الجمهـــورية الجزائـــرية الديـــــــــمقراطية الشعبيــــــة

وزارة التعليـــــــم العالـــــي و البحث العلمي

جامعة الدكتور مولاي الطاهر سعيدة

كلية العلوم الاقتصادية ،العلوم التجارية و علوم التسيير

مطبوعة في :

الرياضيـــات الماليـــة

(دروس و تمارين محلولة)

مقدمة لطلبة السنة الثانية جميع التخصصات

من اعداد :

الدكتور رفافة براهيم

قسم علوم التسيير

السنة الجامعية 2019–2020

قائمة الأشكال

الفهرس

مقدمة

تهدف هذه المطبوعة في مقياس الرياضيات المالية لتقديم دروس وتمارين لطلبة السنة الثانية لكل التخصصات ميدان العلوم الاقتصادية، حيث تعد الرياضيات المالية أداة لحساب الفائدة في مجملها وبمختلف أشكالها ويعتمد عليها في البنوك التجارية بصفة جد كبيرة كأداة لتسيير منح القروض وكذلك الودائع الادخارية ،كما يعتمد عليها في كل المعاملات المالية التى تتأثر بالفائدة كالأسواق النقدية والمالية ويعتمد على الرياضيات المالية كذلك في التسيير المالي مثل اختيار الاستثمارات و التنبؤ.

وبما أن الرياضيات المالية تهدف لحساب الفوائد المترتبة عن المعملات المالية لا بذ أن نعرج حول مفهوم الفائدة من الناحية الاقتصادية و غير الاقتصادية، فمن الناحية الاقتصادية تعتبر الفائدة دخل صاحب رأس مال نتيجة تخليه عن رأس ماله لمدة زمنية معينة فبتضحيته برأس ماله يحصل على مقابل مالي و هو مبلغ الفائدة.

أما من الناحية الفلسفية فاعتبر أرسطو أن كسب الفائدة إثراء غير طبيعي،مبررا ذلك أن النقود غير منتجة في حد ذاتها، ولذلك فإن الفوائد مرذولة وتعتبر من قبيل الإثراء غير الطبيعي، واعتبر أن كل فائدة تدفع على اقتراض النقود فهي ربا (Usury) فالنقود مجرد وسيط للتبادل، وعندما تستعمل للحصول من وراء اقتراضها على زيادة فائدة فإنها(أي النقود) تخرج عن وظيفتها الأساسية كوسيط للتبادل، ولا داعي لكي تزيد النقود بمجرد انتقالها من يد إلى يد أخرى وفي ذلك قال كلمته الشهيرة إن النقد لا يلد النقد.

ومن الناحية الشرعية فلقد جاء الاسلام و حرم الربا في القرآن و السنة الشريفة ، حيث عرف الربا قبل الاسلام على أنه الزيادة في مال الدين مقابل الأجل و هو ما يعرف بربا الديون و كان أخد الربا منبوذ في الديانات السماوية السابقة لقوله تعالى :

" فَبِظُلْمٍ مِنَ الَّذِينَ هَادُوا حَرَّمْنَا عَلَيْهِمْ طَيِّبَاتٍ أُحِلَّتْ لَهُمْ وَبِصَدِّهِمْ عَنْ سَبِيلِ اللَّهِ كَثِيرًا ﴿١٦٠﴾ وَأَخْذِهِمُ الرِّبَا وَقَدْ نُهُوا عَنْهُ وَأَكْلِهِمْ أَمْوَالَ النَّاسِ بِالْبَاطِلِ وَأَعْتَدْنَا لِلْكَافِرِينَ مِنْهُمْ عَذَابًا أَلِيمًا ﴿١٦١﴾ "[1] ففي هذه الآية دلالة واضحة على أن الربا كان محرماً عند اليهود وأنهم نُهوا عن أخذ الربا، أما عند العرب قبل مجيء الإسلام فالربا كان من الأفعال المنبوذة والدليل على ذلك أنه عندما تهدم سور الكعبة و أرادت قريش إعادة بنائه حرصت على أن تجمع الأموال اللازمة لذلك من البيوت التي لا تتعامل بالربا، حتى لا يدخل في بناء

[1] سورة النساء الآية 160-161

البيت مال حرام، فلقد نهاهم أبو وهب من إدخال كسب الربا في بنائها، فقد روى الإمام ابن إسحاق، انه لما تم هدم الكعبة و أرادوا إعادة بنائها ، قام وهب بن عمرو بن عائز بن عبد بن عمران بن مخزوم فتناول من الكعبة حجراً، فوثب من يده حتى رجع إلى موضعه .فقال" يا معشر قريش ألا تدخلوا في بنائها من كسبكم إلا طيباً لا يدخل فيها مهر بغي، ولا بيع ربا، ولا مظلمة من أحد من الناس"

وحرم الإسلام الربا في نص القران لقوله تعالى " ﴿الَّذِينَ يَأْكُلُونَ الرِّبَا لَا يَقُومُونَ إِلَّا كَمَا يَقُومُ الَّذِي يَتَخَبَّطُهُ الشَّيْطَانُ مِنَ الْمَسِّ ذَلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا إِنَّمَا الْبَيْعُ مِثْلُ الرِّبَا وَأَحَلَّ اللَّهُ الْبَيْعَ وَحَرَّمَ الرِّبَا فَمَنْ جَاءَهُ مَوْعِظَةٌ مِنْ رَبِّهِ فَانْتَهَى فَلَهُ مَا سَلَفَ وَأَمْرُهُ إِلَى اللَّهِ وَمَنْ عَادَ فَأُولَئِكَ أَصْحَابُ النَّارِ هُمْ فِيهَا خَالِدُونَ * يَمْحَقُ اللَّهُ الرِّبَا وَيُرْبِي الصَّدَقَاتِ وَاللَّهُ لَا يُحِبُّ كُلَّ كَفَّارٍ أَثِيمٍ﴾ [2] و أحاديث الرسول عليه الصلاة والسلام التى دلت على تحريم الربا كثيرة ومنها: عن أبي سعيد الخدري قال :قال الرسول عليه الصلاة والسلام" الذهب بالذهب، والفضة بالفضة والبر بالبر والشعير بالشعير، والتمر بالتمر، والملح بالملح، مثلا بمثل ، يدا بيد، فمن زد أو استزاد فقد أربى الآخذ والمعطي فيه سواء".[3] وقال رسول الله صلى الله عليه وسلم أيضا "أربعة حق على الله أن لا يدخلهم الجنة ولا يذيقهم نعيمها : مدمن الخمر وأكل الربا وأكل مال اليتيم بغير حق والعاق لوالديه إلا أن يتوبوا "[4]

من الناحية البيداغوجية و نظرا لخبرتنا التى فاقت خمس سنوات تدريس لمقياس الرياضيات المالية، فلقد حاولنا في هذه المطبوعة الاعتماد على عدة نقاط بيداغوجية لكونها موجهة للطلبة من بينها :

- الايجاز و الاختصار في طرح الدروس و ذلك باعطاء أفكار مباشرة و دون الاطالة في الطرح.
- وضع أمثلة مبسطة مع الحلول بطريقة منهجية بسيطة.
- وضع تمارين محلولة لكل فصل .
- الاعتماد على أشكال و منحنيات لتسهيل الفهم و كذلك التقليل من الكتابة الوصفية.
- الترتيب و التسلسل في الافكار حسب التقدم في الدروس.
- اعتمدنا على مراجع متخصصة في مجال الرياضيلت المالية.
- حاولنا ترجمة غالبية المصطلحات للغة الانجلزية لتسهيل البحث للطلبة في المراجع باللغة الانجلزية.

