0.04)(15)$

$$\Rightarrow E(\bar{x}) = 8.2$$

- حساب الانحراف المعياري للمتوسط الحسابي:

$$\sigma_x{}^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N} = 7.68$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2}{\text{عدد العينات}}} = \sqrt{7.68} = 2.771$$

- المقارنة بين متوسط و تباين المتوسطات و متوسط و تباين المجتمع في حالة المعاينة بالإرجاع:

نلاحظ ان :

$1^*\ \mu_{\bar{x}} = \mu_X = 7.68$

$2^*\ \sigma_x \neq \sigma_{\bar{x}}$

الا انه يمكن حساب الانحراف المعياري لمتوسط العينة (σ_x) من خلال العلاقة الاتية:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{15.36}}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{3.919}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = 2.77$$

- **قاعدة :** في حالة السحب بالإرجاع او في حالة المجتمعات الكبيرة $(n \leq N5\%)$ فإن:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}} = \mu_X \\ \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

إلى غاية الحد نقول أننا أجبنا على نفس السؤال المرتبط بقانون المتوسط الحسابي أين قمنا بإيجاد توقع و تباين هذه الإحصائية و لكن بقي الآن معرفة القانون الاحتمالي الذي تتبعه الإحصائية.

- **نظرية 01 :**

إذا أخذنا عينة حجمها n من مجتمع إحصائي وسطه μ_x و تباينه σ_x^2 فان المتوسط الحسابي $(\bar{x})$ سيخضع لتوزيع وسطه $\mu_{\bar{x}}$ و تباينه $\sigma_{\bar{x}}{}^2$ بحيث :

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_X$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} & \text{في حالة المجتمعات المحددة } n \geq N\%5 \\ \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} & \text{في حالة المجتمعات الكبيرة } n \leq N\%5 \end{cases}$$

- **نظرية 02 :**

إذا أخذت عينة حجمها n من مجتمع إحصائي وسطه μ_x و تباينه σ_x^2 فان المتوسط الحسابي $(\bar{x}.)$ يخضع تقريبا لتوزيع وسطه μ_x و تباينه $\frac{\sigma_x^2}{n}$ عندما تكون حجم العينة كبيرة نسبيا (مفهوم النهاية المركزية).

أي ان : $\bar{x} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \mu_x)\sqrt{n}}{\sigma_x} \sim N(0, 1)$$

* باختصار عموما قانون المتوسط هو القانون الطبيعي و خاصة إذا كان حجم العينة اكبر أو يساوي 30.

- **مثال 01:**

متوسط النقاط لمقياس الرياضيات لدفعة السنة الثانية علوم اقتصادية و المتكونة من 300 طالب هو 9.8 بانحراف معياري 3.68.

*احسب احتمال ان يكون متوسط النقاط لعينة عشوائية لنقاط 40 طالب مستخرجة من الدفعة:

1- محصورا بين 10 و 13

-2 اقل من 10 في حالة السحب بالارجاع

الحل :

لدينا: N =300 ،n =40 ،$\sigma_{\bar{x}}$ = 3.68 ، $\mu_x = 9.8$

-1 حساب احتمال ان يكون متوسط النقاط محصورا بين 10 و 13

مجتمع محدود (صغير) ⇒15 =(300)5% ≤40)   n=40⇒ $n \le N\%5$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} . \sqrt{\frac{N-n}{N-1}})$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(9.8, \frac{3.68}{\sqrt{40}} . \sqrt{\frac{300-40}{300-1}})$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(9.8 \; ; \; 0,54)$$

$$\Rightarrow P(10 \le \bar{X} \le 13) = P\left(\frac{10-9.8}{0.54} \le Z \le \frac{13-9.8}{0.54}\right)$$

$$= P(0.37 \le Z \le 5.92) = P(Z \le 5.92) - P(Z \le 0.37)$$

= 1-0.6443

= 0.3557

-2 حساب احتمال ان يكون متوسط النقاط اقل من 10 في حالة السحب بالإرجاع

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} .)$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(9.8, \frac{3.68}{\sqrt{40}})$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(9.8, 0.581)$$

$$\Rightarrow P(\bar{X} \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-9.8}{0.581}\right)$$

$$= P(Z \leq 0.34) = 0.6331$$

- **مثال 02:**

مصنع لإنتاج رقائق البطاطس يدعي بأن وزن الأكياس بالمتوسط 50 غرام وبانحراف معياري 1.6 غرام، كما يدعي بأن الأوزان تتبع توزيعا طبيعيا، تم سحب عينة من 64 كيس، فما هو احتمال أن :

1- يكون متوسط وزن العينة أكبر من 50.2 غرام؟

2- يكون متوسط وزن العينة بين 50.10 و 50.18غرام ؟

3- يكون متوسط وزن العينة أقل من 49.7 غرام؟

الحل :

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{x}}) \,/\, \mu_{\bar{x}} = 50; \ \sigma_{\bar{x}} = \frac{1,6}{\sqrt{64}} = 0,2$$

$$\bar{X} \sim N(50 \ ; \ 0,2)$$

$$Z \sim N(0,1) \ / \ Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}.$$

1- $P(\bar{X} \geq 50,2) = P\left(Z \geq \frac{50,2-50}{0,2}\right)$

$$= P(\boldsymbol{Z} \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1)$$

$$= 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$$

$$2\text{- } P(50{,}10 \leq \bar{X} \leq 50{,}18) = P\left(\frac{50{,}10-50}{0{,}2} \leq Z \leq \frac{50{,}18-50}{0{,}2}\right)$$

$$= P(0{,}5 \leq Z \leq 0{,}9) = P(Z \leq 0{,}9) - P(Z \leq 0{,}5)$$

$$= 0{,}81594 - 0{,}69146 = 0{,}12448$$

$$3\text{- } P(\bar{X} \leq 49{,}7) = P\left(Z \leq \frac{49{,}7-50}{0{,}2}\right)$$

$$= P(Z \leq -1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$$

$$= 1 - (0.93319) = 0.06681$$

2-1-3- حالة خاصة لتوزيع ($\bar{x}$) في حالة تباين المجتمع مجهول(σ_x^2):

في كثير من الأحيان نجهل الانحراف المعياري للمجتمع (σ_x) فنقوم باستبداله بالانحراف المعياري للعينة (s^2) و تصبح الصيغة التالية تتبع قانون ستيودنت و خصوصا إذا كان حجم العينة صغير ($n \leq 30$)

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \mu_x)\sqrt{n}}{s} \sim t\,(n\text{-}1)$$

* إذا كان ($n \geq 30$) يمكن تقريب قانون ستيودنت إلى القانون الطبيعي.

- **مثال 03:**

نفترض أن الاستهلاك الشهري للحليب الخاص بالعائلات يتبع توزيع طبيعي توقعه 32 لتر. أخذت عينة عشوائية حجمها 10 عائلات فوجد أن انحرافها المعياري 4.58 لتر.

1- تحديد القانون الاحتمالي لمتوسط العينة.

2- احسب احتمال أن يكون متوسط الاستهلاك الشهري للعينة محصور بين 30ل و 34ل.

الحل:

$\mu_X = 32$, $\sigma_x = ?$, n = 10 , $s = 4.58$

1- تحديد القانون الاحتمالي لمتوسط العينة ($\bar{\boldsymbol{x}}$):

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع (σ_x) فإن :

$\frac{(\bar{x}-\mu_x)\sqrt{n}}{s} \sim t\ (n\text{-}1)$

$\Rightarrow \frac{(\bar{x}-32)\sqrt{10}}{4.58} \sim t\ (9)$

2- احسب احتمال أن يكون متوسط الاستهلاك الشهري للعينة محصور بين 30ل و 34ل.

$$P(30 \leq \bar{X} \leq 34) = P\left(\frac{(30-32)\sqrt{10}}{4.58} \leq t \leq \frac{(34-32)\sqrt{10}}{4.58}\right)$$

$$= P(-1.38 \leq t \leq 1.38) = (t \leq 1.38) - P(t \leq -1.38)$$

$$= P(t \leq 1.38) - P(t \geq 1.38)$$

$$= P(t \leq 1.38) - [1 - P(t \leq 1.38)] = 2\ (P(t \leq 1.38))\ \text{-}1$$

من جدول ستيودنت وتحت درجة حرية 09 نجد: $P(t \leq 1.38) = 0.9$

$$\Rightarrow P(30 \leq \bar{X} \leq 34) = 2.(0.9)\text{-}1$$

$= 0.8$

2-2- توزيع المعاينة للنسبة $\hat{}$:

في بعض الأحيان يبدو من الضروري تقدير او اتخاذ قرار يتعلق بنسبة عناصر أو مفردات المجتمع الاحصائي التي تحمل صفة معينة، فمثلا نسبة المصابين بمرض معين في مجتمع

ما، أو نسبة العاطلين عن العمل، أو نسبة التلف في الانتاج السلعة ما...إلخ، إن إحصائية العينة التي عادة ما تستخدم لإعطاء معلومات عن نسبة مفردات المجتمع الاحصائي التي تحمل صفة معينة يطلق عليه تسمية معاينة النسبة.

ويقصد بالنسبة في المجتمع الكسر($\mathbf{p} = \frac{a}{}$)؛ حيث أن $\boldsymbol{N}$ تمثل حجم المجتمع، و $\boldsymbol{N_a}$ عدد المفردات التي تتحقق فيها صفة ما.

ونقصد بالنسبة في العينة ($\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{a}{}$)، حيث أن n تمثل حجم العينة، و $\boldsymbol{n_a}$ عدد مفردات العينة التي تحقق نفس الصفة.

فإذا ما كررنا العملية عدة مرات فإن هذه النسبة ستتغير وتصبح متغيرة عشوائية، وهنا نطرح السؤال التالي:

* ما هو قانون ⌒ أو ما هو توزيع المعاينة لهذه المتغيرة؟

- **نتائج :**

يمكن تعميم نتائج توزيع المعاينة ل $\overline{x}$ على التوزيع المعاينة لـ ⌒

إذا كان لدينا عينة عشوائية $x_1, \dots\dots x_n$

بحيث : $\overline{x} \sim B\,(n, p)$

لدينا : $E(X) = n.p \quad , \quad V(X) = n.p.q$

و $\hat{p} = \frac{x}{n}$

$\Rightarrow E(\hat{p}) = E(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}\ E(X) \quad \Rightarrow E(\hat{p}) = \mu_p = p$

$V\,(\hat{p}) = V\,(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n^2}\ V\,(X)$

$$\Rightarrow V(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} \;.\; n.p.q$$

$$\Rightarrow V(\hat{p}) = \sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

➢ **قاعدة عامة:** إذا كانت P نسبة صفة معينة في مجتمع ما وسحبنا عينات عشوائية حجم كل منها n ،فإن $\hat{\boldsymbol{p}}_i$ (i=1; .... ;n) تتشكل توزيع المعاينة للنسبة، ويتميز التوزيع النظري لمعاينة النسبة بالخصائص التالية:

* $E(\hat{p}) = \mu_p = p$

$$* \ \sigma_{\hat{p}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{pq}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{في حالة المجتمعات المحدودة } n \geq N\%5 \\ \sqrt{\frac{pq}{n}} & \text{في حالة المجتمعات الكبيرة } n \leq N\%5 \end{cases}$$

و كقاعدة عامة فان توزيع $\hat{p}$ يكون كالاتي:

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

➢ **مثال:**

إذا كان احتمال نجاح الطالب في احد المقاييس هو 0.8. سحبت عينة عشوائية حجمها 49 طالب.

* اوجد احتمال أن تكون نسبة نجاح طلبة العينة محصورة بين 70 % و 92 %.

الحل :

$P(0.7 \leq \hat{p} \leq 0.92) = ?$

لدينا : $E(\hat{p}) = p = 0.8$, $n = 49$

$\hat{p} \backsim N(p, \frac{pq}{n})$

$E(\hat{p}) = p = 0.8$

$V(\hat{p}) = \sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n} = (0.9)(0.1)\frac{1}{49} = 0.0018$

$\hat{p} \backsim N(0.8, \sqrt{0.0018}) \Rightarrow \hat{p} \backsim N(0.9, 0.056)$

$\Rightarrow z = \frac{\hat{p}-0.8}{\sqrt{0.0018}} \backsim N(0, 1)$

$\Rightarrow P(0.7 \leq \hat{p} \leq 0.92) = P\left(\frac{0.7-0.8}{0.056} \leq z \leq \frac{0.92-0.8}{0.056}\right)$

$= P(-1.78 \leq z \leq 2.14) = (z \leq 2.14) - P(z \leq -1.78)$

$= P(z \leq 2.14) - P(z \geq 1.78)$

$= P(z \leq 2.14) - [1 - P(z \leq 1.78)]$

$= 0.9838-1+0.9625$

$\Rightarrow P(0.7 \leq \hat{p} \leq 0.92) = 0.90 = 90\%$

احتمال أن تكون نسبة نجاح طلبة العينة محصورة بين 0.7 و 0.92 ، هو 90%.

2-3- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{x} - \bar{y})$:

يمكن تعميم نتائج توزيع المعاينة ل $\bar{x}$ على التوزيع المعاينة لـ $(\bar{x} - \bar{y})$

2-3-1- حالة المجتمعات الأصلية تتبع التوزيع الطبيعي :

ليكن لدينا العينة $(x_1, \dots x_n)$ و العينة $(y_1, \dots y_n)$ ، بحيث :

* حجم العينة الاولى: n_1

$x_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

* حجم العينة الثانية : n_2

$y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

ونعلم أن :

$$\bar{x} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}) \quad , \quad \bar{y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$\Rightarrow \bar{x} - \bar{y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$\Rightarrow z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

2-3-2- حالة المجتمعات الأصلية لا تتبع القانون الطبيعي :

- **الفرضية الثانية أن:** σ_1^2 ، σ_2^2, مجهولتين و n_1 و n_2 كبيرتين:

حسب نظرية النهاية المركزية : اذا كان $n_2 \geq 30$, n_1 فإن :

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

- **الفرضية الثانية أن:** σ_1^2 ، σ_2^2, مجهولتين و n_1 و n_2 صغيرتين

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \Rightarrow \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim ؟$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim ؟$$

* لعدم معرفة σ^2 نستبدله بـ s^2:

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim ?$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim Z(n_1 + n_2 - 2)$$

بحيث: $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

➢ **مثال:**

سحبت عينتين عشوائيتين من شركتين مختلفتين لإنتاج العلف الزراعية و كانت الأجور المدفوعة من قبلهما تتبع التوزيع الطبيعي بمعدل 230 دج و بانحراف معياري 36 دج بالنسبة للشركة A . و بمعدل 186 دج و انحراف معياري 40 دج للشركة B . إذا أخذنا عينة عشوائية من 36 ، 49 عامل من الشركتين على التوالي.

- احسب احتمال أن معدل الأجور المدفوعة من قبل الشركة A لها متوسط على الأقل 40 دج فأكثر من متوسط الأجور المدفوعة للشركة B

الحل:

لدينا : $\mu_1 = 210 \quad , \quad \mu_2 = 186 \quad , \quad \sigma_1^2 = (36)^2 \quad , \sigma_2^2 = (40)^2$

$p(\bar{x} \geq \bar{y} + 60) = p(\bar{x} - \bar{y} \geq 60) = ؟$

$x_i \sim N(210, (36)^2) \quad , \quad y_i \sim N(186, (40)^2)$

$\bar{x} \sim N(210, \frac{(36)^2}{16}) \quad , \quad \bar{y} \sim N(186, \frac{(40)^2}{10})$

$\bar{x} - \bar{y} \sim N(24, \frac{(36)^2}{16} + \frac{(40)^2}{10})$

$\Rightarrow z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (24)}{\frac{36}{\sqrt{16}} + \frac{40}{\sqrt{10}}} \sim N(0, 1)$

$p(\bar{x} - \bar{y} \geq 40) = 1 - p(\bar{x} - \bar{y} \leq 40)$

$= 1 - p(z \leq \frac{40-24}{\frac{36}{\sqrt{16}} + \frac{40}{\sqrt{10}}}) = 1 - p(z \leq 1.93)$

$= 1 - 0.97320$

$= \ 0.0268.$

$= \ \% \ 02.68$

إذا احتمال أن معدل الأجور المدفوعة من قبل الشركة A لها متوسط على الأقل 40دج فأكثر من متوسط الأجور المدفوعة للشركة B هو 02.68 % .

2-4- توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين $(\widehat{\ }_1 - \hat{p}_2)$:

يمكن تعميم نتائج توزيع المعاينة ل $\hat{p}$ على التوزيع المعاينة لـ $(\widehat{\ }_1 - \hat{p}_2)$

إذا كان لدينا :

$$\hat{p}_1 \backsim N(p_1, \frac{p_1\, q_1}{n_1}) \ , \ \hat{p}_2 \backsim N(p_2 \, , \frac{p_2\, q_2}{n_2})$$

فان :

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \backsim N(p_1 - p_2, \frac{p_1\, q_1}{n_1} + \frac{p_2\, q_2}{n_2})$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1\, q_1}{n_1} + \frac{p_2\, q_2}{n_2})}} \backsim N(0,1)$$

- **مثال :**

إذا كانت نسبة النجاح في مادة الإحصاء في الجامعة A هي 0.8 و في الجامعة B هي 0.75. سحبت عينتين عشوائيتين حجمها 70 و 35 طالبا من الجامعتين على التوالي.

- اوجد احتمال أن تزيد نسبة النجاح في الجامعة A عن نسبة النجاح في الجامعة B بمقدار 0.1 على الأقل.

الحل:

$p_1 = 0.8 \ , \quad p_2 = 0.75 \ , \quad n_1 = 70 \ , n_2 = 35$

$\rho(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \geq \ 0.01) = ?$

$\hat{p}_1 \backsim N\left(0.8\ ,\ \frac{(0.8)(.02)}{70}\right)$

$\hat{p}_2 \backsim N\left(0.75\ ,\ \frac{(0.75)(0.25)}{35}\right)$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \backsim N\left(0.05,\ \frac{(0.8)(.02)}{70}+\frac{(0.75)(0.25)}{35}\right)$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \backsim N\left(0.05,\ (0.087)^2\right)$

$\rho(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \geq\ 0.01) =\ \rho\left(\frac{(\widehat{p}1 - \hat{p}2\ ) - 0.05}{0.087} \geq\ \frac{0.01 - 0.05}{0.087}\right)$

$= \ P(Z \geq -0.45) = P(Z \leq 0.45)$

$= 0.6736$

- احتمال أن تزيد نسبة النجاح في الجامعة A عن نسبة النجاح في الجامعة B بمقدار 0.1 على الأقل هو 67.36 %.