---

[2] سورة البقرة الآية 275- 276

[3] حديث رواه مسلم

[4] أخرجه الحاكم من حديث أبي هريرة

الفصل الأول : مكتسبات رياضية

خلال هذا الفصل سنقوم بمراجعة بعض المكتسبات الرياضية التى تصادفنا في الفصول الموالية المتعلقة بالرياضيات المالية والتى لا بذ من معرفتها وفهمها لتسهيل مختاف العمليات الحسابية المتعلقة بالرياضيات المالية.

1.1 القوى Powers

القوة النونية لعدد هو حاصل ضرب هذا العدد مع نفسه n مرة. و نكتب العدد a قوة n على الشكل التالي :

$$\boxed{\boldsymbol{a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots.\times a = \prod_{i=1}^{n} a_i}}$$

- **حالات خاصة**

$a^1 = a$

$1^n = 1$

$0^n = 0 \ /n \neq 0$

- **عمليات على القوى**

1- $\mathrm{a}^{-\mathrm{n}} = \frac{1}{\mathrm{a}^{\mathrm{n}}}$

2- $\mathrm{a}^{\mathrm{n}} \times \mathrm{a}^{\mathrm{m}} = \mathrm{a}^{\mathrm{n+m}}$

3- $\frac{\mathrm{a}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{a}^{\mathrm{m}}} \times = \mathrm{a}^{\mathrm{n-m}}$

4- $(\mathrm{a}^{\mathrm{m}})^{\mathrm{n}} = \mathrm{a}^{\mathrm{m\times n}}$

5- $(\mathrm{a} \times \mathrm{b})^{\mathrm{n}} = \mathrm{a}^{\mathrm{n}} \times \mathrm{b}^{\mathrm{n}}$

6- $\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{a}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{b}^{\mathrm{n}}} \quad /\mathrm{b} \neq 0$

7- $\mathrm{a}^{\frac{1}{\mathrm{n}}} = \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}$

مثال1-1

1- $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = 0.04$

2- $10^2 \times 10^3 = 10^5 = 100000$

3- $\frac{10^4}{10^2} = 10^2 = 100$

4- $(4^3)^2 = 4^6 = 4096$

5- $(5 \times 2)^2 = 5^2 \times 2^2 = 100$

-6 $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6^2}{5^2} = 1.44$

-7 $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16} = 4$

2.1 اللوغاريتم Logarithm

يعرف اللوغاريتم الطبيعي أو النيبيري نسبة الى العالم (John Napier 1550-1617) بصورة العدد X الموجب تماما بالدالة ln(X) ، و التي تتميز بالخصائص التالية :

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^y) = y\ln(x)$$

الدالة الأسية هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية بحيث :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\ e^{ln(x)} = x$$

$$\forall y \in \mathbb{R}\ ln(e^y) = y$$

مثال2-1

-1 $\ln(9) = \ln(3) + \ln(3) = 2.197$

-2 $\ln(10) = \ln(20) - \ln(2) = 2.302$

-3 $\ln(16) = 2\ln(4) = 2.772$

-4 $\ln(\sqrt{5}) = \ln\left(5^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ln(5) = 0.804$

3.1 المتتاليات الحسابية Arithmetic progression

المتتالية الحسابية عبارة عن متتالية من الاعداد بحيث يكون الفرق بين حدين متتاليين ثابت و هو أساس هذه المتتالية ، و تعرف المتتالية الحسابية من خلال العلاقات الرياضية التالية :

- **عبارة الحد العام**

$$\boxed{U_n = U_0 + n \times r}$$

$$\boxed{\boldsymbol{U_n = U_m + (n - m) \times r}}$$

- **العلاقة بين حديين متتاليين**

$$\boxed{\boldsymbol{U_{n+1} = U_n + r}}$$

- **علاقة مجموع متتالية حسابية**

$$\boxed{\boldsymbol{S_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)}}$$

بحيث :

- U_n الحد الأخير
- U_0 الحد الأول
- n عدد الحدود
- r الأساس
- S_n مجموع حدود المتتالية

***مثال* 1– 3**

- الحد الخامس و العاشر لمتتالية حسابية معرفة بحدها الاول $U_0 = 4$ و أساسها $r = 3$ هو كالتالي :

$$U_5 = 4 + 5 \times 3 = 19$$

$$U_{10} = 4 + 10 \times 3 = 34$$

- الحد الخامس عشر بدلالة العاشر يحسب كالتالي :

$$U_{15} = 34 + 5 \times 3 = 49$$

- مجموع عشرين حد الاولى تحسب كالتالي :

$$U_{10} = 4 + 20 \times 3 = 64$$

$$S_{20} = \frac{21}{2}(4 + 64) = 714$$

4.1 المتتاليات الهندسية Geometric series

المتتالية الهندسية عبارة عن متتالية من الاعداد بحيث تكون النسبة بين حدين متتاليين ثابتة و هو أساس هذه المتتالية ، و تعرف المتتالية الهندسية من خلال العلاقات الرياضية التالية :

- **عبارة الحد العام**

$$\boxed{\boldsymbol{U_n = U_0 \times q^n}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{U_n = U_m \times q^{n-m}}}$$

- **العلاقة بين حديين متتاليين**

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{U_{n+1}}{U_n} = q \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n \times q}}$$

- **علاقة مجموع متتالية هندسية**

$$\boxed{\boldsymbol{S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = U_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}}$$

بحيث :

- U_n : الحد الاخير
- U_0 : الحد الاول
- n : عدد الحدود
- q : الأساس
- S_n : مجموع حدود المتتالية

مثال 1–4

السلسلة التالية من الأعداد تشكل متتالية هندسية 4، 8.8 ، 19.36، 42.592، 93.7024، ....

بحيث حدها الاول يساوي 4 و أساسها q يقدر بـ:

$$\frac{8.8}{4} = \frac{19.36}{8.8} = \frac{42.592}{19.36} = \cdots\ldots = 2.2$$

- الحد السابع يقدر بـ :

$$U_7 = 4 \times 2.2^7 = 997.74315$$

- مجموع 8 حدود الاولى يقدر بـ :

$$S_n = 4 \times \frac{1 - 2.2^8}{1 - 2.2} = 1825.86245$$

5.1 حل معادلة عن طريق الحصر

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a) \times f(b) < 0$

فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال. مع العلم أن $m = \frac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a, b]$ و لإيجاد حل للمعادلة نقوم بتعويض a أو b بـ m و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

مثال 1–5

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 - 3x - 3$:

- المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[2,3]$ لان: $f(2) = -1$ و $f(3) = 15$ و عليه $f(2) \times f(3) < 0$
- بحساب $f(m)$ ، حيث m هو مركز $[2,3]$، نعين حصرا لـ α بطريقة التصنيف

$$f(m) = f\left(\frac{2+3}{2}\right) = f(2.5) = 5.725$$

$$f(m1) = f\left(\frac{2+2.5}{2}\right) = f(2.25) = 1.640625$$

$$f(m2) = f\left(\frac{2 + 2.25}{2}\right) = f(2.125) = 0.2207$$

وعليه الحل α محصور بين القيمتين 2 و 2.25

الفصل الثاني : الفائدة البسيطة ***Simple Interest***

1.2 مفاهيم حول الفائدة

1- مفهوم الفائدة ***Interest***

الفائدة عبارة عن مبلغ مالي يتحصل عليه المقرض (A debtor) أو المستثمر بعد إقراضه أو توظيفه لمبلغ مالي محدد خلال مدة زمنية محددة من طرف المستقر ض أو البنك (A creditor) ، و يعد هذا المبلغ أي الفائدة بمثابة أجرة المبلغ الموظف مقابل استفادة الطرف الآخر من هذا الأخير خلال هذه الفترة.