5-2- توزيع المعاينة للتباين(s^2):

➢ **قاعدة:**

إذا كان لدينا ($x_1 .... x_n$) عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ و ^{2}

تباين العينة مع ^{2} تباين المجتمع معلوم

فإن : $\frac{(n-1)\ s^2}{\sigma^2} \backsim \chi^2_{\ (n-1)}$

$\chi^2_{\ (n-1)}$: قانون كاي تربيع تحت درجة حرية (n-1)

➢ **مثال:**

أخذت عينة عشوائية حجمها 15 من توزيع طبيعي معدله μ وتباينه σ^2=49 وكانت s^2 تباين العينة . فأوجد احتمال ان تكون s^2 *اقل من* 82.*9*

الحل:

$\rho(s^2 \le 82.9) = ?$

نعلم أن: $\frac{(n-1)\, s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

$\rho(s^2 \le 82.9) = \rho(\frac{(11-1)s^2}{49}) \le 82.5\,\frac{(11-1)}{49})$

$= \rho\ (\chi^2 \le 23.685)$

من جدول قانون كاي تربيع وتحت درجة حرية 14 فان:

$\rho(s^2 \le 82.9) = \rho(x^2 \le 23.685) = 95\%$

إذا احتمال ان تكون s^2 *اقل من* 82.9 *هو* 95%.

6-2- توزيع المعاينة لنسبة تباين عينتين($\frac{s_1^2}{s_2^2}$) :

إذا كان لدينا عينتين عشوائيتين من مجتمعين مستقلين بحيث :

$x_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, n_1 , s_1^2 تباين العينة

$y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, n_2 , s_2^2: تباين العينة

فإن:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{(n_1-1),(n_2-1)}$$

- **مثال:**

إذا كانت لدينا:

$x \sim N(\mu, \sigma^2)$ $n_1 = 11$

$y \sim N(\mu, \sigma^2)$ $n_2 = 16$

* أوجد احتمال : $p(\frac{s_1^2}{s_2^2} \ge 3.80) = ?$ ، بافتراض ان العينتين مستقلتين

نعلم أن :

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{(n_1-1),(n_2-1)}$$

من جدول فيشر وتحت درجتي الحرية $n_1=10$ و $n_2=15$

$$p(\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq 3.80) = 1\text{-}0.99 = 0.01$$

2-7- تمارين محلولة:

➢ **التمرين 01 :**

نفترض أن الربح اليومي لمحل تجاري يتبع توزيع طبيعي بمعدل 1000 دج و انحراف معياري 150 دج، قمنا بدراسة لعينة من 25 عملية بيع قام بها المحل في يوم معين.

1- احسب احتمال أن يكون متوسط الربح اليومي لعينة البحث اكبر من 1063 دج.

2- احتمال ان يكون متوسط الربح اليومي للعينة المدروسة ما بين 950 دج و 1060 دج.

3- ما هو حجم العينة المطلوب لكي نحصل على متوسط ربح يومي للعينة المدروسة اكبر من 1063 دج باحتمال 15.39 %.

حل التمرين 01 :

X: م ع م تمثل الربح اليومي لمحل تجاري.

$$X \sim N(1000,150)$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{x}}) \;/\; \mu_{\bar{x}} = 1000;\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{150}{\sqrt{25}} = 30$$

$$\bar{X} \sim N(1000\ ;\ 30)$$

$$Z \sim N(0,1) \;\;/\;\; Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - 1000}{30}$$

1- $P(\bar{X} \geq 1063) = P\left(Z \geq \frac{1063-1000}{30}\right)$

$= P(\boldsymbol{Z} \geq 2.1) = 1 - P(Z \leq 2.1)$

$= 1 - 0,9821 = 0,0179$

* احتمال أن يكون متوسط الربح اليومي لعينة البحث اكبر من 1063 دج هو 1.79 %.

2- $P(950 \leq \bar{X} \leq 1060) = P\left(\frac{950-1000}{30} \leq Z \leq \frac{1060-1000}{30}\right)$

$= P(-1.66 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1.66)$

$= P(Z \leq 2) - P(Z \geq 1.66)$

= $P(Z \leq 2)$ - $[1 - P(Z \leq 1.66)]$

= 0.9772-1+0.9515= 0.9287

* احتمال ان يكون متوسط الربح اليومي للعينة المدروسة ما بين 950 دج و 1060 دج هو 92.87 %.

3- حجم العينة المطلوب لكي يكون لدينا : $P(\bar{X} \geq 1063) = 0.1539$

لدينا : $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{x}})$ / $\mu_{\bar{x}} = 1000;\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{150}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \bar{X} \sim N(1000\ ;\ \frac{150}{\sqrt{n}})$

$$P(\bar{X} \geq 1063) = P\left(Z \geq \frac{1063 - 1000}{\frac{150}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{1063-1000}{\frac{150}{\sqrt{n}}}\right)= 0.1539$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq 0.42\sqrt{n}\right)= 0.1539$$

$$\Rightarrow 1-P\left(Z \leq 0.42\sqrt{n}\right)= 0.1539$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq 0.42\sqrt{n}\right)= 0.0.8461$$

* من جدول القانون الطبيعي الخاص ($z_{0.8461}$=1.02)

$$\Rightarrow 0.42\sqrt{n}= 1.02 \Rightarrow \sqrt{n}= 2.43$$

$$\Rightarrow n= 5.90 \approx 6$$

* *حجم العينة المطلوب هو 06.*

➢ **التمرين 02:**

تنتج إحدى المؤسسات مادة الحبر و تعبؤه في قارورات بحيث تخضع سعة القارورة بالميليلتر (ml) إلى توزيع طبيعي بمتوسط (75 ml). سحبنا عينة عشوائية من (20) قارورة فوجدنا أن الانحراف المعياري للعينة هو (3.36 ml).

المطلوب :

1- ما هو احتمال الحصول على متوسط سعة القارورات في العينة المسحوبة اقل من 74 ؟

2- إذا علمت أن حجم العينة المسحوبة أصبح 32 عينة، ما هو احتمال الحصول على متوسط سعة القارورات في العينة المسحوبة يكون محصور بين 74 و 76 ؟

حل التمرين 02 :

X: م ع م تمثل سعة القارورات

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x) \Rightarrow \ X \sim N(75, \sigma_x)$$

n= 20 , s = 3.36

1- $P(\bar{X} \leq 74) = \ ?$

* بما ان σ_x مجهولة و ى حجم العينة اقل من 30 فان :

$$\frac{(\bar{x} - \mu_x)\sqrt{n}}{s} \sim t_{n-1}$$

$$\Rightarrow P(\bar{X} \leq 74) = \ P\left(\frac{(\bar{x} - \mu_x)\sqrt{n}}{s} \leq \frac{74-75\sqrt{20}}{3.36}\right)$$

$$= P(t \leq -1.33)$$

$$= 1 - P(t \leq 1.33)$$

* من جدول ستيودنت و تحت درجة حرية (19) فان : $t_{1.33}$ (19) =0.90

$\Rightarrow P(\bar{X} \leq 74) =$ *1- 0.90 = 0.10*

- احتمال ان يكون متوسط سعة القارورة اقل من 74 هو 10 %.

2- $P(74 \leq \bar{X} \leq 76) = \ ?$

* بما ان σ_x مجهولة و حجم العينة اصبح اكبر من 30 فان :

$$\frac{(\bar{x} - \mu_x)\sqrt{n}}{s} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \ P(74 \leq \bar{X} \leq 76) = \ P\left(\frac{74-75\sqrt{32}}{3.36} \leq Z \leq \frac{76-75\sqrt{32}}{3.36}\right)$$

$$= P(-1.69 \leq Z \leq 1.69) = P(Z \leq 1.69) - P(Z \leq -1.69)$$

$$= P(Z \leq 1.69) - P(Z \geq 1.69)$$

$= P(Z \leq 1.69) - [1 - P(Z \leq 1.69)] = 2\,(P(Z \leq 1.69)) - 1$

$= 2(0.9545)-1 = 0.909$

- احتمال ان يكون متوسط سعة القارورة محصورة بين 74 و 76هو 90.90 %.

➢ **التمرين 03:**

أقترح نظام جديد في إحدى الهيئات الإدارية في منطقة لتخفيض وقت الخدمة، نفرض أن 60% من الأشخاص موافقون على الاقتراح. نختار عينة من 150 شخص من سكان هذه المنطقة.

نعرف المتغير العشوائي Xالذي يمثل عدد الأشخاص في العينة الموافقين على الاقتراح.

1- ما هو التوزيع الاحتمالي لـ X ؟ أحسب توقعه و تباينه.

2- أحسب احتمال أن لا تقل نسبة الأشخاص الموافقين على الاقتراح في العينة عن 59% و لا تزيد عن 70 %.

3- أحسب احتمال أن لا يقل عدد الموظفين على الاقتراح في العينة عن 50 شخص و لا يزيد عن 106 أشخاص.

حل التمرين 03 :

1) التوزيع الاحتمالي لـ X : يتبع توزيع ذو الحدين$(n\,;\,p)\ \beta \backsim$،بحيث:

p= 0.6 n= 150

– حساب التوقع E(X):

$$p=\frac{X}{n} \Longrightarrow X = np \Longrightarrow E(X) = n\,E(P) = np = 150\ \times 0{,}6 = 90$$

– حساب التباين V(X):

$$X = n\,p \Longrightarrow\ V(X) =\ n^2\,V(P) = n^2\,.\frac{P\ \times q}{n} = npq$$

$$= 150 \times 0.6 \times 0.4 = 36$$

2) حساب احتمال أن لا تقل نسبة الأشخاص الموافقين على الاقتراح في العينة عن 59% و لا تزيد عن 70%.

$n \geq 30$، فتوزيع المعاينة للنسبة يتبع التوزيع الطبيعي، حيث:

نقدر قيمة p بـ $\widehat{P}$ أي p= 0.6

$$\mu_{\widehat{P}} = P = 0.6$$

$$\sigma_{\widehat{P}} = \sqrt{\frac{P \times q}{n}} = \sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{150}} = 0.04$$

$$P(0.59 \leq \widehat{P} \leq 0.7) = P\left(\frac{0.59-0.6}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{150}}} \leq \frac{0.59-P}{\sqrt{\frac{P \times q}{n}}} \leq \frac{0.7-0.6}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{150}}}\right)$$

$$= P(-0.25 \leq Z \leq 2.5) = P(Z \leq 2.5) - 1 + P(Z \leq 0.25)$$

$$= 0.9938 - 1 + 0.5987 = 0.5925$$

احتمال أن لا تقل نسبة الأشخاص الموافقين على الاقتراح في العينة عن 59% و لا تزيد عن 70% هو 0.5925

3) حساب إحتمال أن لا يقل عدد الموظفين على الاقتراح في العينة عن 50 شخص و لا يزيد عن 106 شخص.

$$P(50 < X < 106) = P\left(\frac{50}{n} < \frac{X}{n} < \frac{106}{n}\right)$$

$$= P\left(\frac{50}{150} < \widehat{P} < \frac{106}{150}\right)$$

$$= P(0,3333 < \widehat{P} < 0,7066)$$

$$= P\left(\frac{0,3333 - 0.6}{0.04} < Z < \frac{0,7066 - 0.6}{0.04}\right)$$

$$= P(-6,66 < Z < 2,66)$$

$$= P(Z < 2,66) - 1 + P(Z < 6,66) = \mathbf{0.9961}$$

التقديـــــر:

يتم التقدير باختيار عينة من المجتمع ومشاهدة مفردات تلك العينة، ومن تم حساب المقياس المراد وتعميم ذلك على المجتمع، فلو أردت تقدير ناتج حقل من الزيتون تأخذ عينة عشوائية من عشرة زيتونات على سبيل المثال، وتزن إنتاجها جميعها ثم تقسم على 10 فتحصل على معدل إنتاج الشجرة الواحدة في العينة وتستعمل هذا المعدل لتقدير معدل إنتاج الشجرة في الحقل بأكمله.

وإذا علمت عند الأشجار في الحقل فإنك تقدر الإنتاج الكامل على انه يساوي عدد الأشجار مضروبا في معدل إنتاج الشجرة الواحدة.

للتقدير أهمية كبرى ولـه مجـالات تطبيقية في الزراعة والصناعة والتربية والدراسات الاجتماعية والصحية، فلو أرادت وزارة الصحة تقدير نسبة الطلبة في المدارس الأساسية الذين يحتاجون إلى نظارات طبية، فلابد على الوزارة دراسة حالة عينة ممثلة للطلبة المذكورين ومعرفة نسبة المحتاجين إلى استعمال النظارة الطبية، ومن ثم تعميـم ذلـك على مجتمع الطلبة، بذلك تكون قد أعطيت تقديرا للنسبة في المجتمع مـن دراستك للنسبة في العينة

هذا النوع من التقدير يسمى التقدير بنقطة، ولما كان من غير المحتمـل معرفة النسبة الحقيقية (النسبة في المجتمع) بالضبط فإنك تحتاج إلى إعطاء فـترة يكـون مـن الممكن وقوع نسبة المجتمع داخل هذه الفترة. أي انك تعطي قيمتين وتقول إن نسبة المجتمع تقع بين هاتين القيمتين، ولما كان لا بد من وجود خطأ في تقديرك، فإنك تقول ان نسبة المجتمع تقع بين قيمتين باحتمال معـين. وهـذا النوع من التقدير يسمى التقدير بالمجال (بفترة). وكما أنك تحتاج إلى تقدير النسبة فإنك تحتاج أيضا إلى تقدير الوسـط الحسابي، وتقدير التباين ، وغيرها وأهم أنواع التقديـر الـتي ندرسها هـي التقديـر النقطي والتقدير بالمجال (بفترة). **(محمد صبحي ابو صالح، 2009، 290)**

1- التقدير النقطي:

تقدر معالم المجتمعات من بيانات العينة لأنـه مـن غير المعقول وغير عملي وبسبب محدودية الموارد والوقت والإمكانيات الفنية، استخدام جميع مفردات المجتمع للحصول على القيمة الفعلية للمعلمة أو المعالم، كما أن الحصـر الشامل أو الفحص الكامل لجميع مفردات المجتمع قد يؤدي في العديد من الحالات إلى إتلافها، فإذا كـان المطلوب مثلا تقدير عمر المصباح الكهربائي الذي ينتجه مصنع معين فإنـه مـن غـير المعقول استخدام عدد كبير من المصـابيح للوصول إلى هذه القيمة. حيث نأخذ عينة عشوائية من إنتاج هذا المصنع، ونجري عليها الاختبـار ونسجل طـول حـياة كـل مصباح منها، ثم نحسب الوسط الحسابي لطول حياة المصـابيح في العينة. إن القيمة التي تحصل عليـها في وسط العينة هي القيمة التي سنستعملها كتقدير لوسط المجتمع. لان التقدير النقطي يعطي قيمة واحدة كتقدير لمعلمة المجتمع التي نهدف إلى تقديرها. **(شفيق العتوم،2008، 341)**

1-1- التقدير النقطي للمتوسط :

لتكن (x) متغيرة عشوائية معرفة في مجتمع إحصائي Ω نرمز ل (µ) بالتوقع الرياضي لـ (x)، (µ) هي المعلمة المجهولة التي نبحث عن تقديرها لذلك نستعمل العينة ذات الحجم (n) ثم نحسب ($\bar{x}$) فيعطي لنا تقدير نقطي لـ (µ)

- **نتيجة هامة :**

مَقد متوسط المجتمع (µ) هو ($\bar{x}$) ويكون ($\bar{x}$) مقدر جيد كلما كبر حجم العينة (n).

- **مثال توضيحي:**

من خلال دراسة إحصائية تحصلنا على 5 قياسات لقطر قرص من الحديد : 6.33 ، 6.37 ، 6.36 ، 6.32 ، 6.37 سم.

-اوجد أحسن مقدر بدون تحيز و فعال بالنسبة لمتوسط وتباين قطر القرص.

- **ايجاد التقدير النقطي لـ μ :**

* متوسط العينة $(\bar{X})$ هو أحسن مقدر غير متحيز و فعال بالنسبة لمتوسط المجتمع (μ)

$$\mu=\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{6.33+6.37+6.36+6.32+6.37}{5}=\frac{31.75}{5}=6.35$$

$$\Rightarrow \mu=\bar{X}=6.35$$

التحليل: احسن مقدر لـ (µ) هو$(\bar{x})$ و يساوي 6.35.

1-2- التقدير النقطي للتباين:

نرمز لتباين المتغيرة العشوائية (x) المعرفة على Ω بـ (σ^2) وهي معلمة مجهولة نريد البحث عن تقديره من أجل هذا نستخدم عينة ذات الحجم (n) ثم نحسب (σ^2) من العينة بالصيغة التالية:

$$s^2=\frac{n\sigma^2}{n-1} \Rightarrow s=\sqrt{\frac{n\sigma^2}{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

بحيث :

التباين يحسب من : σ^2

$$\sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

نعوضσ^2 في (1) ينتج :

$$s^2=\frac{\frac{n\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}}{n-1} \Rightarrow s^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

- **نتيجة هامة :**

مقدرσ^2 هو s^2 بحيث: $s^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

- **مثال توضيحي:**

نفس المثال والمطلوب ايجاد التقدير النقطي لـ σ^2

الحل:

* تباين العينة (s^2)هو أحسن مقدر غير متحيز و فعال بالنسبة لتباين المجتمع (σ^2)

$$\sigma^2 = s^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1} = \frac{(6.33-6.35)^2+(6.37-6.35)^2+\cdots+(6.37-6.35)^2}{4}$$

$= 0.00055$

$\Rightarrow \sigma^2 = s^2 = 0.00055$

$\Rightarrow \sigma = S = 0.023$

التعليق: احسن مقدر نقطي لتباين المجتمع (σ^2) هو تباين العينة (s^2) و يساوي 0.00055.

3-1- التقدير النقطي للنسبة:

في مجتمع إحصائي Ω نعتبر الميزة من المجتمع (c) بحيث هناك نسبة (π) من المجتمع الإحصائي تتميز بهذه الميزة والنسبة (1- π)لا تتميز بهذه الميزة لنفترض أن (π) هي المعلمة المجهولة المراد تقديرها من اجل هذا نأخذ عينات ذات الحجم (π) ثم نحسب النسبة (p̂) التكرار النسبي المرتبطة بنسبة العناصر من العينة التي تتميز بالخاصية المراد دراستها.

- **نتيجة هامة:**

مقدر (π) هو (p̂) يكون (p̂) مقدر جيد كلما كبر حجم العينة.

مثال توضيحي :

في دراسة ميدانية على عينة مكونة من 390 طالب بينت أن 80 منهم يختارون مادة الانجليزية كمادة أجنبية أولى.