و يخضع تقييم مبلغ الفائدة لعدة عوامل تتناسب معه :

2- المبلغ الموظف أو رأس المال ***The principal***

يتمثل المبلغ الموظف رأس المال عادة في المدخرات المالية للأشخاص التي يودعونها لدى البنوك التجارية أو صناديق الادخار بغية تجنب ضياع مدخراتهم و كذلك الحصول على فوائد دورية من جهة و من جهة أخرى يمكن أن يكون استثمار مالي للمؤسسات الاقتصادية من خلال توظيفها لمبالغ مالية بغية الحصول على عائد المتمثل في الفائدة و تلجا المؤسسات عادة لهذا التوظيف إذا كان معدل الفائدة اكبر من عوائد الفرص البديلة في السوق، كما يشمل هذا المبلغ الموظف مختلف القروض بين مختلف الأشخاص إما الطبيعية أو المعنوية.

3- مدة التوظيف ***The term***

تتمثل في المدة الزمنية التى يبقى فيها رأس المال لدى البنك أو عند المستقرض فان لم تتجاوز هذه المدة السنة الواحدة فيتم احتساب مبلغ الفائدة باستعمال الفائدة البسيطة (ما سنراه في هذا الفصل) أما إذا تجاوزت السنة فيتم احتساب مبلغ الفائدة باستعمال الفائدة المركبة (ما سنراه في الفصل الثالث).

4- معدل الفائدة ***Interest Rate***

معدل الفائدة هو النسبة المئوية التي يتم على أساسها احتساب مبلغ الفائدة و عادة ما يكون سنوي أي يتم استحقاق مبلغ الفائدة بعد مرور سنة كاملة على توظيف المبلغ، و يمكن أن يستعمل معدلات فائدة غير سنوية مثلا شهرية أو سداسية و سنتطرق لذلك في الفصول اللاحقة.

2.2 مفهوم الفائدة البسيطة

الفائدة البسيطة هو المبلغ الذى يحسب على أساس مدة التوظيف الإجمالية مع بقاء رأس المال ثابت أي لا تضاف إليه الفوائد عند تاريخ استحقاقها مثل نهاية السنة لما نستعمل معدل فائدة سنوي، و لذلك تستعمل الفائدة البسيطة لما تكون مدة التوظيف أقل من سنة.

3.2 صيغة احتساب الفائدة البسيطة

تحسب الفائدة البسيطة من خلال العلاقة التالية :

ترميز :

I : *الفائدة البسيطة*

C : *رأس المال*

i : *معدل الفائدة*

n : *مدة التوظيف*

$$\boxed{\boldsymbol{I = C \times i \times n}}$$

مثال2-1

من خلال توظيف مبلغ قيمته 20000 دج في البنك لمدة سنتين و بمعدل فائدة سنوي 6 %،نتحصل على فائدة بسيطة بقيمة 2400 د

$$I = 20000 \times \frac{6}{100} \times 2$$

$$I = 2400$$

4.2 تحديد مدة التوظيف The Term of a Loan

مدة التوظيف هي المدة الزمنية الفعلية التي يبقى فيها المبلغ عند المستقرض و يعبر عنها بعدد السنوات حتى تتناسب مع معدل الفائدة الذى بدوره معدل سنوي ، معنى ذلك أن الفائدة المحسوبة بالمعدل السنوي

تستحق على المبلغ الأصلي الا بعد مرور سنة كاملة، و يمكن لمدة التوظيف أن تختلف عن السنة و هذا في غالب الأحوال لذلك لا بد من إجراء بعض التغييرات في عملية حساب الفائدة.

- **إذا كان معبر عليها بالأشهر:**

مدة التوظيف يمكن أن تكون عبارة عن أشهر لذلك يتم تقسيم المدة على 12.

$$n = \frac{\text{عدد الأشهر}}{12}$$

مثال 2–2

مبلغ قيمته 22000 دج تم توظيفه لمدة 7 أشهر بمعدل فائدة 6 % ، يحصل صاحبه على :

$$\mathrm{I} = 22000 \times \frac{6}{100} \times \frac{7}{12}$$

$$\mathrm{I} = 770$$

- **إذا كان معبر عليها بالأيام**

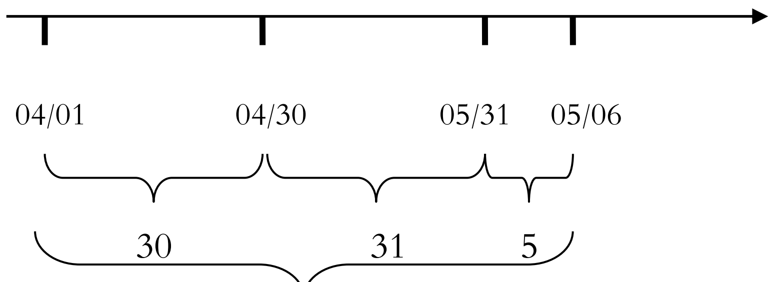
إذا كانت المدة معبر عليها بالأيام فهناك عدة طرق لحساب مدة التوظيف إلا انه يوجد فرق طفيف في مبلغ الفائدة بين هذه الطرق، وقبل أن نتطرق لمختلف الطرف لا بذ من توضيح كيفية حساب المدة الفعلية للتوظيف.

يتم تحديد المدة الفعلية actual time للتوظيف انطلاقا من تواريخ محددة أي تاريخ التوظيف و تاريخ السحب من خلال حساب أيام التوظيف ابتداء من أول يوم لآخر يوم منقوص منها يوم واحد أو بطريقة أخرى عدم احتساب اليوم الأول للتوظيف أو عدم احتساب اليوم الأخير للتوظيف (و هذا الأخير معمول به في اتفاقيات الأسواق المالية).