المطلوب : قدر عدد الطلبة في الدفعة الذين يختارون مادة الانجليزية كمادة أجنبية أولى.

الحل:

مقدر π هو $\hat{p}$

π : نسبة الطلبة الذين يختارون مادة الانجليزية كمادة أجنبية أولى في الدفعة.

$\hat{p}$: نسبة الطلبة الذين يختارون مادة الانجليزية كمادة أجنبية أولى في العينة.

$$\hat{p} = \frac{80}{390}$$

$$=0.2051$$

التعليق: احسن مقدر نقطي للمعلمة (π) هي ($\hat{p}$) و تساوي 20.51 %.

1-4- شروط التقدير النقطي:

هناك 03 شروط يجب أن تتحقق حتى نقول عن مقدر $\hat{\vartheta}$ أنه مقدر جيد وفعال وغير منحاز للمقدر ϑ. **(نبيل جمعة خالد النجار، 2008، 116)**

- **عدم الانحياز:** نقول عن $\hat{\vartheta}$ أنه مقدر ل ϑ غير منحاز إذا تحقق الشرط التالي: $\vartheta = E(\hat{\vartheta})$
- **الفعالية:** إذا كان لدينا ϑ_1 و ϑ_2 مقدرين غير منحازين ل ϑ فان ϑ_2 مقدر أكثر فعالية من ϑ_2 إذا تحقق الشرط التالي:

$$V(\vartheta_1) \leq V(\vartheta_2)$$

- **الكثافة:** نقول عن $\hat{\vartheta}$ أنه مقدر مكثف إذا تساوى والمقدر ϑ عندما تكبر حجم العينة:

$$\lim_{n \to \infty} p(\hat{\vartheta} = \vartheta) = 1$$

مثال توضيحي:

تحقق من شروط التقدير النقطي للمقدر μ وهو $\bar{x}$

$x \sim N(\mu, \sigma^2)$

➢ **شرط عدم الانحياز:**

$E(\hat{\vartheta}) = \vartheta \Rightarrow E(\bar{x}) = \mu$

$E(\bar{x}) =) E(\frac{\sum xi}{n}) = \frac{1}{n} E\sum (xi)$

$= \frac{1}{n} \sum E(xi)$

$= \frac{1}{n} \sum \mu \qquad (\sum \mu = \mu_1 + \ldots\ldots \mu_n)$

$= \frac{n}{n} \mu$

$= \mu$

* إذا $\bar{x}$ هو مقدر لـ μ غير منحاز

➢ **شرط الفعالية:**

لنفترض أن:

$\vartheta_1 = \bar{x}$

$\vartheta_2 = x_i$

$\left.\begin{array}{l} E(\bar{x}) = \mu \\ E(x_i) = \mu \end{array}\right\}$ المقدرين غير منحازين

نعلم أن :

$V(x_i) = \sigma^2$ و $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$V(\bar{x}) \leq V(x_i)$

$$\frac{\sigma^2}{n} \leq \sigma^2$$

* إذا $(\bar{x})$ مقدر أكثر كثافة فعالية من x_i لتقدير μ

- **شرط الكثافة:**

نقول عن $\bar{x}$ مقدر مكثف ل μ لان:

$$\lim_{n\to\infty} p(\vartheta = o)$$

كلما كبر حجم العينة يتساوى = μ $\bar{x}$

$$\lim_{n\to\infty} p(\bar{x} = \mu)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} V(\bar{x}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^2}{n} = 0$$

- **النتيجة:** $\bar{x}$ هو مقدر مكثف لـ μ

مثال:

أخذت عينة عشوائية $x_1 \ldots\ldots x_4$ من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه δ^2

أي المقدرات لتقدير μ التالية غير متحيزة : $\bar{x}$, $\frac{x_2 + x_3}{2}$, X_1,

الحل:

- **شرط عدم الانحياز:**

$$E(\hat{\vartheta}) = \vartheta$$

1- $E(X_1) = \mu$

2- $E\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[E(x_2)+E(x_3)\right]$

$$=\frac{1}{2}[\mu+\mu]$$

$$=\mu$$

$E(\bar{x})=\mu$

- **النتيجة :** جميع المقدرات غير منحازة

➢ **شرط الفعالية:**

1- $V(X_1)=\sigma^2$

2- $V\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)=\frac{1}{4}\left[v(x_2)+v(x_3)\right]$

$$=\frac{1}{4}[2\sigma^2]$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}$$

3- $V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$

$$\frac{\sigma^2}{n}\le\frac{\sigma^2}{2}<\sigma^2$$

- **النتيجة:** أفضل مقدر ل μ هو $\bar{x}$.

5-1- طرق إيجاد المقدرات النقطية:

لإيجاد المقدرات النقطية لمعالم المجتمع (μ ,σ^2) هناك مايسمى بطريقة العزوم وما يسمى بدالة التشابه الأقصى:

➢ **-طريقة العزوم The Method of Moments:**

طريقة العزوم من أقدم طرق التقدير النقطي وأبسطها. والعزوم حول الصفر (وحول الوسط الحسابي أيضا) للمجتمعات هي دوال في معالم هذه المجتمعات بينما العزوم حول الصفر (أو

الوسط الحسابي) للعينات ليست دوال بهذه المعالم وإنما هي عبارة عن قيم يمكن حسابها من بيانات العينة. وطريقة العزوم في التقدير مبنيــة علــى افتراض أن العزوم حول الصفر للعينة مقدرات جيدة للعزوم حول الصفر للمجتمع فإذا فرضنا أن العزم (k) حول الصفر للمجتمع وللعينة على التوالي كما يلي: **(شفيق العتوم،2008، 349).**

$$\mu'_k = E(X^k) \quad ; k = 1,2,\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$m'_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n} \; ; k = 1,2,\ldots\ldots \qquad (2)$$

و بمساواة (μ'_k) من (1) بـ (m'_k) من (2) وحل المعادلة او المعادلات الناتجة فإننا تحصل على مقدر (او مقدرات) العزوم للمعلمة (او المعالم) التي نقدرها. و يكون عدد المعادلات التي نكونها مساويا لعدد هذه المعالم.

مثال :

إذا كان المتغير المتصل (X) له دالة كثافة احتمال على الشكل التالي:

$$f(x;\vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta k} \quad ; \quad x \geq 0$$

بمعلمة واحدة غير معلومة (ϑ) والمطلوب تقديرها بطريقة العزوم، فأننا نختار عينة عشوائية ($x_1\ldots\ldots x_n$) من هذا المجتمع الأسي ويكون:

$$\mu'_1 = \int_0^{\infty} x\, \vartheta e^{-\vartheta k}\, dx$$

$$= \frac{1}{\vartheta}$$

$$m'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{x}$$

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

➢ **طريقة تشابه الأقصى (الإمكان الأكبر): Maximum Likelihood Methods**
(شفيق العتوم،2008، 349).

لتكن لدينا $(x_1 \ldots\ldots x_n)$، بحيث: $_i \sim f(\vartheta)$

نريد تقدير ϑ باستعمال دالة التشابه الأقصى نتبع الخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى**: صياغة دالة التشابه الأقصى والتي تعطى بالصيغة التالية:

$$L(\vartheta) = f(x_1)f(x_2) \ldots \ldots \ldots \ldots f(x_n)$$

$$L(\vartheta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

- **الخطوة الثانية**: نبحث عن$\hat{\vartheta}$ التي تعظم$L(\vartheta)$

$$\text{MAX } L(\vartheta) \Leftrightarrow \text{MAX } \log L(\vartheta)$$

نحسب المشتقة الجزئية ونعدمها :

$$\frac{\partial \, log L(\vartheta)}{\partial \;\vartheta} = 0$$

- **الخطوة الثالثة**: **(الاختبار)**

$$\frac{\partial^2 \, log L(\vartheta)}{\partial^2 \;\vartheta} < 0$$

مثال:

ليكن لدينا $(x_1 \ldots\ldots x_n)$عينة من توزيع طبيعي بحيث: $x_i \sim N(\mu, 1)$

المطلوب : باستخدام طريقة التشابه الأقصى اوجد مقدر لـ μ

الحل:

- **الخطوة الأولى**: صياغة دالة التشابه الأقصى

$L(\mu) = f(x_1)f(x_2) \ldots\ldots\ldots\ldots. f(x_n)$

$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

نعلم أن:

$$f(x_i)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\, exp^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mu)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\delta^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots. \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mu)= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n exp^{\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- **الخطوة الثانية**: نبحث عن $\hat{\mu}$ التي تعظم μ

$MAX\ L(\mu) \Leftrightarrow MAX\ \log L(\mu)$

$$MAX\ L(\mu) = \log\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n exp^{\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2}}\right]$$

$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n + log exp^{\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= n\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\delta^2}$$

* نحسب المشتقة الجزئية ونعدمها :

$$\frac{\partial\, log L(\mu)}{\partial\ \mu} = 0 \Leftrightarrow 0- \frac{1}{2}\left[\sum(x_i - \mu)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\sum(x_i - \mu)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum(x_i - \mu)^2\right]=0$$

$\Leftrightarrow \sum(x_i - \mu)=0 \Rightarrow \sum x_i - \sum \mu=0$

$\Rightarrow \sum x_i = n\,\mu \Rightarrow \hat{\mu}= \frac{\sum x_i}{n}$

$\Rightarrow \hat{\mu}= \bar{x}$

النتيجة: مقدر μ هو $\bar{x}$

2- التقدير بالمجال :

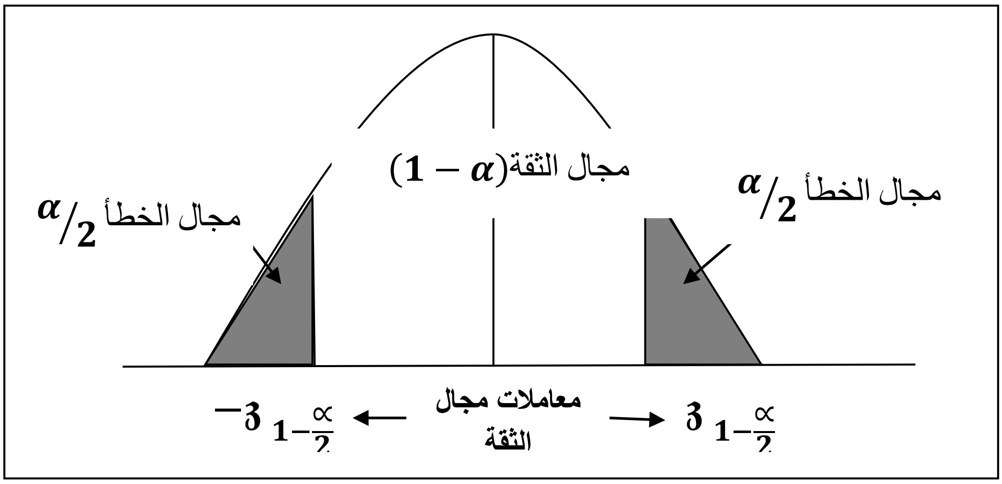
لقد ذكرنا سابقا أننا لا نتوقع الحصول على تقدير لمعلمة المجتمع بـدون خطأ بهما كان هذا التقدير جيدا، وبعبارة أخرى ليس من المحتمل أن تحصل على تقدير يقدَر معلمة المجتمع تماما. و مع أن دقة التقدير تزداد بزيـادة حجـم العينة فإنـه ليـس هناك أي سبب يبرر إمكانية الحصول على تقدير يقوم بتقدير معلمـة المجتمع بـدون خطأ. أي أن قيمته تساوي قيمة معلمة المجتمع بالضبط، ولذلك فإنه من المرغوب فيه إعطاء فترة معينة تتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها. إن مثل هذه الفترة تسمى فترة تقدير أو فترة ثقة.(**محمد صبحي ابو صالح، 2009، 297)**

عموما عند تقدير معالم المجتمع نستخدم التقدير بالمجال لأنه يضمن معلومات أكثر مقارنة بالتقدير النقطي، بحيث يحدد التقدير بالمجال المعلمة عن طريق مجال معين باحتمال فنكتب $\vartheta \in [a\,,b]$ ويسمى هذا الاحتمال بمستوى الثقة

2-1- خطوات التقدير بالمجال:

او يمكن اعتبارها أهم القواعد لتقدير معالم المجتمع $(\mu, \sigma^2, \prod,)$ باستعمال مجال الثقة، و هي متمثلة فيما يلي:

- تحديد التقدير النقطي المراد البحث عنه مثلا (مقدر μ هو $\bar{x}$)
- تحديد مجال الثقة (C)، تحديد مجال الخطأ(α)
- تحديد معاملات مجال الثقة، تحديد حدود مجال الثقة



ملحق رياضي:

جدول رقم(III-1) يمثل القيمة الجدولية لـ$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ حسب مستوى الثقة

C	$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
0.9	1.64
0.95	1.96
0.99	2.57
0.995	2.81
0.998	3.08

2-2- التقدير بالمجال للمتوسط (μ) :

نفرق بين الحالات التالية:

- **الحالة الأولى**: تباين المجتمع معلوم ^{2}

نستخدم القاعدة التالية :

$$\boldsymbol{\mu} \in \overline{\boldsymbol{x}} \mp \mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}} \boldsymbol{\sigma}_{\overline{\boldsymbol{x}}}$$

بحيث:

$\mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}$**:** تقرأ من جدول القانون الطبيعي.

$\boldsymbol{\sigma}_{\overline{\boldsymbol{x}}}$**:** انحراف المعياري لمتوسط العينة بحيث يساوي:

$$\sigma_{\bar{x}} = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \\ \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \end{cases}$$

- **البرهان :** يمكن استنتاج هذه القاعدة من البرهان التالي:

نعلم أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي:

$$X \backsim \mathrm{N}\,(\mu_x, \sigma_x^2) \Rightarrow \bar{x} \backsim \mathrm{N}\,(\mu_x, \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{n}) \Rightarrow \frac{(\bar{x} - \mu_x)}{\sigma_{\bar{x}}} \backsim \mathrm{N}\,(0,1)$$

ومنه فإن احتمال التقدير بالمجال يساوي:

$$p\left(-\mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}} \leq \frac{(\bar{x} - \mu_x)}{\sigma_{\bar{x}}} \leq \mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow p\left(-\mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}\sigma_{\bar{x}} \leq (\bar{x} - \mu_x) \leq \mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}\sigma_{\bar{x}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow p\left(-\bar{x} - \mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}\sigma_{\bar{x}} \leq -\mu_x \leq -\bar{x} + \mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}\sigma_{\bar{x}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow p\left(\overline{x} - \mathfrak{z}_{\,\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}\sigma_{\bar{x}} \leq \mu_x \leq \overline{x} + \mathfrak{z}_{\,\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}\sigma_{\bar{x}}\right) = 1 - \alpha$$

ومنه فإن توقع المجتمع محصور بين : $(\overline{x} - \mathfrak{z}_{\,\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}}\sigma_{\bar{x}})$ و$(\overline{x} + \mathfrak{z}_{\,\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}}\sigma_{\bar{x}})$

بحيث تسمى بحدود مجال الثقة واختصار نطبق القاعدة التالية :

$$\in \ \boldsymbol{\overline{x}} \mp \mathfrak{z}_{\,\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}}\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}}\boldsymbol{\mu}$$

وعليه فإن كل القواعد التي ستأتي في هذا الفصل ستعالج بنفس الطريقة.

- **الحالة الثانية:** تباين المجتمع ^{2} مجهول وn كبيرة

نستخدم القاعدة التالية:

$$\boldsymbol{\mu} \in \ \boldsymbol{\overline{x}} \mp \mathfrak{z}_{\,\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}}\boldsymbol{\widehat{\sigma}_{\bar{x}}}$$

مع العلم أن :

$$\boldsymbol{\widehat{\sigma}_{\bar{x}}} = \begin{cases} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \\ \dfrac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \end{cases}$$

$$S^2 = \frac{\Sigma(\mathrm{xi}-\bar{x})^2}{\mathrm{n}-1}$$

- **الحالة الثالثة:** تباين المجتمع ^{2} مجهول و n صغيرة

نستخدم القاعدة التالية:

$$\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\overline{x}} \mp \ \boldsymbol{t}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}}\,\boldsymbol{\widehat{\sigma}_{\bar{x}}}$$

بحيث:

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$**:** تقرأ من جدول ستيودنت تحت درجة حرية (n-1)

المثال 01:

صنعت سبيكة لاستعمالها في احد أنواع الصواريخ و أخذت قياسات قوة السبيكة على 40 قطعة منها فوجد أن الوسط الحسابي هو 37.8 .

المطلوب: اوجد مجال الثقة لمعدل قوة السبيكة عند مستوى ثقة 99 %. اذا علمت ان الانحراف المعياري للمجتمع هو 2.8.

الحل:

$$B1 \leq \mu \leq B2$$

لدينا:

$n = 40 > 30 \quad , \bar{x} = 37.8 \quad , \quad \sigma^2 = (2.8)^2$

$c = 99\% \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = 1\%$

نطبق القاعدة الأولى لأن تباين المجتمع معلوم :

$$\mu \in \bar{x} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}}$$

نحسب :

$$* \ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{2.8}{\sqrt{40}} = 0.44$$

لدينا :

$$* \ z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.01}{2}} = z_{0.995} = 2.57$$

$$* \ \bar{x} = 37.8$$

$\mu \in 37.8 \mp 2.57\ (0.44)$

$\mu \in 37.8 \mp 1.13$

$\mu \in [36.67, 38.93]$

التعليق: مجال الثقة لمعدل قوة السبيكة عند مستوى ثقة 99 % هو محصور ما بين 36.67 و 38.93.

مثال 02:

سحبت عينة عشوائية من 10 بطاريات فكان متوسطها الحسابي 5 ساعات و انحراف معياري 1 سا من خط إنتاج من المعروف أنه ينتج بطاريات عمرها موزع طبقا للتوزيع الطبيعي.

- اوجد مجال ثقة متوسط عمر البطاريات المنتجة من المصنع عند مستوى ثقة 95 %.

الحل:

لدينا:

$\bar{x}= 5$ $\quad$ $s =1$

$n=10< 30$ $\quad$ $c= 95\%$ $\quad$ $\alpha =5\%$

بما أن انحراف المجتمع مجهول و $(n=10< 30)$ نطبق القاعدة التالية :

$$\mu \in \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

نبحث عن $t_{\frac{\alpha}{2}}$ عند درجة حرية *9*

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0.05}{2}} = t_{0.025} = 2.262$

$$\mu \in 5 \pm 2.262 \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\Rightarrow \mu \in 5 \pm 2.262(0.3164)$

$\Rightarrow \mu \in 5 \pm 0.7156$

$\Rightarrow \mu \in [4.2844 ; 5.7156]$

التعليق: متوسط عمر البطاريات المنتجة من المصنع عند مستوى ثقة 95 % هو محصور بين 4.2844 و5.7156.

مثال 3:

في دراسة لقياس قوة المحركات المصنوعة من طرف المصنع اخذنا عينة عشوائية من 5 محركات فكانت النتائج كما يلي : 3550، 3560، 3580، 3600، 3620.

1- اوجد التقدير النقطي لمعالم المجتمع: المتوسط الحسابي و التباين.

2- جدد مجال الثقة لمتوسط قوة المحركات المصنوعة من طرف المصنع عند مستوى خطأ 5 %.

3- اذا علمت ان تباين المجتمع يساوي 900، حدد مجال الثقة لمتوسط قوة المحركات المصنوعة من طرف المصنع عند مستوى خطأ 10 %.

الحل :

- **ايجاد التقدير النقطي لـ** μ ، σ^2

1) $\mu=\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{3550+3560+\cdots....+3620}{5}=3582$

2) $\boldsymbol{\sigma^2=s^2=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}=\frac{(3550-3582)^2+(3560-3582)^2+\cdots+(3620-3582)^2}{4}=}$ **820**

$\Rightarrow\ S=28.63$

- **ايجاد التقدير بالمجال لـ** μ $\quad\alpha=0.05$

نطبق قاعدة التقدير بالمجال للمتوسط التالية:

$$\mu\in\bar{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$$

نبحث عن $t_{\frac{\alpha}{2}}$ عند درجة حرية 4

$$t_{\frac{\alpha}{2}}=t_{\frac{0.05}{2}}=t_{0.025}=2.7764$$

$$\mu\in 3582\pm 2.7764\ \frac{28.63}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \mu \in 3582\ \pm\ 2.7764.(12.83)$$

$$\Rightarrow \mu \in 3582\ \pm\ 35.62$$

$$\Rightarrow \mu \in [3546.38\,;3617.62]$$

* **التعليق :** مجال الثقة لمتوسط قوة المحركات المصنوعة من طرف المصنع عند مستوى خطأ 5 % هو محصور ما بين : 3546.38 و 3617.62.

- **ايجاد التقدير بالمجال لـ** μ بحيث ان :

$$\sigma^2 = 900 \quad \text{،} \quad \alpha = 0.10$$

نطبق قاعدة التقدير بالمجال للمتوسط التالية:

$$\mu \in \bar{X}\ \pm\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ .\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

بحث عن $1-\frac{\alpha}{2}$:

$$1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.10}{2} = 0.95$$

من الجدول الطبيعي المعياري نجد: $Z_{0.95} = 1.65$

$$\mu \in 3582 \pm\ 1.65\ \frac{30}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \mu \in 3582\ \pm\ 1.65.(13.45)$$

$$\Rightarrow \mu \in 3582\ \pm\ 22.19$$

$$\Rightarrow \mu \in [3559.81\,;3604.19]$$

* **التعليق :** مجال الثقة لمتوسط قوة المحركات المصنوعة من طرف المصنع عند مستوى خطأ 5 % هو محصور ما بين : 3559.81 و 3604.19.

2-3- التقدير بالمجال للنسبة (π) :

نفس المفهوم المطبق عن التقدير بالمجال للتوقع (μ) يمكن تطبيقه في التقدير بالمجال للنسبة (π). وذلك لان النسبة (π) ما هي إلا صورة من صور المتوسط (μ)

و لذلك تعطى القاعدة التالية للتقدير بالمجال النسبة

$$\pi \in P \mp \mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}\sigma_{\hat{p}}$$

بحيث:

$$* \ \sigma_{\hat{p}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{pq}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{في حالة المجتمعات المحدودة } n \geq N5\% \\ \sqrt{\frac{pq}{n}} & \text{في حالة المجتمعات الكبيرة } n \leq N5\% \end{cases}$$

مثال :

قامت شركة بعملية سبر للآراء في منطقة معينة هدفه تحديد نسبة الاشخاص الذين يقبلون التجول بالدراجة الهوائية و ذلك لحماية البيئة من الغازات المنطلقة من السيارات. فأخذت عينة عشوائية من 1500 شخص فوجدت ان 552 شخص مستعدون لركوب الدراجة الهوائية.

- ما هو مجال الثقة لنسبة الاشخاص الذين يفضلون ركوب الدراجة الهوائية، عند درجة معنوية 1%.

حل المثال :

$$\propto = 1\% \Rightarrow c = 99\%$$

N=100> 30 $\qquad$ $P=\frac{552}{1500}=0.368$

نطبق القاعدة التالية :

$$\pi \in P \mp \mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}\sigma_{\hat{p}}$$

$$\pi \in P \mp \mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

نعلم ان عند $\qquad$ c =99% $\qquad$ $\mathfrak{z}_{1-\frac{\propto}{2}}=2.57$

$\sigma_{\hat{p}}$ = $\sqrt{\frac{(0.368)(0.632)}{1500}}$ =0.012

$\pi \in 0.368 \ \pm (2.57)(0.012)$

$\pi \in 0.368 \ \pm 0.030$

$\pi \in [0.338 \,, 0.398]$

التعليق : نسبة الاشخاص الذين يفضلون ركوب الدراجة الهوائية، عند درجة معنوية 1%.

يتراوح بين 33.8 % و39.8%

2-4- التقدير بالمجال للتباين σ^2 :

ليكن لدينا مجتمع يتبع توزيع ما لكن بتباين مجهول ونريد أن نقدر هذا التباين.

نعلم من الفصل الأول (توزيع المعاينة) أن: $\frac{(n-1)\, s^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{(n-1)}$ وذلك من أجل احتمال$(1-\alpha)$ ودرجة حرية (n-1) وبالتالي فإن:

$$p\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)\, s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$p\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)\, s^2} \leq \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

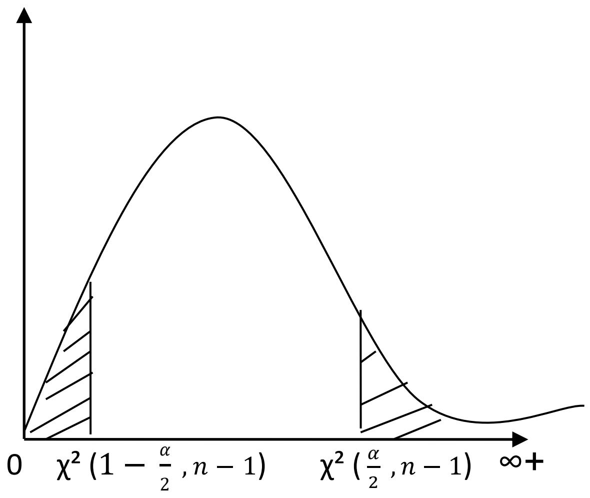
$$p\left(\frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

وبالتالي فإن التقدير بالمجال للتباين يعطى بالصيغة التالية:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \,, \qquad \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

وإذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي فإن الصيغة تكون كالآتي:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{\mathrm{n}\, s^2}{\chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}}\ , \qquad \frac{\mathrm{n}\, s^2}{\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$



مثال :

ينتج مصنع ادوية نوعا من العلاج يحتوي على مادة فعالة و يجب ان تكون كميتها محددة بشكل دقيق. و لدراسة مدى دقة المصنع في اضافة هذه الكمية الى كل حبة من حبوب هذا العلاج قام المسؤولون في هذا المصنع بتحليل عينة من 30 حبة فوجدوا ان الانحراف المعياري لكمية هذه المادة في هذه الحبوب يساوي 1.3 ملغ.

المطلوب: أوجد التقدير بالمجال لتباين (σ^2) لكمية هذه المادة في الحبوب المنتجة من المصنع عند مستوى خطأ $\alpha = 5\%$.

الحل:

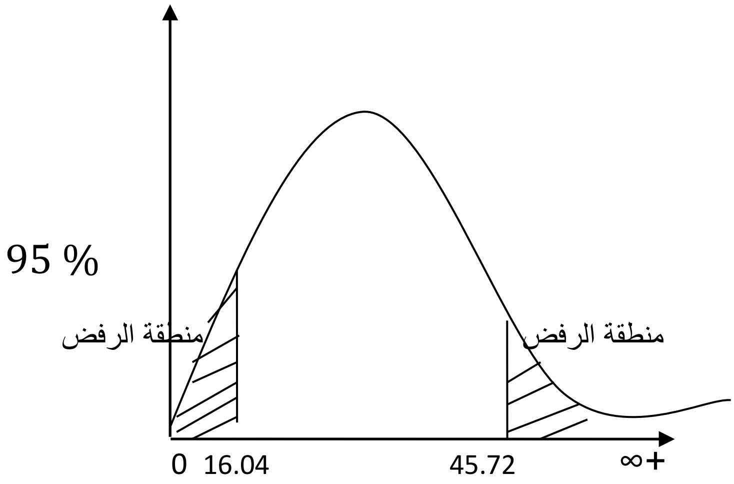
n=30 c =95 % $\alpha = 5\%$ S= 1.3

$$P\ \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

من جدول كاي تربيع تحت درجة حرية (29) نقرأ :

$$\chi^2{}_{0.025} = 45.72$$

$$\chi^2{}_{0.975} = 16.04$$



$$P\left(\frac{(29)(1.3)^2}{45.72} \leq б^2 \leq \frac{(29)(1.3)^2}{16.04}\right) = 95\%$$

$$P\,(1.07 \leq \sigma^2 \leq 3.055) = 95\%$$

* **التعليق:** تباين (σ^2) كمية هذه المادة الفعالة في الحبوب المنتجة من المصنع عند مستوى خطأ $\alpha = 5\%$ هي تتراوح ما بين 1.07 ملغ و 3.055 ملغ.

5-2- التقدير المجال للفرق بين متوسطين (-$\overline{yx}$):

بالنسبة للتقدير بالمجال للفرق بين متوسطين سنستخدم القواعد التالية وذلك حسب طبيعة انحراف المجتمعين (معلوم أو مجهول) وحسب حجم العينتين (كبيرة أو صغيرة مقارنة بالحجم 30).

يمكن أن نميز بين قاعدتين في جميع الحالة الموجودة:

➢ **القاعدة الأولى:** في هذه القاعدة يتم استخدام القانون الطبيعي.

- في حالة $^{2}_{1}$ و σ_2^2 معلومتين.
- في حالة $^{2}_{1}$ و σ_2^2 مجهولتين و n_1 ، n_2 كبيرتين.

$$(\mu_1 - \mu_2) \in (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\frac{\propto}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

➢ **القاعدة الثانية:** في هذه القاعدة يتم استخدام قانون ستودنت

في حالة σ_1^2 و σ_2^2 مجهولتين ولكن متساويتين.

$$(\mu_1 - \mu_2) \in (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \; s \; \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

بحيث :
$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

مثال :

أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي تباينه 25، و أخرى حجمها 10 من مجتمع طبيعي مستقل عن الأول تباينه 47 ، فإذا كان الوسط الحسابي للعينة الأولى هو 47 و 32 للعينة الثانية اوجد :

المطلوب: مجال الثقة للفرق بين الوسطين $(u_A - u_B)$ عند مستوى خطأ 5 %.

الحل:

لدينا:

$n_A = 9$ $\quad$ $\bar{x}_A = 47$ $\quad$ $s_A^2 = 25$

$n_B = 10$ $\quad$ $\bar{x}_B = 32$ $\quad$ $s_B^2 = 47$

$\alpha = 5\% \quad \Rightarrow \quad C = 95\%$

$\sigma_A = ?$ $\quad$ $\sigma_B = ?$

$$n_A < 30, \qquad n_B < 30$$

نطبق القاعدة التالية :

$$(\mu_1 - \mu_2) \in (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \; s \; \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

مع العلم : $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

نحسب: s^2

$$s^2 = \frac{(9-1)(25)+(10-1)(47)}{(9+10)-2} = 36.46 \Rightarrow S = 6.03$$

نحسب: $t_{\frac{\propto}{2}}$

من جدول ستيودنت وتحت درجة حرية 17 نجد : $t_{0.025} = 2.11$

$\bar{x}_A - \bar{x}_B = 47-32 = 15$

$$(\mu_1 - \mu_2) \in [15 \pm (2.11)\ (6.03)\ \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{10}}]$$

$$(\mu_1 - \mu_2) \in [15 \pm 5.83]$$

$$(\mu_1 - \mu_2) \in [9.17 \ ;\ 20.83]$$

التعليق: مجال الثقة للفرق بين الوسطين $(u_A - u_B)$ عند مستوى خطأ 5 %. هو محصور ما بين 9.17 و 20.83.

6-2- التقدير بالمجال للفرق بين نسبتين$(\pi_1 - \pi_2)$:

نستخدم القاعدة التالية :

$$(\pi_1 - \pi_2) \in (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{1-\frac{\propto}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}$$

مثال:

لتقدير الفرق في نسبة النجاح بين الإناث و الذكور، اخذت عينتين متكونتين من 80 ذكر و60 أنثى فكانت نسبة النجاح عند الذكور هي 40% و بالنسبة للإناث 30%.

العمل المطلوب:

أحسب مجال الثقة للفرق بين نسبتي النجاح بين الذكور و الاناث عند مستوى ثقة 95 % .

الحل:

لدينا

$\hat{p}_1 = 0.4$ $\qquad$ $n_1 = 80$

$\hat{p}_2 = 0.3$ $\qquad$ $n_2 = 60$

$\propto = 5\% \quad \Rightarrow \quad c = 95\% \quad \Rightarrow \quad z_{1-\frac{\propto}{2}} = 1.96$

- نطبق القاعدة التالية :

$$(\pi_1 - \pi_2) \in (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{1-\frac{\propto}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

$$\pi_1 - \pi_2 \in (0.4 - 0.3) \mp 1.96\sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{80} + \frac{(0.3)(0.7)}{60}}$$

$$\pi_1 - \pi_2 \in [0.25\ ;\ 0.5\ ]$$

* **التعليق:** مجال الثقة للفرق بين نسبتي النجاح بين الذكور و الاناث عند مستوى ثقة 95 % تكون محصورة بين 25 % و 50%.

2-7- تمارين محلولة:

➢ **التمرين 01:**

مصنع لإنتاج قطع غيار السيارات، نفترض أن (x) يمثل طول قطع الغيار يتبع توزيع طبيعي، أخذت عينة عشوائية حجمها 08 قطع فوجد أن متوسط طول القطع هو 12.16 سم بانحراف معياري 2.66 سم.

1- حدد مجال الثقة لمتوسط طول قطع الغيار المنتجة من المصنع عند مستوى ثقة 95 %؟

2- بافتراض أن تباين طول القطع المنتجة في المصنع يساوي 3 سم. فما هو مجال الثقة لمتوسط طول قطع الغيار المنتجة من المصنع عند مستوى خطأ 5% ؟

حل التمرين 01 :

n = 8 , $\bar{X}$= 12.16 , S= 2.66

1) ايجاد التقدير بالمجال لـ μ C= 0.95

نطبق قاعدة التقدير بالمجال للمتوسط التالية:

$$\mu \in \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

نبحث عن $\frac{\alpha}{2}$: *عند درجة حرية 7*

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{0.05}{2}} = t_{0.025} = 2.36$$

$$\mu \in 12.16 \pm 2.36 \frac{2.66}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow \mu \in 12.16 \pm 2.36.(0.94)$$

$$\Rightarrow \mu \in 12.16 \pm 2.21$$

$$\Rightarrow \mu \in [9.95 ; 14.37]$$

2) مجال الثقة لمتوسط طول قطع الغيار بافتراض ان تباين المجتمع يساوي 3

$\sigma = 3$ ، α = 0.05

نطبق قاعدة التقدير بالمجال للمتوسط التالية:

$$\mu \in \bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

نبحث عن $1-\frac{\alpha}{2}$:

$$1-\frac{\alpha}{2}= 1-\frac{0.05}{2}=0.975$$

من الجدول الطبيعي المعياري نجد: $Z_{0.95}=1.96$

$$\mu \in 12.16 \pm 1.96\,\frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow \mu \in 12.16 \pm 1.96.(1.06)$$

$$\Rightarrow \mu \in 12.16 \pm 2.07$$

$$\Rightarrow \mu \in [10.09 ; 14.23]$$

تمرين 02:

في دراسة لقياس نسبة الأملاح في مياه الشرب في إحدى المناطق وجد أنها تخضع للتوزيع الطبيعي، قام احد المخابر بتحليل 06 عينات من مياه الشرب فكانت نتائج التحليل كالأتي:

نسبة الأملاح	1.8	2.2	2.4	1.90	2	2.30

1- اوجد التقدير النقطي لمتوسط و تباين نسبة الأملاح في مياه الشرب في المنطقة المدروسة .

2- حدد مجال الثقة لمتوسط نسبة الأملاح في مياه الشرب في هذه المنطقة عند مستوى ثقة %95 .

3- بافتراض أن نسبة الأملاح في المنطقة محل الدراسة تخضع لتوزيع طبيعي بانحراف معياري0.30. حدد مجال الثقة لمتوسط نسبة الأملاح في مياه الشرب عند مستوى خطأ %10 ؟

➢ **حل التمرين 02 :**

$X \sim N(\mu, \sigma)$

1) ايجاد التقدير النقطي لـ μ ، σ^2

1) $\mu = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{1.8+2.2+2.4+1.9+2+2.3}{6} = 2.1$

2) $\sigma^2 = s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{(1.8-2.1)^2 + (2.2-2.1)^2 + \cdots + (2.3-2.1)^2}{5} = 0.056$

$\Rightarrow$ S = 0.2366

2) ايجاد التقدير بالمجال لـ μ C= 0.95

نطبق قاعدة التقدير بالمجال للمتوسط التالية:

$$\mu \in \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

نبحث عن $t_{\frac{\alpha}{2}}$ عند درجة حرية *5*

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0.05}{2}} = t_{0.025} = 2.571$$

$$\mu \in 2.1 \pm 2.571 \frac{0.2366}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \mu \in 2.1 \pm 2.571.(0.0965)$$

$$\Rightarrow \mu \in 2.1 \pm 0.2481$$

$$\Rightarrow \mu \in [1.8519 ; 2.3481]$$

3) *تحديد* مجال الثقة لمتوسط نسبة الأملاح في مياه الشرب عند مستوى خطأ 10%

$\sigma = 0.3$ ، $\alpha = 0.10$

نطبق قاعدة التقدير بالمجال للمتوسط التالية:

$$\mu \in \bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

بحث عن $_{1-\frac{\alpha}{2}}$:

$$1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.10}{2} = 0.95$$

من الجدول الطبيعي المعياري نجد: $Z_{0.95} = 1.65$

$$\mu \in 2.1 \pm 1.65 \frac{0.3}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \mu \in 2.1 \pm 1.65.(0.1224)$$

$$\Rightarrow \mu \in 2.1 \pm 0.2019$$

$$\Rightarrow \mu \in [1.8981 ; 2.3019]$$

- **تمرين 03:**

لاحظت إدارة الجامعة أنه في عينة من 100 طالب، 40 تحصلوا على الشهادة. تريد الجامعة إيجاد مجال نسبة الطلبة الذين يحصلون على الشهادة باحتمال قدره 95%.