مثال 3–2

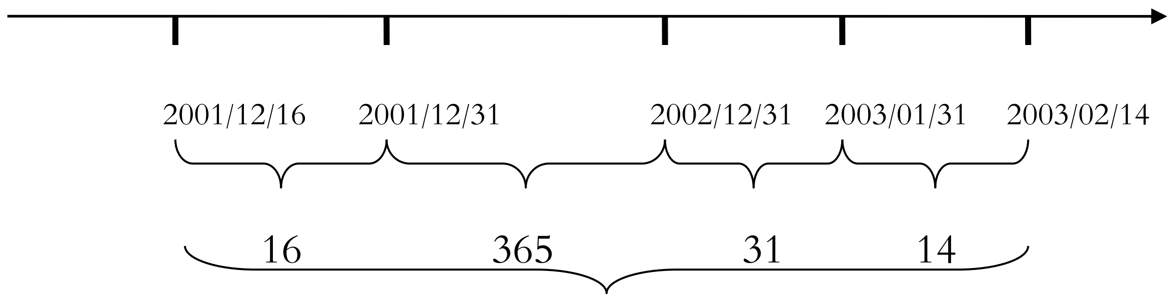
أحسب المدة الفعلية للمجالات الزمنية التالية :

- من 2009/04/01 إلى غاية 2009/06/05



(30+31+5) -1=65

- من 2001/12/16 إلى 2003/02/14



(16+365+31+14) -1= 425

1- الطريقة الصحيحة The Exact Method

لإيجاد المدة يتم تقسيم عدد الأيام الفعلية للتوظيف على عدد أيام السنة الفعلية إما 365 يوم بالنسبة للسنة العادية أو 366 يوم بالنسبة للسنة الكابسة ، و تسمى الفائدة المحسوبة بالفائدة المدنية و تحسب غالبا هذه الفائدة لما يكون التعامل بين الأشخاص الطبيعية و تعتبر هذه الطريقة أكثر دقة و أكثر واقعية في عملية الحساب.

و يمكن التفريق بين السنة العادية و السنة الكابسة من خلال عملية التقسيم على العدد 4 ، فكل السنوات التي تقبل العدد 4 كقاسم تعتبر سنة كابسة أي عدد أيامها 366 يوم.

$$n = \frac{\text{المدة الفعلية}}{365} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{المدة الفعلية}}{366}$$

2- الطريقة التجارية Banker's rule

بالنسبة لهذه الطريقة تقسم المدة الفعلية للتوظيف على 360 عدد أيام السنة التجارية و هذا المعيار معتمد في البنوك التجارية بشكل عام و لذلك تسمى الفائدة المحسوبة على أساس هذا المعيار بالفائدة التجارية.

$$n = \frac{\text{المدة الفعلية}}{360}$$

3- طريقة Ordinary interest 360/30

هذه الطرقة لها استخدام واسع الانتشار و تعتمد على فرضية تساوي أيام الشهر كلها ل 30 يوم، و السنة من 12 شهر أي 360 يوم. و لهذه الطريقة عدة تطبيقات مختلفة منها :

- **الطريقة الأوربية** : تعتبر كل الأشهر مكونة من 30 يوم فان كان تاريخ التوظيف أو السحب 31 لا يحتسب .

مثال 4-2

مدة التوظيف بين 02/28 إلى غاية 04/05

- من 02/28 إلى 02/30 ⟵ 3 أيام
- من03/01 إلى 03/31 ⟵ 30 يوم
- من 04/01 إلى 04/05 ⟵ 05 أيام

$$(3+30+5) -1 = 37$$

تعتمد برمجية Excel في حساب مدة الفعلية للتوظيف على هذه الطريقة من خلال دالة jours360 و إدخال الطريقة 1.

- **الطريقة الألمانية** : تختلف مع الطريقة الأوربية إلا في عدد أيام شهر فبراير فينتهي ب 28 يوم أو 29 يوم. نأخذ المثال رقم 4 باستعمال هذه الطريقة تتحصل على :

مدة التوظيف بين 02/28 إلى غاية 04/05 :

- من 02/28 إلى 02/30 ⟵ 1 يوم (نفرض سنة عادية)
- من03/01 إلى 03/31 ⟵ 30 يوم
- من 04/01 إلى 04/05 ⟵ 05 أيام

35 = 1- (1+30+5)

تعتمد برمجية Excel في حساب مدة الفعلية للتوظيف على هذه الطريقة من خلال دالة jours360 و إدخال الطريقة 0.

مثال 5-2

بتاريخ 15 جانفي تم توظيف مبلغ 15000 دج بمعدل فائدة سنوي 6 % و تم سحبه بتاريخ 15 ماي من نفس السنة . فما هو مبلغ الفائدة التجارية و الفائدة المدنية المتحصل عليها ؟

أولا :نقوم بحساب المدة الفعلية للتوظيف

- من 15 جانفي لغاية 31 جانفي ⟵ 17 يوم
- فيفري (نفترض أنها سنة عادية) ⟵ 28 يوم
- مارس ⟵ 31 يوم
- افريل ⟵ 30 يوم
- ماي ⟵ 15 يوم

$$n = (17 + 28 + 31 + 30 + 15) - 1 = 120$$

ثانيا :نقوم بحساب الفائدة التجارية

$$I = 15000 \times \frac{6}{100} \times \frac{120}{360}$$

$$I = 300$$

ثالثا: حساب الفائدة المدنية

$$I = 15000 \times \frac{6}{100} \times \frac{120}{365}$$
$$I = 289.89$$

5.2 حساب الجملة المكتسبة The accumulated sum

الجملة المكتسبة هي إجمالي المبلغ المتحصل عليه في آخر مدة التوظيف أي تتكون من رأس المال الموظف إضافة إلى الفوائد المترتبة عن التوظيف، و تحسب بالعلاقة التالية :

$$C_n = C + I$$
$$C_n = C + C \times i \times n$$
$$\boxed{\boldsymbol{C_n = C(1 + i \times n)}}$$

و من خلال هذه العلاقات الرياضية لحساب الجملة يمكن استنتاج علاقات أخرى :

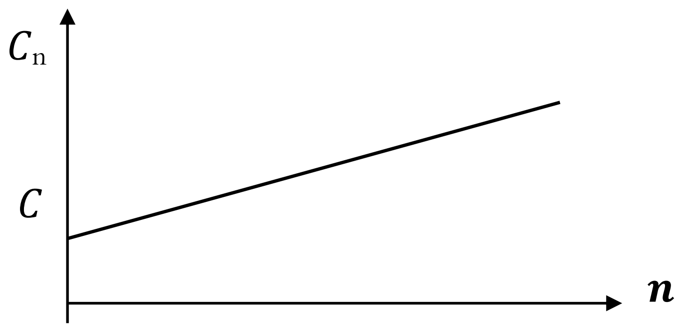
1- مبلغ الفائدة الذي يمثل الفرق بين الجملة المكتسبة و رأس المال

$$\boxed{\boldsymbol{I = C_n - C}}$$

2- معدل الفائدة الذي يعتبر كعائد على رأس المال

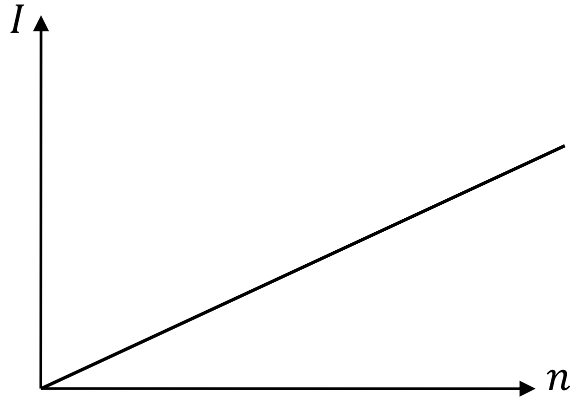
$$\boxed{\boldsymbol{i = \frac{I}{C.n}}}$$

يمكن أن نعبر عن الجملة المكتسبة من خلال دالة تالفية متزايدة تماما تتغير بتغير رأس المال، معدل الفائدة و مدة التوظيف، أما مبلغ الفائدة فيمكن أن نعبر عليه من خلال دالة خطية متزايدة تتغير بتغير رأس المال ، معدل الفائدة و مدة التوظيف.