- **حل التمرين 03:**

X: متغير عشوائي يمثل عدد الطلبة الذين تحصلوا على الشهادة في العينة.

$$\hat{P} = \frac{X}{\mathrm{n}} = \frac{40}{100} = 0.4\mathrm{n} = 100$$

نقدر قيمة p بـ $\hat{}$ أي p= 0.4

بما أن $\mathrm{n} \geq 30$ ، فتوزيع المعينة للنسبة $\hat{P}$ يتبع التوزيع الطبيع ، بمتوسط:

$$\mu_{\hat{P}} = P = 0.4$$

و إنحراف معياري:

$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.4(0.6)}{100}} = 0.0489$$

تقدير نسبة الطلبة الذين يحصلون على الشهادة داخل مجال يكون احتماله 95%.

$$P(P_1 < P < P_2) = 0,95$$

$$= P(P < P_2) - P(P < P_1) = 0,95$$

$$= P\left(Z < \frac{P_2 - 0.4}{0.0489}\right) - P\left(Z < \frac{P_1 - 0.4}{0.0489}\right) = 0,95$$

نفرض أن المساحة 95% محصورة بين $Z_1 = \frac{P_1 - 0.4}{0.0489}$ و $Z_2 = \frac{P_2 - 0.4}{0.0489}$ حيث

$Z_1 = -Z_2$ (Z_1وZ_2 متناظرتان)

$$P\left(Z < \frac{P_2 - 0.4}{0.0489}\right) - P\left(Z < \frac{P_1 - 0.4}{0.0489}\right) = 2P\left(Z < \frac{P_2 - 0.4}{0.0489}\right) - 1 = 0.95$$

$$\Longrightarrow P\left(Z < \frac{P_2 - 0.4}{0.0489}\right) = 0.975$$

من الجدول القانون الطبيعي المعياري نجد:

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{P_1 - 0.4}{0.0489} = -1,96 \\ Z_2 = \dfrac{P_2 - 0.4}{0.0489} = 1,96 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_1 = 0.3041 = 30.41\% \\ P_2 = 0.4958 = 49.58\% \end{cases}$$

* نسبة الطلبة الذين يحصلون على الشهادة بين 30.41% و 49.58% بإحتمال 95%.

➢ **التمرين 04 :**

مؤسسة لصنع و بيع أجهزة الخلاط الكهربائي، أجريت دراسة أخرى من طرف باحثين لـ 100 جهاز فوجد أن متوسط حياة الجهاز هو 1563 يوم بانحراف معياري 205 يوم.

1- حدد مجال الثقة لمتوسط حياة الجهاز المصنوع من طرف هذا المصنع عند مستوى معنوية 5 %.

2- اذا علمت انه تم إعادة هذه الدراسة على 18 جهاز فقط حدد مجال الثقة لمتوسط حياة الجهاز المصنوع من طرف هذا المصنع عند مستوى معنوية 10 %.

➢ **حل التمرين 04 :**

لدينا:

$\bar{x}$= 1563 s =205

n=100> 30 c= 95% α =5%

بما أن انحراف المجتمع مجهول و (n=10> 30) نطبق القاعدة التالية :

$$\mu \in \bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

نبحث عن $1-\frac{\alpha}{2}$:

$$1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.05}{2} = 0.975$$

من الجدول الطبيعي المعياري نجد: $Z_{0.95} = 1.96$

$$\mu \in 1563 \pm 1.96 \frac{205}{\sqrt{100}}$$

$$\Rightarrow \mu \in 1563 \pm 1.96(20.5)$$

$$\Rightarrow \mu \in 1563 \pm 40.18$$

$$\Rightarrow \mu \in [1522.82 ; 1603.18]$$

التعليق: متوسط حياة الجهاز المصنوع من طرف هذا المصنع عند مستوى معنوية 5 %.

هو محصور بين 1522.82 و1603.18.

2- لدينا:

n=18< 30 c= 90% α =10%

بما أن انحراف المجتمع مجهول و (n=18< 30) نطبق القاعدة التالية :

$$\mu \in \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

نبحث عن $t_{\frac{\alpha}{2}}$ عند درجة حرية *17*

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0.10}{2}} = t_{0.05} = 1.74$$

$$\mu \in 1563 \pm 1.74 \frac{205}{\sqrt{18}}$$

$$\Rightarrow \mu \in 1563 \pm 1.74(48.34)$$

$$\Rightarrow \mu \in 1563 \pm 84.11$$

$$\mu \in [1478.89 ; 1647.11] \Rightarrow$$

التعليق: متوسط حياة الجهاز المصنوع من طرف هذا المصنع عند مستوى معنوية 10 %.

هو محصور بين 1478.89و1647.11.

اختبار الفرضيات :

إن أحد فروع الإحصاء الاستنتاجي هو اختبار الفرضيات، فنحن في كثير من الأحيان لا نكتفي بتقدير معلمة المجتمع بأن نعطيها قيمة معينة أو نبني لها فترة ثقة معينة، بل نحتاج إلى اتخاذ قرار حول صحة فرضية معينة أو عدم صحتها، أي أننا نحتاج إلى اختبار الفرضيات المتعلقة بمعلمات المجتمع (π, σ^2, μ). وهذا ما سنقوم بدراسته بشكل مبسط في اختبار الفرضيات والتي تمت تسميتها هكذا لأنها تتعلق باختبار فرضية محددة عن معلمة واحدة مثل الوسط الحسابي أو نسبة النجاح. **(محمد صبحي ابو صالح، 2009، 334)**

وفي الواقع فإن اختبار الفروض الإحصائية يشبه إلى حد كبير الاختيارات العلمية، فالعالم يقوم بوضع صياغة لنظرية معينة ثم بعد ذلك يقوم باختبار هذه النظرية عن طريق المشاهدات. وفي اختبارات الفروض الإحصائية فإن القائم بالبحث الإحصائي يقوم بوضع فرض معين بالنسبة لمعلمة المجتمع ، فهو يفترض أن معلمة المجتمع تساوي قيمة نظرية معينة ، ثم بعد ذلك يقوم الباحث بسحب عينة عشوائية من هذا المجتمع ويقوم بمقارنة المشاهدات الناتجة من العينة بالافتراض النظري الذي وضعه فإذا كانت المشاهدات لا تتفق مع الافتراض النظري فهو يرفض هذا الافتراض ، أما إذا كانت المشاهدات تتفق مع هذا الاقتراض ، فإنه يقبله **.(امتثال و عادل، 2019، 94)**

1- مثال تمهيدي :

ينتج احد المصانع نوع معين من المسامير قطره 2 ملم. أراد احد التجار شراء شحنة من هذا النوع و لكنه يشك في ان قطر المسمار لا يتجاوز 1.6 ملم. و لهذا قرر اخذ عينة عشوائية مكونة من 1000 مسمار فاذا وجد أن متوسط قط هذه المسامير المصنوعة من طرف المصنع اكبر او تساوي 1.8 تعتبر مطابقة للمواصفات و بالتالي يقوم بتأكيد الطلبية، اما اذا كانت اقل فانه سيلغي طلبية الشراء بحجة ان هذه المسامير غير مطابقة للمواصفات. وفيما يلي جدولا يوضح كافة الحالات الممكنة :

جدول رقم (III-1) يوضح كافة الحالات الممكنة لنوعية المنت

نوعية المنتج / قرار التاجر	مطابقة للمواصفات	غير مطابقة للمواصفات
قبول ادعاء المصنع	القرار صحيح	قرار غير صحيح (1*)
رفض ادعاء المصنع	قرار غير صحيح (2*)	قرار صحيح

التعليق: لما يكون القرار غير صحيح يكون الخطأ مختلف حسب الحالة ففي الحالة الاولى(1*) سيقبل التاجر شراء شحنة غير مطابقة للمواصفات أما في الحالة الثانية (2*) فسيرفض شراء شحنة مطابقة للمواصفات.

- في الحالة الأولى سينتج عن هذا الخطأ دفع كلفة شراء شحنة لا تتطابق مع المعايير المفروضة على المنتج، مما سيكلف التاجر تحمل خسائر ناجمة عن عدم بيع و تسويق هذه الشحنة.
- أما في الحالة الثانية فليس هناك خسارة مالية و لكن ضياع على التاجر فرصة شراء شحنة مطابقة للمواصفات ربما يكون سعرها جيد للتاجر (تكلفة الفرصة الضائعة)
- **إحصائيا:** في هذا المثال نريد الاختبار بين فرضيتين ولذلك وضعنا حدا فاصلا هو (k=1.8) هاتين الفرضيتين هما :

$\boldsymbol{H_0}$: الفرضية المعدومة.

$\boldsymbol{H_1}$: الفرضية البديلة.

2- تعريف الاختبار: الاختبار هو طريقة تمكننا من الاختيار بين فرضيتين هما: H_0 و H_1 حيث: **(عبد الله فلاح المنيزل،2008، 26)**

H_0 : الفرضية المعدومة

H_1: الفرضية البديلة

هذا الاختبار يمكن أن يكون أحد الاختيارات الموضحة بالمصفوفة الذي يتبعه المقدر التالية:

جدول رقم (III-1) يوضح كافة الحالات الممكنة

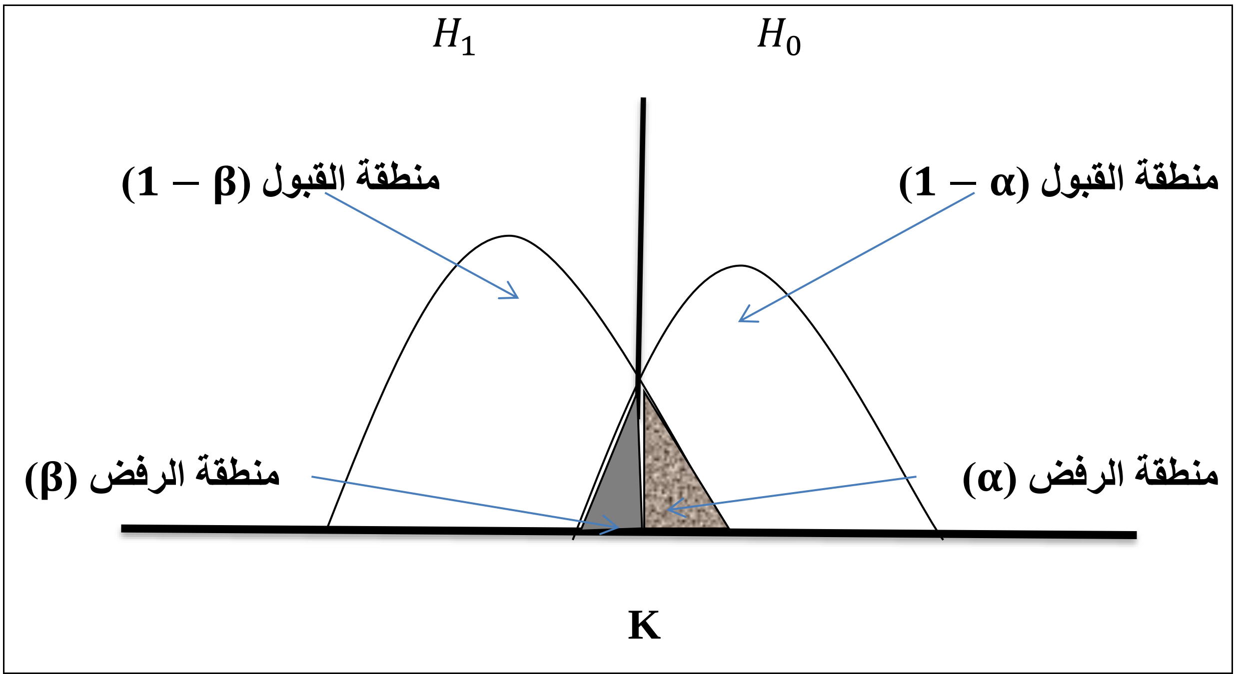
القرار / الحقيقة	H_0	H_1
H_0	قرار جيد α-1	قرار غير جيد α
H_1	قرار غير جيد β	قرار جيد β-1

بحيث:

α: الخطأ من النوع الأول   α-1:مستوى الثقة

β: الخطأ من النوع الثاني   β-1: قوة الاختبار

هذا الاختبار ما بين الفرضيتين ($_1$ وH_0) يركز على تحديد نقطة فاصلة على أساسها يتم اتخاذ أحد القرارات، هذه النقطة يرمز لها بـ (k)و الشكل التالي يوضح ذلك : **(حسن ياسين طعمة، 2015، 22).**



- **مصطلحات :**

* **k**: يفصل بين المنطقة H_0 و المنطقة H_1

* **α**: هي احتمال الخطأ في $_0$ (احتمال رفض H_0)

* **β**: هي احتمال الخطأ في $_1$ (احتمال رفض H_1)

* **α**: هي احتمال رفض $_0$ تحت H_0

* **β**: احتمال رفض $_1$ تحت H_1

* **w** : المنطقة الحرجة (منطقة رفض H_0 او قبول H_1)

* **احتمال رفض H_0** : $P_{H_0}(w) = \alpha$

* $\mathbf{P_{H_0}(\bar{w}) = \alpha\text{-}1}$: هي متممة $P_{H_0}(w) = \alpha$

* $\mathbf{PH_1(w) = \beta\text{-}1}$: احتمال قبول $_1$

* $\mathbf{PH_1(\bar{w}) = \beta}$: احتمال رفض $_1$

3- مراحل الاختبار :

- البحث عن مقدر المعامل الذي سيتم اختباره.
- نبحث عن صيغة القانون.
- تحديد المنطقة الحرجة و إيجاد الصيغة التي تكتب بها ومن ثم تحديد قيمة K

اتخاذ القرار بالنظر إلى المنطقة الحرجة. **.(امتثال و عادل، 2019، 94)**

4- تعريف المصطلحات المستخدمة في الاختبار:

4-1- تعريف إحصائية الاختبار:

تعريف احصائية الاختبار بانـها متغير عشوائي لها توزيع احتمالي معروف، وتستخدم لوصف العلاقة بين القيم النظرية المجتمع والقيم المحسوبية من العينة، وتعتمد احصائية الاختبار على ما سيتم اختباره من معلمات المجتمع المدروس، و لذلك فهي تختلف باختلاف الحالة المدروسة للمعلمة ، وتسمى عادة بإحصائية الاختيار المحسوبة، وتكون إحصاءات الاختبار على أنواع عدة نذكر منها (احصائية الاختبار (Z), احصائية الاختبار (T) احصائية الاختبار (F)، إحصاء الاختبار (X^2). **(محمد صبحي ابو صالح، 2009، 334)**

2-4- تعريف المنطقة الحرجة ((Critical Region) :

هي المنطقة التي عندها يتم رفض الفرضية العديمة ($\mathrm{H_0}$) والتي تقع فيها قيمة احصائية الاختبار المحسوبة. بمعنى آخر، تعرف بانها: جزء من المساحة تحت منحني دالة التوزيع الاحتمالي لإحصائية الاختبار، حيث إن هذه المساحة تمثل احتمال رفض الفرضية العديمة ($\mathrm{H_0}$) عندما تكون هذه الفرضية صحيحة. مما تقدم يتضح بأن مساحة المنطقة تحت منحنى دالة التوزيع الاحتمالي لإحصائية الاختبار تمثل (α) في حالة الاختبار من جانب واحد، أو تمثل ($\frac{\alpha}{2}$) في حالة الاختيار من جانبين.**(حسن ياسين طعمة، 2015، 27).**

3-4- تعريف القيم الحرجة:

تعرف القيم الحرجة (Critical Values) بانها: قيم جدولية يتم استخراجها من قيم التوزيع الاحتمالي لإحصائية الاختيار، والتي تتحدد بموجبها مناطق رفض الفرضية العديمة ($\mathrm{H_0}$) ومناطق قبولها، ولا ضوء ما تقدم تعتمد القيم الحرجة على ما يأتي:

- مستوى المعنوية (α)
- الفرضية البديلة ($\mathrm{H_1}$) ، كأن تكون ذات جانب واحد او جانبين.
- التوزيع الاحتمالي لاحصائية الاختبار، كأن يكون أحد التوزيعات الآتية (F , x^2,T ,Z)
- عدد درجات الحرية، فيما إذا كان التوزيع الاحتمالي احد توزيعات المعانية (F , x^2,T) **(حسن ياسين طعمة، 2015، 27)**

إن القيم الحرجة غالباً ما تكون محددة في جداول خاصة بالتوزيع الاحتمالي لإحصائية الاختبار، والتي يمكن إيجادها اعتمادا على مستوى المعنوية (α) ودرجات الحرية (df) في حالة توزيعات المعاينة، ونوع الفرضية البديلة (H_1) كأن تكون من جانب واحد أو جانبين.

5- اختبار الفرضيات للمتوسط μ:

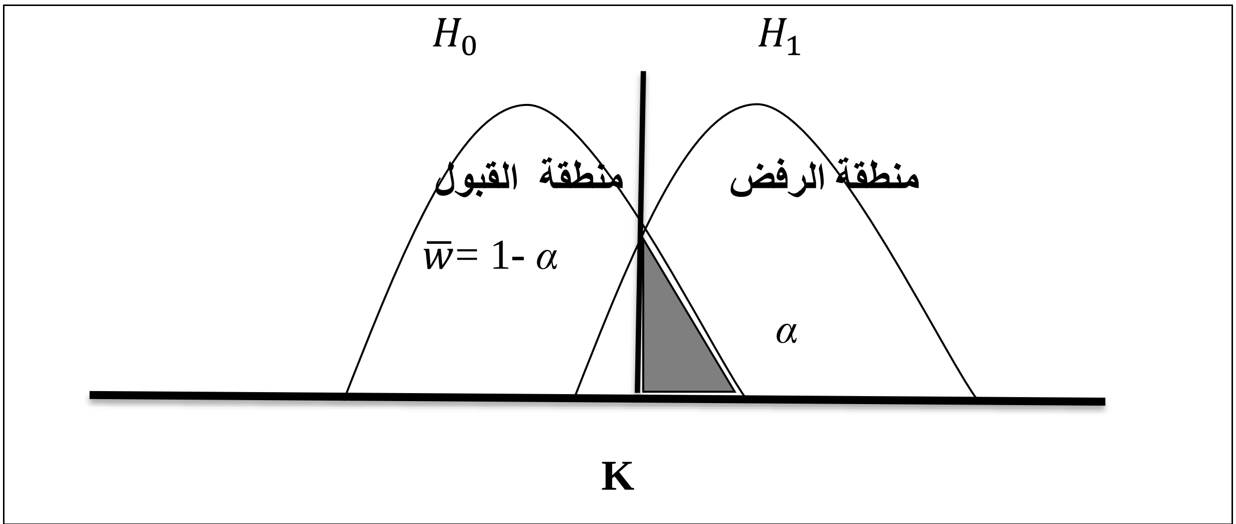
الغرض من اختبار المتوسط هو اختبار فرضية أن متوسط المجتمع μ يساوي قيمة ما μ_0، وللقيام بهذا الاختبار نقوم باختيار عينة عشوائية ونحسب متوسطها $\bar{x}$ ثم نقارنه مع القيمة μ_0 الحرجة لاتخاذ القرار**(صلاح العيادي صالحين ، 2004، 94).**

في اختبار المتوسط نميز بين حالتين هما :

1-5- اختبار المتوسط مع انحراف المجتمع (σ) معروف: وهنا نميز الحالات التالية :

➢ **اختبار ذو جانب أيمن:**

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$



* **تحديد المنطقة الحرجة :** W = { $\bar{x} > k$ }

حيث أن W : المنطقة الحرجة (منطقة رفض H_0 و قبول H_1)

نعلم أن : $P_{H_0}(W) = \alpha$

و نعلم أن : $\bar{x} \backsim N\,(\mu, \frac{\sigma^2}{})$

$$P_{H_0}(W) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad p_{H_0}(\bar{x} > k) = \alpha$$

الهدف من هذه الصيغة هو حساب قيمة k لاتخاذ القرار .

$$P_{H_0}(\bar{x} > k) = \alpha$$

$$\bar{x} \backsim N\,(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{x}-\mu}{б} . \sqrt{n} \backsim N\,(0,1)$$

$$\Rightarrow P_{H_0}\left(\frac{\bar{x}-\mu}{б} . \sqrt{n} > \frac{k-\mu}{б} . \sqrt{n}\right) = \alpha$$

باستخدام القانون الطبيعي نجد قيمة k ثم نقارنها ب $\bar{x}$ لاتخاذ القرار.

مثال 01:

اذا كانت اعمار بطاريات السيارات المنتجة بواسطة احد المصانع تتبع توزيع طبيعي. و يدعي صاحب المصنع ان متوسط اعمار هذه البطاريات هو 36 شهرا بانحراف معياري 4.01 شهرا. و لاختبار صحة هذا الادعاء اختيرت عينة عشوائية حجمها 10 بطاريات و قيست اعمارها بالشهور فكان متوسط اعمارها هو 30.33 شهر. فهل تدل هذه البيانات على ان متوسط اعمار البطاريات اكبر من 36 شهر عند مستوى معنوية 0.01.

الحل :

نريد اختبار ما إذا كانت متوسط اعمار البطاريات اكبر من 36 شهر عند مستوى معنوية 0.01.

وفق الصيغة التالية :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 36 \\ H_1 : \mu > 36 \end{cases}$$

لديناσ معروف :

σ =4.01 , $\bar{x}$=30.33 , n=10

$W = \{ \bar{x} > k \}$

$Z = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$P_{H_0}(W) = \alpha \Leftrightarrow p_{H_0}(\bar{x} > k) = \alpha$

$P_{H_0}\left(\frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{k - \mu_0}{\sigma}.\sqrt{n}\right) = 0.01$

$P_{H_0}\left(Z > \frac{k-36}{4.01}.\sqrt{10}\right) = 0.01$

$P_{H_0}\left(Z < \frac{k-36}{4.01}.\sqrt{10}\right) = 0.99$

* من جدول القانون الطبيعي نقرأ :

$\Leftrightarrow \frac{k-36}{4.01}.\sqrt{10} = 2.33$

بعد الحساب نحصل على :

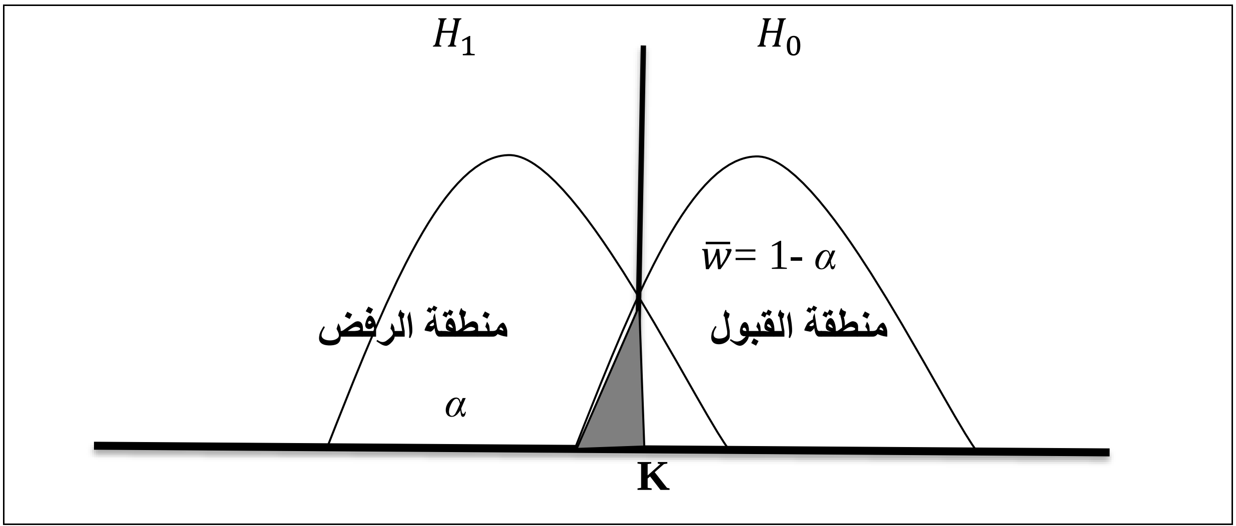
$K = 38.95$

نلاحظ أن : $[\bar{x} = 30.33 < k = 38.95] \notin W = \{ \bar{x} > k \}$

القرار : نلاحظ أن منطقة الحرج غير محققة بمعنى القرار هو قبول H_0 ورفض H_1 أي أن متوسط اعمار البطاريات هو يساوي 36 شهر عند مستوى معنوية 0.01.

- **اختبار ذو جانب أيسر:**

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$



*** تحديد المنطقة الحرجة :** W = { $\bar{x} > k$ }

حيث أن W : المنطقة الحرجة (منطقة رفض H_0 و قبول H_1)

نعلم أن : $P_{H_0}(W) = \alpha$

و نعلم أن : $\bar{x} \backsim N(\mu, \frac{\sigma^2}{})$

$P_{H_0}(W) = \alpha \Leftrightarrow p_{H_0}(\bar{x} < k) = \alpha$

الهدف من هذه الصيغة هو حساب قيمة k لاتخاذ القرار .

$P_{H_0}(\bar{x} < k) = \alpha$

$\bar{x} \backsim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{x}-\mu}{б} . \sqrt{n} \backsim N(0,1)$

$\Rightarrow P_{H_0}(\frac{\bar{x}-\mu}{б} . \sqrt{n} < \frac{k-\mu}{б} . \sqrt{n}) = \alpha$

باستخدام القانون الطبيعي نجد قيمة k ثم نقارنها ب $\bar{x}$ لاتخاذ القرار.

مثال02:

اذا كان من المعروف ان جسم الانسان البالغ يحتاج يوميا في المتوسط 800 ميللجرام من الكالسيوم بانحراف معياري 239.3 ميللجرام لكي يقوم بوظائفه بطريقة كفؤة. و يعتقد احد العلماء ان الافراد ذوي الدخل المنخفض لا يستطيعون تحقيق هذا المتوسط، و لاختبار ذلك تم اختيار عينة من 50 شخصا بالغا من بين ذوي الدخل المنخفض فكان متوسط ما يتناوله من كالسيوم يوميا هو 755.3 ميللجرام. فهل تدل النتائج على ان متوسط ما يتناوله الاشخاص البالغون من ذوي الدخل المنخفض من كالسيوم يقل عن 800 ميللجرام عند مستوى معنوية 0.05.

الحل :

نريد أن نختبر ما ان كان متوسط ما يتناوله الاشخاص البالغون من ذوي الدخل المنخفض من كالسيوم يقل عن 800 ميللجرام عند مستوى معنوية 0.05، وفق الصيغة الاتية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 800 \\ H_1: \mu < 800 \end{cases}$$

لدينا :

$\sigma = 239.3$, $\bar{x}$=755.3 , n=50

W = { $\bar{x} < k$ }

$$Z = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \quad \sim N(0,1)$$

$P_{H_0}(W) = \alpha \Leftrightarrow P_{H_0}(\bar{x} < k) = \alpha$

$$P_{H_0}\left(\frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{k - \mu_0}{\sigma} . \sqrt{n}\right) = \%\ 5$$

$$P_{H_0}\left(Z < \frac{k - 800}{239.3} . \sqrt{50}\right) = 0.05$$

من جدول القانون الطبيعي نقرأ:

$P(z \leq -1.65) = 0.05$

$\Leftrightarrow \frac{k-800}{239.3} . \sqrt{50} = -1.65$

بعد الحساب نحصل على :

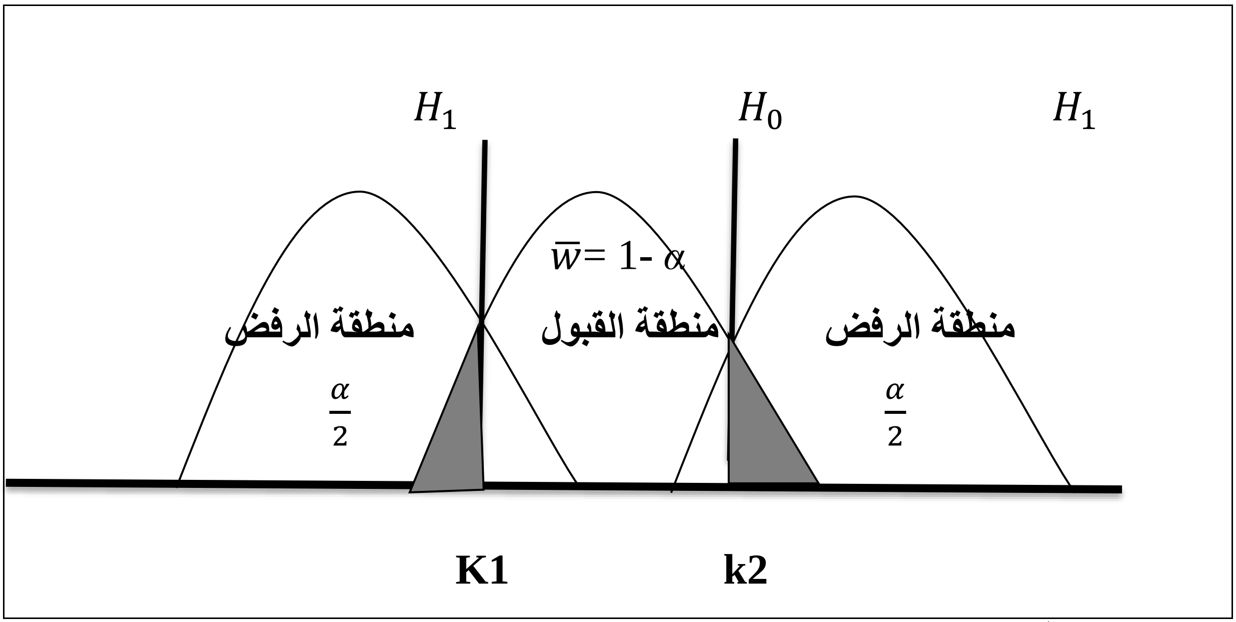
K= 744.16

نلاحظ أن : $[\bar{x} = 755.3 > k = 744.16] \notin \quad W = \{ \bar{x} < k \}$

القرار : نلاحظ أن المنطقة الحرجة غير محققة بمعنى القرار هو قبول H_0 أي أن متوسط ما يتناوله الاشخاص البالغون من ذوي الدخل المنخفض من كالسيوم هو يساوي 800 ميللجرام عند مستوى معنوية 0.05.

- **اختبار ذو جانبين:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



*** نحدد منطقة الحرج :**

$W = \{ \bar{x} < k_1\} \ \upsilon\{ \bar{x} > k_2 \} \Rightarrow \quad H_0$ منطقة الرفض

$\bar{w} = \{ k_1 < \bar{x} < k_2 \} \quad \Rightarrow \quad H_0$ منطقة قبول

نعلم أن : $P_{H_0}(\bar{w}) = 1 - \alpha$

و نعلم أن : $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{}) \Rightarrow \frac{(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$$P_{H_0}(\bar{w}) = 1-\alpha \Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{(k_1-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{(k_2-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{(k_1-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} < Z < \frac{(k_2-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1-\alpha$$

نحسب $_1$ و K_2 بالاستعانة بجدول القانون الطبيعي ثم نقارنها بـ $\bar{x}$ لاتخاذ القرار.

مثال :

ينتج مصنع نوع معين من المعلبات. قام احد مسئولي المصنع بمراقبة أوزان هذه المعلبات فوجدها تخضع لتوزيع طبيعي وسطه μ وتباينه 9.أخذت عينة عشوائية x_1.............x_{36} بحيث أن : $\sum_1^{36} x_i = 360$

- اختبر الفرضية $H_0 : \mu=8$ مقابل $H_1 : \mu\neq8$ عند مستوى معنوية $\alpha= 5\%$.

نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 8 \\ H_1 : \mu \neq 8 \end{cases}$$

لدينا : $\sigma^2 = (9)^2, \ \alpha = 5\% \ , \ n=36$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{360}{36} = 10$$

$$W = \{ \bar{x} < k_1\} \ \upsilon\{ \bar{x} > k_2 \}$$

$\bar{w}$= { $k_1 < \bar{x} < k_2$ } منطقة قبول H_0

نعلم أن : $P_{H_0}(W) = \alpha \Rightarrow P_{H_0}(\bar{w}) = 1-\alpha$

و نعلم أن :

$$P_{H_0}(\bar{w}) = 1-\alpha \Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{(k_1-\mu_0)}{\alpha}\sqrt{n} < \frac{(\bar{x}-\mu_0)}{\alpha}\sqrt{n} < \frac{(k_2-\mu_0)}{\alpha}\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{(k_1-8)}{3}\sqrt{36} < Z < \frac{(k_2-8)}{3}\sqrt{36}\right)= 0.95$$

من جدول القانون الطبيعي نقرأ ما يلي:

$$\begin{cases}\dfrac{(k_1-8)}{3}\sqrt{36} = -1.96\\ \dfrac{(k_2-8)}{3}\sqrt{36} = 1.96\end{cases}$$

ومنه: $k_2 = 8.96 k_1 = 7.02$,

$\bar{x} = 10 \notin [7.02, 8.96]$

$\bar{x} = 10 > k_2 = 8.96$

القرار : نلاحظ أن المنطقة الحرجة تحققت بمعنى القرار هو رفض H_0 أي أن $\mu \neq 8$

5-2- اختبار المتوسط مع انحراف المجتمع (σ)مجهول :

هنا نستخدم قانون سيودنت أو القانون الطبيعي (نستخدم القانون الطبيعي لما يكون حجم العينة($n \geq 30$)، ونستخدم نفس الخطوات المستخدمة في الحالة الأولى، باستثناء استخدام قانون ستيودنت في حالة انحراف المجتمع (σ)مجهول وحجم العينة صغير($n \geq 30$) ونطبق الدالة المحورية التالية تحت درجة حرية(n-1):

$$t = \frac{(\bar{x}-\mu_0)}{s}.\sqrt{n} \sim Z(n-1) \qquad n \geq 30$$

مثال01 :

اخذت عينة عشوائية من 20 حبل، فوجد ان المتوسط الحسابي لطول هذه الاحبال هو 531 قدم و الانحراف المعياري هو 52 قدم يراد اختبار ما يلي :

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 525 \\ H_1: \mu < 525 \end{cases}$$

* اذا كان $\alpha = 5\%$، ما هي القيمة الفاصلة، و هل ينبغي قبول ام رفض افتراض العدم.

الحل:

لدينا :

$\bar{x}=531$, $n=20$, $s = 52$

$W = \{ \bar{x} < k \}$

$P_{H_0}(W) = \alpha \Leftrightarrow P_{H_0}(\bar{x} < k)=\alpha$

لدينا : $n=20 < 30$ و منه حجم العينة صغير و انحراف المجتمع مجهول و منه نستخدم قانون ستيودنت

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{s} . \sqrt{n} \rightsquigarrow t\,(n-1) \qquad n < 30$$

$$P_{H_0}\left(\frac{(\bar{x} - \mu_0)}{s}\sqrt{n} < \frac{k-\mu_0}{s} . \sqrt{n}\right) = \%\ 5$$

$$PH_0\left(t < \frac{k-525}{52} . \sqrt{20}\right) = 0.05$$

من جدول ستيودنت و تحت درجة حرية 19 نقرأ

$$P(t \leq -1.729) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow \frac{k-525}{52} . \sqrt{20} = -1.729$$

بعد الحساب نحصل على القيمة الفاصلة (K) :

K= 504.84

نلاحظ أن : $[\bar{x} = 531 > k = 504.84] \neq W = \{ \bar{x} < k \}$

القرار: نلاحظ أن المنطقة الحرجة H_1 لم تتحقق بمعنى نقبل افتراض العدم.

مثال 02:

يدعي صاحب مصنع بأن الوقت الذي يستغرقه تجميع ماكينة هو 11 دقائق. و لكي يتأكد من ان هذه المدة صحيحة أم اكثر من ذلك. قام باختبار للزمن الذي يستغرقه تجميع 6 ماكينات و الذي كان كالاتي: 10، 13، 7، 13، 15، 14(دقيقة)

المطلوب : اختبر صحة ادعاء صاحب المصنع.