الشكل (1-2) : منحنى الجملة المكتسبة للفائدة البسيطة[5]

[5] Walder.M (2008),Mathématiques financières, DUNOD,P:08



الشكل (2-2) : منحنى الفائدة البسيطة[6]

مثال 2-6

الجملة المكتسبة لمبلغ قدره 35000 دج وظف لمدة سنتين و نصف بمعدل فائدة 5 %.

$$C_n = 35000\left(1 + \frac{5}{100} \times \left(2 + \frac{6}{12}\right)\right)$$

$$C_n = 39375$$

6.2 معدل الفائدة المتوسط Average interest rate

يحتسب هذا المعدل فى حالة توظيف عدة مبالغ في آن و احد لكن بمعدلات مختلفة و لأزمنة متفاوتة و لذلك يمكن للبنك معرفة المعدل المتوسط الذى سوف يحصل علية من خلال توظيف عدة مبالغ أو بصيغة أخرى المعدل الوحيد الذى يطبق على كل المبالغ و يعطينا نفس الفائدة الإجمالية المتحصل عليها باستعمال معدلات مختلفة و نحصل عليه من خلال العلاقة التالية :

الازمنة	المعدلات	المبالغ
n_1	i_1	C_1
n_2	i_2	C_2
.	.	.
..	..	..
n_k	I_k	C_k

[6] Walder.M (2008),op.cit,P:07

الفائدة الإجمالية تحسب بالعلاقة التالية :

$$\boldsymbol{I_{K} = C_{1}.\, i_{1}.\, n_{1} + C_{2}.\, i_{2}.\, n_{2} + \cdots + C_{k}.\, i_{k}.\, n_{k}}$$

إذا رمزنا للمعدل المتوسط ب T فيمكن كتابة صيغة الفائدة الإجمالية من خلال هذا المعدل و ذلك باستبدال معدلات الفائدة المختلفة بمعدل واحد على الشكل:

$$I_{K} = C_{1}.\,T.\,n_{1} + C_{2}.\,T.\,n_{2} + \cdots + C_{k}.\,T.\,n_{k}$$

بعد مساواة الطرفين نحصل على:

$$C_{1}.\,T.\,n_{1} + C_{2}.\,T.\,n_{2} + \cdots + C_{k}.\,T.\,n_{k} = C_{1}.\,i_{1}.\,n_{1} + C_{2}.\,i_{2}.\,n_{2} + \cdots + C_{k}.\,i_{k}.\,n_{k}$$

$$T = \frac{C_{1}.\,i_{1}.\,n_{1} + C_{2}.\,i_{2}.\,n_{2} + \cdots + C_{k}.\,i_{k}.\,n_{k}}{C_{1}.\,n_{1} + C_{2}.\,n_{2} + \cdots + C_{k}.\,n_{k}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T = \frac{\sum C_{k}.\, i_{k}.\, n_{k}}{\sum C_{k}.\, n_{k}}}}$$

مثال 7-2

أحسب معدل الفائدة المتوسط ف لثلاث مبالغ وظفت بتاريخ 20 مارس 2015 على النحو التالي :

- 50000 دج لمدة 45 يوم بمعدل فائدة 6%.
- 80000 دج لمدة 35 يوم بمعدل فائدة 7%.
- 95000 دج لمدة 60 يوم بمعدل فائدة 5%.

$$T = \frac{\left(50000 \times \frac{6}{100} \times \frac{45}{360}\right) + \left(80000 \times \frac{7}{100} \times \frac{35}{360}\right) + \left(95000 \times \frac{5}{100} \times \frac{60}{360}\right)}{\left(50000 \times \frac{45}{360}\right) + \left(80000 \times \frac{35}{360}\right) + \left(95000 \times \frac{60}{360}\right)}$$

$$T = 5.73\%$$

7.2 معدل الفائدة المتناسب Nonannual Interest Rates

سعر الفائدة يفترض أن يكون معدل سنوي في حين أن هذا الافتراض ليس مطلق ، أي لا يوجد سبب لعدم تحديد سعر الفائدة كمعدل شهري ، أو أسبوعي ، أو يومي ، أو أي وحدة زمنية أخرى نريدها ، وفي

الواقع يحدث هذا في بعض الأحيان. نحن نفترض معدلات سنوية ببساطة لأنه من المعتاد أن نستعمل ذلك، وذلك لأجل وجود معيار مشترك يجعل من السهل مقارنة معدلات مختلفة.

و عليه فيمكن تعريف معدل المتناسب $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}$ للفترة $\boldsymbol{m}$ على أنه المعدل الذي يحقق نفس الفائدة البسيطة الذي يحققها المعدل السنوي (هذا إلا في حالة الفائدة البسيطة و لا ينطبق على الفائدة المركبة) . و ذلك من خلال العلاقة التالية :

$$\boldsymbol{C(1+i_{\mathrm{m}}\times m)=C(1+i)}$$

لكي تتحقق هذه المساواة لا بد من :

$$\boxed{\boldsymbol{i_{\mathrm{m}}\times m=i\Rightarrow\ i_{\mathrm{m}}=\frac{i}{m}}}$$

سوف نذكر بعض المعدلات التناسبية و كيفية حسابها من خلال الجدول التالي :

كيفية الحساب	عدد الفترات	المعدل	الفترة
i	1	i	السنة
$\frac{i}{2}$	2	i_s	سداسي
$\frac{i}{3}$	3	i_q	رباعي
$\frac{i}{4}$	4	i_t	ثلاثي
$\frac{i}{12}$	12	i_m	شهري

مثال 8-2

تحقق أن نفس الجملة تتحصل عليها بعد توظيف مبلغ 1000 دج بمعدل سنوي 12% مع المعدلات المتناسبة السداسي، الثلاثي و الشهري.

- المعدل السنوي :

$$C_n=1000(1+0.12)=1200$$

- المعدل السداسي

$$i_s=\frac{12}{2}=6$$

$$C_n = 1000(1 + 0.06 \times 2) = 1200$$

- المعدل الثلاثي

$$i_t = \frac{12}{4} = 3$$
$$C_n = 1000(1 + 0.03 \times 4) = 1200$$

- المعدل الشهري

$$i_m = \frac{12}{12} = 1$$

$$C_n = 1000(1 + 0.01 \times 12) = 1200$$

تمارين محلولة للفصل الثاني

تمرين 1-2

أحسب الفائدة البسيطة المتحصل عليها بعد توظيف مبلغ 125000دج لمدة سنتين و ثلاث أشهر بمعدل فائدة سنوي 7% ؟

تمرين 2-2

ما هو معدل الفائدة الواجب تطبيقه لكي نحصل على فائدة قدرها1400 دج بعد سنتين من توظيف مبلغ 10000دج ؟.

تمرين 3-2

أحسب جملة قرض قيمته 42000 دج يسدد بعد سنة و نصف بمعدل فائدة 6% ؟ و ما هو المعدل الواجب تطبيقه لكي نحصل على جملة قدرها 46410دج ؟

تمرين 4-2

أحسب المبلغ الواجب إيداعه لدى البنك من أجل الحصول على فائدة قدرها 420 دج بعد سنتين ونصف و بمعدل فائدة بسيطة 5% ؟

تمرين 5-2

ما هي المدة اللازمة لكي ينمو مبلغ بنسبة 50 % بعد توظيفه بمعدل فائدة بسيطة 5% ؟

تمرين 6-2

تحصل شخص على قرض بقيمة 150000 دج بتاريخ 31 أكتوبر 2014 على أن يسدده بتاريخ 15 مارس 2015 بمعدل فائدة بسيطة 6%.