الحل:

نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 11 \\ H_1: \mu > 11 \end{cases}$$

لدينا : n=6 <30 و منه حجم العينة صغير و انحراف المجتمع مجهول و منه نستخدم قانون ستيودنت.

$$W = \{ \bar{x} > k \}$$

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \sim t\,(n-1)$$

$$P_{H_0}(W) = \alpha \Leftrightarrow P_{H_0}(\bar{x} > k) = \alpha$$

$$P_{H_0}\left(\frac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s} > \frac{k-\mu_0}{s}.\sqrt{n}\right) = \%\ 5$$

$$P_{H_0}\left(t > \frac{k-11}{s}.\sqrt{6}\right) = \%\ 5$$

نحسب $\bar{x}$ و s :

$$\bar{x}= \frac{\sum x_i}{n} = \frac{72}{6} = 12$$

$$s^2= \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1} = \mathbf{8.8}$$

$$\Rightarrow\ S = 2.96$$

$$P_{H_0}\ \left(t > \frac{k-11}{2.96}.\sqrt{6}\right) = \%\ 5$$

من جدول ستيودنت نقرأ :

$$P_{H_0}\ (t > 2.01) = \%\ 5$$

$$\Rightarrow \frac{k-10}{2.96}.\sqrt{6} = 2.01 \Rightarrow k = 13.41$$

نلاحظ أن : $[\bar{x} = 12 < k = 13.41] \neq W = \{\ \bar{x} > k\ \}$

القرار: لم تتحقق المنطقة الحرجة بمعنى نقبل H_0 أي أن الوقت الذي يستغرقه تجميع ماكينة هو 11 دقائق.

6- اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطين ($\overline{yx}$-) :

الغرض من هذا الاختبار هو تأكيد أو نفي فرضية تساوي متوسطي مجتمعين من خلال اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين، وسنطبق نفس الخطوات لهذا الاختبار كما تعرضنا لها في اختبار المتوسط غير أننا سنميز بين حالتين:

- **الحالة الأولى:**

- انحراف المجتمعين (σ_2^2, σ_1^2) معلومين نستخدم الدالة المحورية التالية:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

- **الحالة الثانية:**

- انحراف المجتمعين (σ_2^2, σ_1^2) مجهولين مع n_1 و n_2 كبيرتين نستخدم الدالة المحورية التالية:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

- انحراف المجتمعين (σ_2^2, σ_1^2) مجهولين مع n_1 و n_2 صغيرتين نستخدم الدالة المحورية التالية:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim Z(n_1 + n_2 - 2)$$

بحيث :

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$(n_1 + n_2 - 2)$: درجة الحرية

مثال 01:

تم سحب عينتين عشوائيتين من مجتمعين مستقلين كل منها يتبع التوزيع الطبيعي و كانت البيانات كالاتي :

في العينة الاولى : $n_1 = 35$; $\bar{x}_1 = 28$; $\sigma_1 = 3.1$

في العينة الثانية : $n_2 = 40$; $\bar{x}_2 = 24$; $\sigma_2 = 5.1$

- اختبر ما اذا كان متوسط المجتمع الاول يختلف عن متوسط المجتمع الثاني عند مستوى خطأ $\alpha = 5\%$.

الحل :

نريد ان نختبر ما يلي عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

لدينا :

$n_1 = 35$, $n_2 = 40$

$\bar{X}_1 = 28$, $\sigma_1 = 3.1$

$\bar{X}_2 = 24$, $\sigma_2 = 5.1$

* انحراف المجتمعين(σ_2^2, σ_1^2)معلومين

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

$W = \{ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < k_1 \} \cup \{ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 > k_2 \}$

$\bar{w} = \{ k_1 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < k_2 \}$ منطقة قبول H_0

نعلم أن : $P_{H_0}(W) = \alpha \Rightarrow P_{H_0}(\bar{w}) = 1 - \alpha$

و نعلم أن :

$P_{H_0}(\bar{w}) = 1-\alpha \Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{(k_1-\mu_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < \frac{(k_2-\mu_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) = 1-\alpha$

$\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{k_1}{\sqrt{\frac{(3.1)^2}{35}+\frac{(5.1)^2}{40}}} < z < \frac{k_2}{\sqrt{\frac{(3.1)^2}{35}+\frac{(5.1)^2}{40}}}\right) = 0.95$

$\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{k_1}{0.9616} < z < \frac{k_2}{0.9616}\right) = 0.95$

من الجدول الطبيعي نقرأ :

$$\begin{cases} \frac{k_1}{0.9616} = -1.96 \\ \frac{k_2}{0.9616} = 1.96 \end{cases}$$

ومنه: $= -1.8847 \quad , \quad k_2 = 1.8847 k_1$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 4 \notin [-1.8847,\ 1.8847]$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 4 > k_2 = 1.8847$

القرار: نلاحظ أن المنطقة الحرجة تحققت بمعنى القرار هو رفض H_0 أي أن $\mu_1 \neq \mu_2$

مثال 02:

كشفت تجربة علم النفس اكتشاف منشطين فاراد الباحث المقارنة بينهما لذلك اخذ عينة عشوائية A تتكون من 8 اشخاص و عينة B من نفس العدد فكانت النتائج كالتي

المنشط 1	1	3	2	1	2	1	3	2
المنشط 2	4	2	3	3	1	2	3	3

- هل تقدم هذه المعطيات دلالة كافية على فعالية المنشط الثاني عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

الحل :

نريد ان نختبر ما يلي عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

$$\begin{cases} H_0:\ \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1:\ \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

لدينا :

$n_1 = 8$, $n_2 = 8$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_i}{n_1} = 1.875$$

$$s_1{}^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_1)^2}{n-1} = \mathbf{0.69} \Rightarrow \boldsymbol{s_1} = \mathbf{0.83}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_i}{n_2} = 2.625$$

$$s_2{}^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_2)^2}{n-1} = \mathbf{0.835} \Rightarrow \boldsymbol{s_2} = \mathbf{0.91}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases}$$

* (σ_2^2, σ_1^2)مجهولين و n_1 و n_2 ≤ 30

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\ \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \backsim t\,(n_1 + n_2 - 2)$$

بحيث :

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(7)0.69 + (7)0.835}{14} = 0.7625 \Rightarrow \mathbf{s = 0.8732}$$

$$W = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < k \}$$

$$PH_0(W) = \alpha \Leftrightarrow p\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{s\ \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < \frac{k - 0}{s\ \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right) = \alpha$$

$\Rightarrow \mathrm{p}\left(t < \frac{\mathrm{k}}{0.8732\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}\right) = 0.05$

$\Rightarrow \mathrm{p}\left(t < \frac{\mathrm{k}}{0.4366}\right) = 0.05$

من جدول ستيودنت و تحت درجة حرية (14) نقرأ :

$t = -1.761 \Rightarrow \frac{\mathrm{k}}{0.4366} = -1.761$

$\Rightarrow \mathrm{k} = -0.7688$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = -0.75 > \mathrm{k} = -0.7688$

نلاحظ أن: $[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = -0.75 > \mathrm{k} = -0.7688] \notin \quad W = \{\ \bar{x} < \mathrm{k}\ \}$

القرار : نلاحظ أن المنطقة الحرجة غير محققة بمعنى القرار هو قبول H_0 أي أن المنشط الاول هو اكثر فعالية من المنشط الثاني عند مستوى معنوية 0.05.

7- اختبار الفرضيات للنسبة p :

يتعلق هذا الاختبار بنسبة مفردات المجتمع التي تتصف بميزة معينة (p)، حيث نريد تأكيد صحة أو نفي فرضية متعلقة بهذه الميزة ونرمز للقيمة المراد اختبارها (p_0)، و بنفس المراحل التي تعرضنا لها في اختبار المتوسط سنقوم بتطبيقها على اختبار النسبة .

سنحاول اختبار ما يلي:

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$$

نستخدم الدالة المحورية التالية :

$$\frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \leadsto N(0, 1)$$

مثال:

يريد مستشفى ان يختبر ان 90 % من جرعات عقار يشتريه يحتوي على 100 ملغ من العقار. لعمل هذا اخذ المستشفى عينة من 100 جرعة فوجد ان 85 % فقط تحتوى على الكمية المناسبة.

- كيف يمكن للمستشفى ان يختبر هذا عند مستوى خطأ $\alpha = 1\%$.

الحل :

نريد أن نختبر ما يلي

$$\begin{cases} H_0: p = 0.9 \\ H_1: p < 0.9 \end{cases}$$

$$W = \{ \bar{p} < k \}$$

لدينا : $n = 100$, $\bar{p} = 0.85$

$$P_{H_0}(W) = \alpha \Leftrightarrow P_{H_0}(\bar{p} < k) = 0.01$$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} < \frac{k-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}\right) = 0.01$$

$$\Rightarrow P_{H_0}\left(z < \frac{k - 0.9}{\sqrt{\frac{(0.90)(0.10)}{100}}}\right) = 0.01$$

$\Rightarrow P_{H_0}\,(z < \frac{k-0.9}{0.03}) = 0.01$

من الجدول التوزيع الطبيعي نقرأ:

$Z = -2.33 \Rightarrow \frac{k-0.9}{0.03} = -2.33$

$\Rightarrow\ k = 0.8301$

$[\bar{p} = 0.85 > k = 0.8301\ ] \notin \quad W = \{\ \bar{p} < k\ \}$

القرار: المنطقة الحرجة غير محققة بمعنى نقبل H_0 أي أن 90 % من جرعات عقار الذي يشتريه المستشفى يحتوي على 100 ملغ من العقار.

مثال:

نسبة متابعة برنامج تلفزيوني 15 %، طرا تغيير في نظام البرمجة اظهر ان 18 شخص من بين 80 شخص يتابعون البرنامج الجديد

- هل يمكننا ان نقول ان البرنامج قد اثر في الجمهور عند مستوى خطأ $\alpha = 5\%$.

الحل :

نريد أن نختبر الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.15 \\ H_1 : p > 0.15 \end{cases}$$

$\bar{p} = \frac{18}{80} = 0.225$

لدينا : $\frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \sim N(0, 1)$

: $W = \{\ \bar{p} > k\ \}$

$P_{H_0}(W) = \alpha \;\; \Leftrightarrow P_{H_0}(\bar{p} > k) = \%\ 5$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}} > \frac{k-p_0}{\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}}\right) = \%\ 5$$

$$\Rightarrow P_{H_0}\left(z \geq \frac{k-0.15}{\sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{80}}}\right) = \%\ 5$$

$$\Rightarrow 1 - P_{H_0}\left(z \leq \frac{k-0.15}{\sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{80}}}\right) = \%\ 5$$

$$\Rightarrow P_{H_0}\left(z \leq \frac{k-0.15}{\sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{80}}}\right) = \%\ 95$$

$$\Rightarrow P_{H_0}\left(z \leq \frac{k-0.15}{0.04}\right) = 0.95$$

من الجدول التوزيع الطبيعي نقرأ:

$$Z = 1.65 \Rightarrow \frac{k-0.15}{0.04} = 1.65$$

$$\Rightarrow k = 0.216$$

$$\bar{p} = 0.225 > k = 0.216$$

القرار: المنطقة الحرجة محققة بمعنى نرفض H_0. اي ان البرنامج قد اثر في الجمهور عند مستوى خطأ $\alpha = 5\%$.

8- اختبار الفرضيات للفرق بين نسبتين:

الغرض من هذا الاختبار هو تأكيد أو نفي فرضية تساوي متوسطي مجتمعين من خلال اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين، وسنطبق نفس الخطوات لهذا الاختبار كما تعرضنا لها

في اختبار المتوسط، سنطبق دالة محورية واحدة على جميع الحالات الموجودة (اختبار ذو جانب واحد، اختبار ذو جانبين)

نستخدم الدالة المحورية التالية :

$$\frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_1} + \frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_2}}} \leadsto N\,(0,1)$$

بحيث

$$\bar{p} = \frac{n_1 \bar{p}_1 + n_2 \bar{p}_2}{n_1 + n_2}$$

مثال:

نسبة متابعة برنامج تلفزيوني 15 %، طرا تغيير في نظام البرمجة اظهر ان 18 شخص من بين 80 شخص يتابعون البرنامج الجديد

- هل يمكننا ان نقول ان البرنامج قد اثر في الجمهور عند مستوى خطأ $\alpha = 5\%$.

الحل :

نريد أن نختبر الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.15 \\ H_1 : p > 0.15 \end{cases}$$

$$\bar{p} = \frac{18}{80} = 0.225$$

لدينا :

$$\frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \leadsto N\,(0,1)$$

:

$$W = \{\ \bar{p} > k\ \}$$

$$P_{H_0}(W) = \alpha \iff P_{H_0}(\bar{p} > k) = \%\,5$$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}} > \frac{k-p_0}{\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}}\right)= \%\ 5$$

$$\Rightarrow P_{H_0}\left(z \geq \frac{k-0.15}{\sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{80}}}\right)= \%\ 5$$

$$\Rightarrow 1 - P_{H_0}\left(z \leq \frac{k-0.15}{\sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{80}}}\right)= \%\ 5$$

$$\Rightarrow P_{H_0}\left(z \leq \frac{k-0.15}{\sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{80}}}\right)= \%\ 95$$

$$\Rightarrow P_{H_0}\left(z \leq \frac{k-0.15}{0.04}\right)= 0.95$$

من الجدول التوزيع الطبيعي نقرأ:

$$Z = 1.65 \Rightarrow \frac{k-0.15}{0.04} = 1.65$$

$$\Rightarrow k = 0.216$$

$$\bar{p} = 0.225 > k = 0.216$$

القرار: المنطقة الحرجة محققة بمعنى نرفض H_0. اي ان البرنامج قد اثر في الجمهور عند مستوى خطأ $\alpha = 5\%$.

9- اختبار الفرضيات المتعلقة بالتباين σ^2:

نريد أن نختبر ما يلي :

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

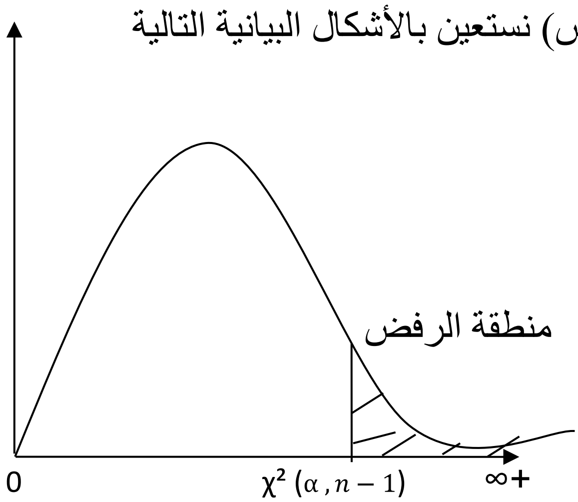
$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

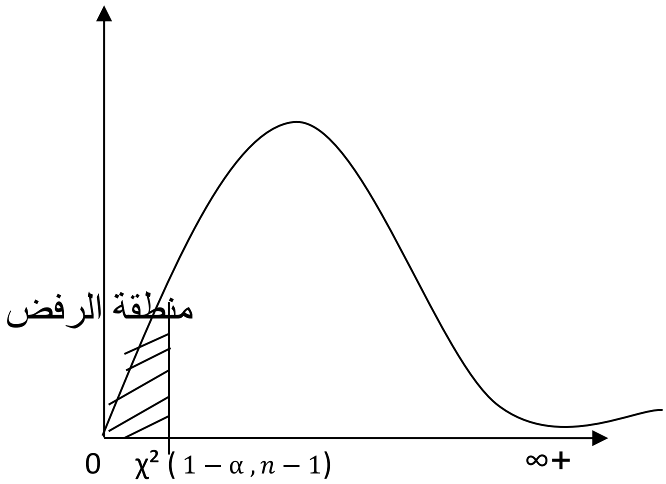
$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

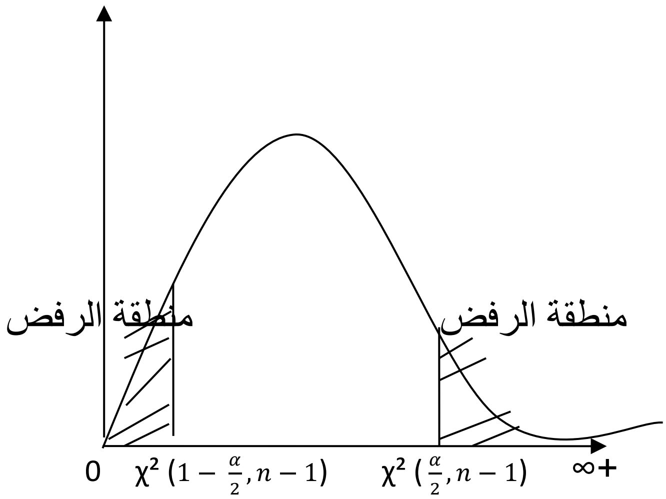
لاختبار ذلك نستخدم الدالة المحورية الآتية تحت درجة حرية $(n-1)$:

$$x_{cal}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

و لتحديد منطقة الحرج (منطقة الرفض) نستعين بالأشكال البيانية التالية







مثال01:

نفترض ان الانحراف المعياري لعائلات اسر في مدينة معينة يساوي 3000 و.ن، سحبنا عينة عشوائية ذات حجم 15 اسرة فوجدنا ان الانحراف المعياري لها 2000 و.ن.

- هل نستطيع اعتمادا على هذه العينة ان نفرض الفرض العدم عند مستوى خطأ %5 =α.

الحل:

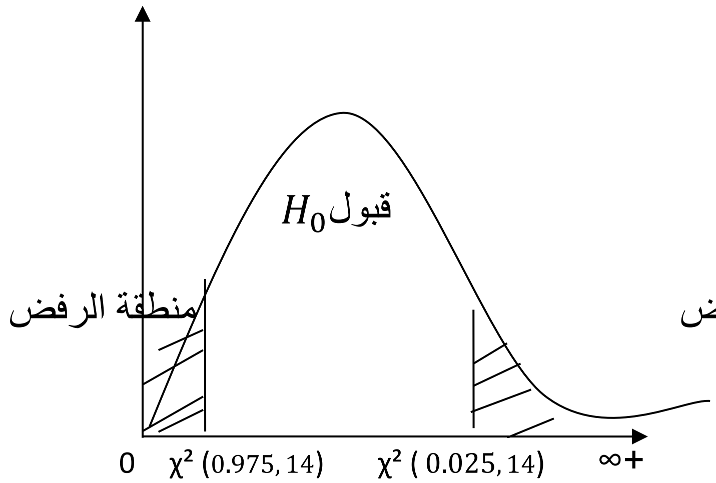
نريد ان نختبر الفرضية التالية عند مستوى دلالة قدرها 5 % = α

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = (3000)^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq (3000)^2 \end{cases}$$

لدينا :

n= 15 ; s= 2000 ⇒ $s^2 = (2000)^2$

من الشكل التالي نجد:



من جدول كاي تربيع و تحت درجة حرية 14 و مع 5 % = α

نجد :

$$\begin{cases} \chi^2\,(0.975, 14) = 5.63 \\ \chi^2\,(\,0.025, 14) = 26.12 \end{cases}$$

لدينا :

$$\bar{W} \;\; \{\; x^2_{cal}(0.975, 14) \;<\; x^2_{tab} < \; x^2_{cal}(\,0.025, 14) \;\} =$$

$$x^2_{cal} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \quad \backsim \chi^2\,(n-1)$$

$$= \qquad \frac{(14)(2000)^2}{(3000)^2} = 6.22$$

بما ان : $\{\, 5.63 < \; x^2_{tab} = 6.22 < 26.12 \;\} \in \bar{W}$

القرار: منطقة القبول محققة بمعنى نقبل H_0 اي ان أن $\sigma^2 \; = \; (3000)^2$

مثال 02:

مهندس صناعي يعتقد حسب مقاييس الصناعة المفروضة ان الانحراف المعياري لطول قطع معينة يتجاوز 3 سم. سحبنا عينة عشوائية من 12 قطعة فوجدنا انحرافها المعياري هو 4.2 سم.

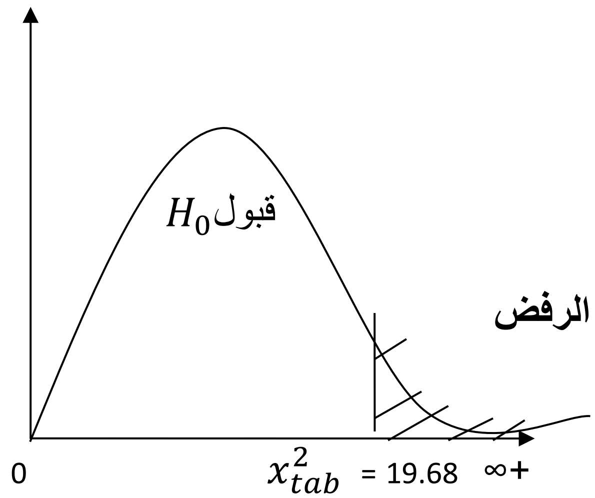
- هل نستطيع رفض الفرضية الصفرية H_0 القائلة ان الانحراف المعياري للقطع لا يتجاوز 3 سم عند مستوى خطأ α= 5%.

الحل:

نريد ان نختبر الفرضية التالية عند مستوى دلالة قدرها 5 % = α:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \leq (3)^2 \\ H_1: \sigma^2 > (3)^2 \end{cases}$$

من الشكل التالي نجد:



من جدول كاي تربيع و تحت درجة حرية11 و مع

x^2_{tab} [% 5 , 11]= 19.68

لدينا : W = { $x^2_{cal} > x^2_{tab}$ }

$x^2_{cal} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2\,(n-1)$

$$= \frac{(11)(4.2)^2}{9} = 21.56$$

$x^2_{cal} = 21.56 \quad > x^2_{tab} = 19.68$

القرار: المنطقة الحرجة محققة بمعنى نرفض H_0 اي أن $\sigma > 3$

10- اختبار الفرضيات للمقارنة بين تبايني عينتين :

لتكن لدينا عينتين عشوائيتين من مجتمعين مستقلين بحيث :

$x_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ n_1: حجم العينة s_1^2: تباين العينة

$y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ n_2حجم العينة : s_2^2: تباين العينة

نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \\ H_1: \sigma_2^2 > \sigma_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \\ H_1: \sigma_2^2 < \sigma_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \\ H_1: \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2 \end{cases}$$

لاختبار ذلك سنعتمد على نفس الخطوات المرتبطة باختبار التباين مع استخدام الدالة المحورية التالية :

$$\sim F_{(n_2-1),(n_1-1)} \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

ثم نقوم بمقارنة $_{cal}$ مع F_{tab}

بنفس المنطق عند اختبار التباين مع العلم أن :

$$F_{\text{tab}} = F_{(\mathrm{n}_2-1),(\mathrm{n}_1-1)}$$

مثال :

تم سحب عينتين بطريقة عشوائية حجم كل منهما 10 من مجتمعين مستقلين كل منها يتبع التوزيع الطبيعي، حيث تم حساب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لكل عينة و كانت النتائج كالاتي :

في العينة الاولى : s_1=3.1

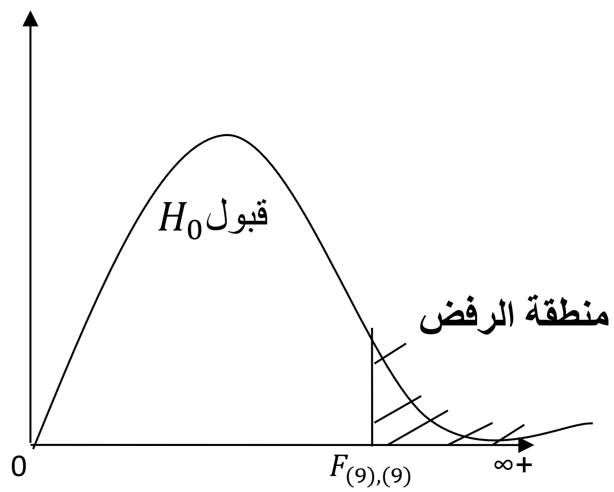
في العينة الثانية : s_2=5.1

- اختبر ما يلي عند مستوى خطأ α= 5% :

$$\begin{cases} H_0: \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \\ H_1: \sigma_2^2 > \sigma_1^2 \end{cases}$$

الحل :

نستعين بالتمثيل البياني التالي :



$$F_{\text{tab}} = F\ (9\ ,9\ ,\ \%\ 5) = 3.18$$

لدينا : $F_{\text{cal}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(3.1)^2}{(5.1)^2} = 0.37$

المنطقة الحرجة هي من الشكل التالي :

W = { $F_{\text{cal}} > F_{\text{tab}}$ }

F_{cal} = 0.37 < F_{tab} = 3.18

القرار: المنطقة الحرجة غير محققة بمعنى نقبل H_0 بمعنى أن $\sigma_1^2 = \frac{2}{2}$

11- تمارين محلولة:

- **التمرين01 :**

مؤسسة لصنع و بيع اجهزة الخلاط الكهربائي، قامت بدراسة متوسط مدة حياته فوجدت انه يساوي 1600 يوم في الظروف العادية. اجريت دراسة اخرى من طرف باحثين لـ 100 جهاز فوجد ان متوسط حياة الجهاز هو 1563 يوم بانحراف معياري 205 يوم.

المطلوب: هل الدراسة التي قامت بها المؤسسة صحيحة عند مستوى معنوية 5 %.

- **حل التمرين 01:**

نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 1600 \\ H_1: \mu \neq 1600 \end{cases}$$

لدينا : $s = 205$, $\bar{x}$=1563 , α= 5% , n=100 > 30

W = { $\bar{x} < k_1$ } υ{ $\bar{x} > k_2$ }

$\bar{w}$= { $k_1 < \bar{x} < k_2$ } منطقة قبول H_0

نعلم أن : $P_{H_0}(W) = \propto \;\Rightarrow P_{H_0} (\overline{w}) =1- \alpha$

و نعلم أن : $\bar{x} \sim N (\mu, \frac{s}{\sqrt{}}) \Rightarrow \frac{(\bar{x} -\mu_0)}{s}\sqrt{n} \quad \sim N (0,1)$

$P_{H_0} (\overline{w}) =1- \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P_{H_0} (\frac{(k_1-\mu_0)}{s}\sqrt{n} < \frac{(\bar{x} -\mu_0)}{s}\sqrt{n} < \frac{(k_2-\mu_0)}{s}\sqrt{n})=1-\alpha$

$\Leftrightarrow \; P_{H_0} (\frac{(k_1-1600)}{205}\sqrt{100} < Z < \frac{(k_2-100)}{205}\sqrt{100})= 0.95$

من جدول القانون الطبيعي نقرأ ما يلي:

$$\begin{cases} \dfrac{(k_1 - 1600)}{205}\sqrt{100} = -1.96 \\ \dfrac{(k_2 - 1600)}{205}\sqrt{100} = 1.96 \end{cases}$$

ومنه: $= 1559.82 \quad , \quad k_2 = 1640.18 k_1$

$\bar{x} = 1563 \in [\, 1559.82,\; 1640.18]$

القرار : نلاحظ أن منطقة القبول تحققت بمعنى القرار هو قبول H_0 أي أن $\mu = 1600$

➢ **التمرين 02 :**

ينتج احد المصانع نوع معين من المسامير قطره 2 ملم. أراد احد التجار شراء شحنة من هذا النوع و لكنه شك في قطر المسمار فاخذ عينة عشوائية مكونة من 40 مسمار فوجد أن المتوسط الحسابي يساوي 1.8 ملم بانحراف معياري 0.3 ملم فاستنتج التاجر أن هذه المسامير غير مطابقة للمواصفات. فهل تتفق معه في الرأي عند مستوى معنوية $\alpha= 5\%$.

➢ **حل التمرين 02:**

نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2 \\ H_1 : \mu \neq 2 \end{cases}$$

لدينا : $s = 0.3, \quad \bar{x}=1.8 \quad , \alpha= 5\% \quad , \ n=40 > \ 30$

$W = \{ \bar{x} < k_1 \} \ \upsilon\{ \bar{x} > k_2 \}$

$\bar{w}= \{ \ k_1 < \bar{x} < \ k_2 \ \}$ منطقة قبول H_0

نعلم أن : $P_{H_0}(W) = \alpha \ \Rightarrow P_{H_0} (\bar{w}) =1- \alpha$

و نعلم أن : $\bar{x} \backsim N (\mu, \frac{s}{\sqrt{}}) \Rightarrow \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{s}\sqrt{n} \quad \backsim N (0,1)$

$P_{H_0} \ (\ \bar{w} \ ) \ =1- \ \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P_{H_0} \ (\ \frac{(k_1 - \mu_0)}{s}\sqrt{n} \ < \ \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{s}\sqrt{n} \ < \frac{(k_2 - \mu_0)}{s}\sqrt{n} \ )=1-\alpha$

$\Leftrightarrow \ P_{H_0} (\frac{(k_1-2)}{0.3}\sqrt{40} < \ Z \ < \ \frac{(k_2-2)}{0.3}\sqrt{40})= 0.95$

من جدول القانون الطبيعي نقرأ ما يلي:

$$\begin{cases} \frac{(k_1 - 2)}{0.3}\sqrt{40} = -1.96 \\ \frac{(k_2 - 2)}{0.3}\sqrt{40} = 1.96 \end{cases}$$

ومنه: $= 1.907 \quad , \quad k_2 = 2.092 k_1$

$(\ \bar{x} = 1.8< \ k_1) = W = \{ \ \bar{x} < \ k_1\}$

القرار: نلاحظ أن منطقة القبول غير محققة بمعنى القرار هو رفض H_0 أي نتفق مع التاجر بان المسامير غير مطابقة للمواصفات

التمرين 03:

لدينا عينتين 1 و 2

في العينة 1 : n_1=8 ; $\bar{x}_1$ =3.12 ; s_1=0.4

في العينة 2 : n_2=9 ; $\bar{x}_2$ =2.85 ; s_2=0.32

- هل العينتين مسحوبتين من نفس المجتمع عند مستوى خطأ 1% =α.

➢ **حل التمرين 03:**

نريد ان نختبر ما يلي عند مستوى معنوية 5% =α.

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

لدينا :

n_1 = 8 , n_2 = 9

$\bar{X}_1$ = 3.12 , s_1= 0.4

$\bar{X}_2$ = 2.85 , s_2= 0.32

* (σ_2^2, σ_1^2) مجهولين و n_1 و n_2 ≥30

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \backsim t\,(n_1 + n_2 - 2)$$

بحيث :

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(7)(0.4)^2 + (8)(0.32)^2}{15} = 0.1292 \Rightarrow \mathbf{s = 0.3594}$$

$$W = \{ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < k_1 \} \ \upsilon \{ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 > k_2 \}$$

$\bar{w}=\{\ k_1 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < k_2\ \}$ منطقة قبول H_0

نعلم أن : $P_{H_0}(W) = \alpha \Rightarrow P_{H_0}(\bar{w}) = 1-\alpha$

و نعلم أن :

$$P_{H_0}(\bar{w}) = 1-\alpha \Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{(k_1-\mu_0)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_0}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < \frac{(k_2-\mu_0)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right)=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{k_1}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t < \frac{k_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right)=0.95$$

$$\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{k_1}{0.1746} < t < \frac{k_2}{0.1746}\right)= 0.95$$

من جدول ستيودنت و تحت درجة حرية (15) نقرأ :

$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{0.1746} = -2.131 \\ \dfrac{k_2}{0.1746} = 2.131 \end{cases}$$

ومنه: $k_2 = 0.3720 k_1$, $= -0.3720$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 0.27 \in [-0.3720,\ 0.3720]$

القرار : نلاحظ أن منطقة القبول تحققت بمعنى القرار هو قبول H_0 أي أن $\mu_1 = \mu_2$

قائمة المراجع :

باللغة العربية :

- أموري هادي كاظم، خالد ضاري الطائي، عبد المنعم كاظم الشكري، الإحصاء التطبيقي، الذاكرة للنشر و التوزيع سنة 2013.
- إيمان حسين حنوش، د.حسن ياسين طعمة، أساليب الإحصاء التطبيقي، دار صفاء للنشر و التوزيع عمان، 2009 .
- حسن ياسين طعمة، الاختبارات الإحصائية، دار صفاء للنشر و التوزيع عمان 2015.
- خالد قاسم سمور، الإحصاء، دار الفكر،2007.
- سعيد جاسم الاسدي، سندس عزيز فارس، الأساليب الإحصائية في البحوث، دار صفاء للنشر و التوزيع عمان، 2015.
- صالح رشيد بطاسة، الإحصاء و الاحتمالات، دار أسامة للنشر و التوزيع، 2014.
- نبيل جمعة صالح النجار، الإحصاء التحليلي، دار الحامد للنشر و التوزيع، 2015.
- سعد الحاج بن جخدل، العينة و المعاينة، دار البداية،2019.
- امتثال محمد حسن، عادل محمود حلاوة، لبيبة حسب النبي العطار، مقدمة في اساليب الاستدلال الاحصائي و التنبؤ، مكتبة الاقتصاد، جامعة الاسكندرية، 2019.
- عليان، ربحي مصطفى وغنيم، عثمان محمد، مناهج وأساليب البحث العلمي- النظرية و التطبيق-، عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع.
- عطية، عبد الحميد، استخدامات التحليل الإحصائي في بحوث الخدمة الاجتماعية- الازاريطة، المكتب الجامعي الحديث، الإسكندرية، 1999.
- الجادري، عدنان حسين، الأسس المنهجية والاستخدامات الإحصائية في بحوث العلوم التربوية والإنسانية، الأردن، إثراء للنشر والتوزيع،2016.
- صابر، فاطمة عوض وخفاجة، ميرفت علي، أسس ومبادئ البحث العلمي، الإسكندرية، مكتبة ومطبعة الإشعاع الفنية، 2002.
- سعيد جاسم الاسدي، سندس عزيز فارس، الاساليب الاحصائية في البحوث، دار الصفاء للنشر و التوزيع، عمان، الاردن، 2014.
- اموري هادي كاظم، خالد ضاري الطاني، عبد المنعم كاظم الشكري، الاحصاء التطبيقي اسلوب تحليلي باستخدام spss، الذاكرة للنشر و التوزيع، 2013.
- خالد قاسم سمور، الاحصاء، دار الفكر، عمان، الاردن، 2007.

قائمة المراجع

- حسن ياسين طعمة، الاختبارات الاحصائية اسس و تطبيقات، دار الصفاء للنشر و التوزيع، عمان، الاردن، 2015.
- صالح رشيد بطارسة، الاحصاء و الاحتمالات، دار اسامة للنشر و التوزيع، 2014.
- حسن ياسين طعمة، ايمان حسين خنوش، اساليب الاحصاء التطبيقي، دار الصفاء للنشر و التوزيع، عمان، الاردن، 2009.
- نبيل جمعة خالد النجار، الاحصاء التحليلي مع تطبيقات برمجيةspss ، دار الحامد للنشر و التوزيع، 2015.
- طويطي مصطفى، اساليب الاحصاء الاستدلالي البرامترية (الجزء الاول)، دار الحامد للنشر و التوزيع، 2019.
- طويطي مصطفى، اساليب الاحصاء الاستدلالي البرامترية (الجزء الثاني)، دار الحامد للنشر و التوزيع، 2019
- عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى، نظرية التقدير، مجموعة النيل العربية طباعة نشر توزيع،2000.
- صلاح العيادي صالحين، مسائل و حلول في الاحصاء و الاحتمالات، دار ابن كثير للنشر و التوزيع، طرابلس، ليبيا،2004.
- عبد الله فلاح المنيزل، الاحصاء الاستدلالي، اثراء للنشر و التوزيع، الاردن،2008.
- سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، مبادئ الاحصاء الوصفي و الاستدلالي، دار المسيرة، الاردن،2007.
- محمد صبحي ابو صالح، الموجز في الطرق الاحصائية، دار اليازوري، 2007.
- محمد صبحي ابو صالح، الطرق الاحصائية، دار اليازوري، 2009.
- محمود محمد سليم صالح، مقدمة في الاحصاء، مكتبة المجتمع العربي للنشر و التوزيع، 2008.
- شفيق العتوم، طرق الاحصاء تطبيقات اقتصادية و ادارية باستخدام spss، دار المناهج للنشر و التوزيع، 2008.

باللغة الفرنسية:

- **Anderson-Sweeney-Williams, Statistiques pour l'économie et la gestion, Nouveaux Horizons,2013.**

قائمة المراجع

- **François Delarue, Cours Statistiques, Université Nice Sophia-Antipolis.**
- **Y. Velenik, Probabilités et Statistique, Université de Genève, 2011-2012.**
- **C. Reder, PROBABILITES et STATISTIQUES: Cours et exercices, Université de Bordeaux I, 2002-2003.**
- **Alain Yger, Probabilités et Statistiques, Institut de Mathématiques, Université Bordeaux 1, 2012.**
- **MURRAY R. SPIEGEL, LARRY J. STEPHENS, theory and problems of statistics , Fourth Edition, 1999.**
- **Sylvie Rousseau, Enquêtes et sondages, MANUEL D'EXERCICES, Année scolaire 2011– 2012.**

الفهرس

الفهرس

الفهرس

الفهرس