- أحسب الجملة المكتسبة باستعمال :
- الطريقة التجارية
- طريقة360/30 (الطريقة الأوربية و الطريقة الألمانية)

- الطريقة الصحيحة

تمرين 2-7

الفرق بين الفائدة التجارية (أساس 360 يوم) و الفائدة المدنية (أساس 365) لمبلغ مالي وظف لمدة 50 يوم بمعدل فائدة 7% يقدر ب 0.293 دج.

- أحسب قيمة المبلغ الموظف ؟

تمرين 2-8

أحسب المعدل المتوسط للتوظيف للمبالغ التالية :

- مبلغ 4500 دج بمعدل 6% من تاريخ 13 مارس إلى 25 أوت
- مبلغ 8200 دج بمعدل 7% من تاريخ 14 ابريل إلى غاية 15 سبتمبر
- مبلغ 10000 دج بمعدل 8% من تاريخ 12 ماي إلى غاية 25 سبتمبر

تمرين 2-9

في 01 مارس 2012 تم توظيف مبلغين 15000دج و 17000دج بمعدل فائدة بسيطة 7% و 5% على التوالي .

- حدد مدة التوظيف التي من أجلها تتساوى فيها كل من جملة المبلغ الأول و الثاني؟
- حدد تاريخ تساوى جمل المبلغين ؟
- مثل برسم تقريبي تطور كل من منحنيات الجملتين؟

تمرين 2-10

تحصل شخص على قرض بقيمة 120000دج لمدة سنة و نصف بمعدل فائدة سنوي بسيطة 6%

- أحسب الجملة المسددة في نهاية المدة؟
- أحسب الجملة المسددة في نهاية المدة باستعمال المعدلات المتناسبة : السداسي، الرباعي، الفصلي و الشهري؟

حلول التمارين الفصل الثاني

حل التمرين 1-2

الفائدة المتحصل عليها تقدر بـ :

$I = C \times i \times n$ مع $n = 24+3 = 27$ شهر

$$I = 125000 \times 0.07 \times \frac{27}{12} = 19687.5$$

حل التمرين 2-2

معدل الفائدة الواجب تطبيقه هو :

$$i = \frac{I}{C \times N} = \frac{1400}{10000 \times 2}$$

$$i = 7\%$$

حل التمرين 3-2

الجملة المتحصل عليها تساوي :

$$C_n = C(1 + i \times n)$$
$$C_n = 42000\left(1 + 0.06 \times \frac{18}{12}\right)$$
$$C_n = 45780$$

المعدل الواجب تطبيقه هو :

$$i = \left(\frac{C_n}{C} - 1\right) \div n = \left(\frac{46410}{42000} - 1\right) \div 1.5$$
$$i = 7\%$$

حل التمرين 4-2

المبلغ الواجب توظيفه خلال سنتين و نصف هو :

$$C = \frac{I}{i \times n} = \frac{420}{0.05 \times 2.5}$$

$$C = 3360$$

حل التمرين 5-2

المدة اللازمة لكي ينمو مبلغ بنسبة 50% بمعدل فائدة بسيطة 5% هي :

$$1.5\, C = C(1 + i.n)$$

$$1.5 = (1 + i.n)$$
$$n = \frac{0.5}{i} = \frac{0.5}{0.05}$$
$$n = 10 \text{ سنوات}$$

حل التمرين 6–2

أولا نقوم بحساب المدة الفعلية للتوظيف

- 31 أكتوبر 2014 ⟵ 1 يوم
- نوفمبر 2014 ⟵ 30 يوم
- ديسمبر2014 ⟵ 31 يوم
- جانفي 2015 ⟵ 31 يوم
- فيفري 2015 ⟵ 28 يوم (لان 2015سنة عادية)
- مارس 2015 ⟵ 15 يوم

$$n = (1 + 30 + 31 + 31 + 28 + 15) - 1 = 135$$

- الجملة المكتسبة باستعمال الطريقة التجارية

$$C_n = C(1 + i \times n)/ \quad n = \frac{\text{المدة االفعلية}}{360}$$
$$C_n = 150000\left(1 + 0.06 \times \frac{135}{360}\right)$$
$$C_n = 153375$$

- الجملة المكتسبة باستعمال الطريقة الأوربية

- 31 أكتوبر 2014 ⟵ 0 يوم
- نوفمبر 2014 ⟵ 30 يوم
- ديسمبر2014 ⟵ 30 يوم
- جانفي 2015 ⟵ 30 يوم
- فيفري 2015 ⟵ 30 يوم
- مارس 2015 ⟵ 15 يوم

$$n = (0 + 30 + 30 + 30 + 30 + 15) - 1 = 134$$

$$C_n = 150000\left(1 + 0.06 \times \frac{134}{360}\right)$$

$$C_n = 153350$$

- الجملة المكتسبة باستعمال الطريقة الالمانية

- 31 أكتوبر 2014 ⟵ 0 يوم
- نوفمبر 2014 ⟵ 30 يوم
- ديسمبر2014 ⟵ 30 يوم
- جانفي 2015 ⟵ 30 يوم
- فيفري 2015 ⟵ 28 يوم (لان 2015سنة عادية)
- مارس 2015 ⟵ 15 يوم

$$n = (0 + 30 + 30 + 30 + 25 + 15) - 1 = 132$$

$$C_n = 150000\left(1 + 0.06 \times \frac{132}{360}\right)$$

$$C_n = 153300$$

- الجملة المكتسبة باستعمال الطريقة الصحيحة

$$C_n = 150000\left(1 + 0.06 \times \frac{135}{365}\right)$$

$$C_n = 153328.76$$

حل التمرين 7–2

حساب المبلغ الموظف

لدينا :

$$\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 = 0.293$$

$$\mathrm{C} \times 0.06 \times \frac{50}{360} - \mathrm{C} \times 0.06 \times \frac{50}{365} = 0.293$$

$$\mathrm{C} = \frac{0.293}{0.06 \times \left(\frac{50}{360} - \frac{50}{365}\right)}$$

$$\mathrm{C} = 2566.68$$

حل التمرين 8–2

المعدل المتوسط للتوظيف هو :

$$T = \frac{\sum C_k . i_k . n_k}{\sum C_k . n_k}$$

مدة توظيف المبلغ الأول من 13 مارس إلى 25 أوت هي :165 يوم

مدة توظيف المبلغ الثاني من 14 أفريل إلى 15 سبتمبر هي :154 يوم

مدة توظيف المبلغ الثالث من 12 ماي إلى 25 سبتمبر هي :136 يوم

$$T = \frac{\left(4500 \times \frac{6}{100} \times \frac{165}{360}\right) + \left(8200 \times \frac{7}{100} \times \frac{154}{360}\right) + \left(10000 \times \frac{8}{100} \times \frac{136}{360}\right)}{\left(4500 \times \frac{165}{360}\right) + \left(8200 \times \frac{154}{360}\right) + \left(10000 \times \frac{136}{360}\right)}$$

$$T = 7.183\%$$

حل التمرين 9–2

إيجاد المدة التى تتساوي فيها الجملتين

لدينا :

$$C_{n1} = C_{n2}$$
$$15000(1 + 0.07 \, . \mathrm{n}) = 17000(1 + 0.05 \, . \mathrm{n})$$
$$15000 + 1050 \, \mathrm{n} = 17000 + 850 \, \mathrm{n}$$
$$\mathrm{n} = 10$$

و منه تاريخ تساوي الجملتين هو 28 فيفري 2021

من أجل رسم منحنيين الجملتين نستعين بتعيين نقطتين من خلال معادلتي الجملتين

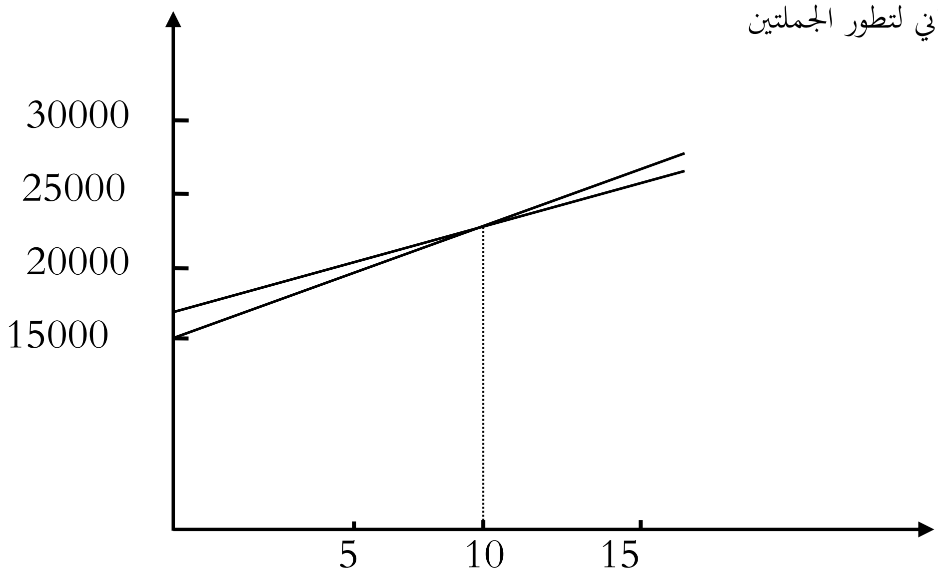
$$C_{n1} = 15000 + 1050 \, n$$

n	0	5	15
C_{n1}	15000	20250	30750

$$C_{n2} = 17000 + 850 \, n$$

n	0	5	15
C_{n2}	17000	21250	29750

الرسم البياني لتطور الجملتين



حل التمرين 10–2

الجملة المحصل عليها تقدر ب :

$$C_n = 120000(1 + 0.06 \times 1.5)$$
$$C_n = 130800$$

المعدلات المتناسبة للمعدل السنوي 6%

المدة	المعدل
سداسي	$\frac{6}{2} = 3$
رباعي	$\frac{6}{3} = 2$
ثلاثي	$\frac{6}{4} = 1.5$
شهري	$\frac{6}{12} = 0.5$

الجملة المحصل عليها باستعمال المعدل المتناسب السداسي تقدر ب :

$$C_n = 120000(1 + 0.03 \times 3)$$
$$C_n = 130800$$

الجملة المحصل عليها باستعمال المعدل المتناسب الرباعي تقدر ب :

$$C_n = 120000(1 + 0.02 \times 4.5)$$
$$C_n = 130800$$

الجملة المحصل عليها باستعمال المعدل المتناسب الثلاثي تقدر ب :

$$C_n = 120000(1 + 0.015 \times 6)$$
$$C_n = 130800$$

الجملة المحصل عليها باستعمال المعدل المتناسب الرباعي تقدر بـ :

$$C_n = 120000(1 + 0.005 \times 18)$$
$$C_n = 130800$$

الفصل الثالث : الخصم التجاري و تكافؤ الأوراق التجارية

غالبا ما يتم تسوية المعاملات الاقتصادية نقدا و لاسيما التجارية منها خاصة في الاقتصاديات الغير متطورة، إلا أن مقتضيات الحياة الاقتصادية و خاصة التجارية ساعدت على ظهور أدوات تجارية أخرى تتمثل في الأوراق التجارية تحل محل النقود و لها ميزات أدت إلى انتشارها و استعمالها على نطاق واسع بحيث تعطى فرصة للمتعاملين التجاريين الذين ليس بحوزتهم السيولة الكافية لإتمام إجراء معاملاتهم في ظروف اقتصادية و قانونية ، شرط أن تكون هذه الأوراق التجارية تحظى بالقبول العام عرفا و قانونا.و من مميزات هذه الأوراق التجارية انه يمكن لحاملها أن يطرحها لدى البنوك من أجل استرداد قيمتها و ذلك قبل تاريخ استحقاقها و ذلك مقابل خصم مبلغ معين من قيمتها و هذه الميزة ساعدت على تداول هده الأوراق بصفة كبيرة في المعاملات التجارية.

1.3 مفهوم الأوراق التجارية Trade bills

الأوراق التجارية عبارة عن صكوك محررة وفقا لمعايير شكلية و قانونية معينة حسب قوانين كل دولة[7] وتتضمن التزاماً تجارياً بدفع مبلغ نقدي مستحق الوفاء في تاريخ معين ، مع إمكان نقل الحق في الأوراق التجارية من شخص إلى آخر عن طريق التظهير، كما تعتبر الأوراق التجارية أداة وفاء و ائتمان في نفس الوقت و من خصائصها :

- أنها تمثل حقا نقديا.
- تحظى بالقبول العام كأداة وفاء.
- قابلة للتداول بطرق تجارية.
- مستحقة الدفع فورا أو لأجل محدد.

و سنذكر نوعين من الأوراق التجارية السفتجة والسند لأمر:

1- السفتجة Bill of exchange

السفتجة عبارة عن ورقة تجارية تتضمن أمر من الساحب للمسحوب عليه دفع مبلغ مالي محدد في تاريخ معين لطرف ثالث و هو المستفيد أو حامل السفتجة ، وغالبا ما ينشأ هذا السند جراء معاملات اقتصادية وخاصة تجارية بين المورد والزبون ففى حالة تعذر على الزبون التسديد نقدا يلجأ لتحرير سفتجة

[7] تضمن القانون التجاري الجزائري كل ما يتعلق بالأوراق التجارية في الكتاب الرابع من المادة 389 إلى غاية 543.

لفائدة المورد و المسحوب عليه غالبا ما يكون بنك ، كما تتميز السفتجة أنها قابلة للتظهير أي أنه يمكن للمستفيد أو لحاملها استعمالها للوفاء بدين. من خلال هذا المفهوم يفترض في عملية تحرير السفتجة و جود ثلاث أشخاص :

- الساحب : الشخص المدين الذي يحررها أو يصدرها.
- المسحوب علية : الطرف الذى يلتزم بدفع قيمتها في تاريخ محدد.
- الحامل أو المستفيد :الشخص الدائن الذي يستفيد من قيمة السفتجة بعد تقديها في الآجال المحدد للمسحوب عليه.

و عليه يجب توفر في السفتجة المعلومات التالية[8] :

- تسمية السفتجة (مثل حررت هذه السفتجة لأمر ...)
- اسم المسحوب عليه و المستفيد.
- تاريخ الاستحقاق و المكان الذي يجب فيه الدفع.
- بيان مكان و تاريخ إنشاء السفتجة و توقيع الساحب.

2- السند لأمر **Promissory note**

السند لأمر عبارة عن محرر من طرف شخص (الساحب) يلتزم فيه بدفع مبلغ مالي معين في تاريخ معين لطرف أخر و هو المستفيد. و يختلف عن السفتجة من ناحية الأطراف المتدخلة في عملية إنشاء السند، فالسند لأمر ينشأ من خلال العلاقة بين طرفين فقط الساحب و المستفيد و يمكن أن يكون سبب إنشاؤه تجاري أو غير تجاري، كما يجب أن يتوفر فيه كل المعلومات اللازمة مثل السفتجة.

2.3 الخصم التجاري **Discount**

الخصم التجاري يتمثل في المبلغ الذي يقتطعه البنك من قيمة الورقة التجارية التي تمثل القيمة الاسمية للورقة أي قيمة الدين المكتوب في الورقة التجارية مقابل توفير سيولة لصاحبها و هذه السيولة يعبر عليها بالقيمة الحالية للورقة أي المبلغ الذى يتحصل عليه صاحب الورقة يوم خصمها، فصاحب الورقة التجارية من المفترض أنه يستلم قيمتها حتى تاريخ استحقاقها إلا أنه في حالة احتياجه للسيولة يمكن له أن يقوم بخصمها لدى البنوك التجارية مقابل مبلغ خصم و يحسب على أساس معدل خصم.

[8] المادة 390 من ق.ت.ج

من خلال هذا المفهوم يتحدد الخصم التجاري من خلال الفرق بين القيمة الاسمية للورقة التجارية و القيمة الحالية لها.

$$\boxed{\boldsymbol{E_c = V_n - V_a}}$$

أو من خلال معدل الخصم و المدة الزمنية

$$\boxed{\mathbf{E_c = V_n \times i \times n}}$$

ترميز:

- E_c : قيمة الخصم التجاري
- V_n : القيمة الاسمية للورقة التجارية
- V_a : القيمة الحالية للورقة التجارية
- i : معدل الخصم التجاري
- n : مدة الخصم و هي المدة الفاصلة بين تاريخ الخصم و تاريخ الاستحقاق و يتم حسابها بنفس طريقة حسابها في الفائدة البسيطة.

مثال 1-3

قيمة الخصم التجاري لورقة تجارية قيمتها الاسمية 12000 دج تستحق بعد 45 يوم بمعدل خصم 6% هي :

$$E_c = 12000 \times 0.06 \times \frac{45}{360}$$
$$E_c = 90$$

3.3 القيمة الحالية للورقة التجارية Present worth

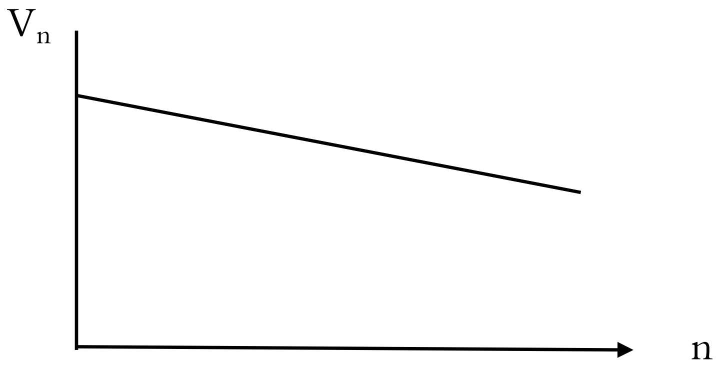
القيمة الحالية للورقة تمثل الفرق بين القيمة الاسمية للورقة و الخصم التجاري و يمكن حسابها بالعلاقة التالية :

$$\boldsymbol{V_a = V_n - E_c}$$

$$V_a = V_n - V_n \times i \times n$$

$$\boxed{V_a = V_n \times (1}$$

و يمكن تمثيل القيمة الحالية بيانيا من خلال هذه العلاقة الأخيرة باعتبارها علاقة تآلفية متناقصة في الزمن .



$$V_n \times (1 - i \times n)$$

الشكل (1-3) :القيمة الحالية لورقة تجارية[9]

مثال 2-3

القيمة الحالية لورقة تجارية قيمتها 15000 دج تم خصمها بمعدل خصم 5% قبل تاريخ استحقاقها بـ : 60 يوم تساوي :

$$V_a = 15000 \times \left(1 - 0.05 \times \frac{60}{360}\right)$$

$$V_a = 14875$$

4.3 الخصم العقلاني

لاحظنا في الخصم التجاري أنه تم حساب الفائدة المترتبة عن عملية الخصم على أساس القيمة الاسمية للورقة و هي نفس صيغة احتساب الفائدة المسبقة أي أن تسديد الفائدة يكون مسبق إلا أنه في الخصم العقلاني فيتم احتساب مبلغ الخصم على أساس القيمة الحالية يوم إجراء عملية الخصم و هي الصيغة التي نعتمد عليها في حساب الفائدة البسيطة البعدية و عليه فان صيغة الخصم العقلاني تكون كالتالي :

$$\boxed{E_r = V_a \times i \times n}$$

[9] Walder.M (2008),op.cit DUNOD,P:29

ترميز:

- E_{r} : قيمة الخصم التجاري
- V_{ar} : القيمة الحالية العقلانية للورقة التجارية

و منه القيمة الحالية العقلانية تختلف عن القيمة الحالية التجارية و تحسب كالآتي :

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{ar}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{n}} - \boldsymbol{E}_{\mathbf{r}}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{ar}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{n}} - \boldsymbol{V}_{\mathbf{ar}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{ar}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{ar}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{n}}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{ar}}(\mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{V}_{\mathbf{n}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V}_{\mathbf{ar}} = \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{n}}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}}$$

و من هذه العلاقة يمكن وضع صيغة الخصم العقلاني انطلاقا من القيمة الاسمية للورقة كالتالي :

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{r}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{n}} - \boldsymbol{V}_{\mathbf{ar}}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{r}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{n}} - \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{n}}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}_{\mathbf{r}} = \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{E}_{\mathbf{c}}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}}$$

مثال 3-3

الخصم العقلاني لورقة تجارية قيمتها الاسمية 25000 دج بمعدل خصم 6% و لمدة 6 أشهر يساوي :

$$E_{\mathrm{r}} = \frac{25000 \times 0.06 \times 0.5}{1 + 0.06 \times 0.5}$$

$$E_{\mathrm{r}} = 728.15$$

5.3 العلاقة بين الخصم التجاري و العقلاني

1- من خلال معرفتنا لصيغة حساب كل من الخصم التجاري و العقلاني نستنتج أن القيمة الحالية العقلانية أكبر من القيمة الحالية التجارية و بالتالي الخصم التجاري أكبر من الخصم العقلاني.

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{ar}} > \boldsymbol{V}_{\mathrm{a}} \Longleftarrow \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} > \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}$$

2- حاصل قسمة الخصم التجاري و العقلاني

$$\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}}{\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}} = \frac{(\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{V}_{\mathrm{ar}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}{\frac{\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}}}{1+\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}$$

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}}{\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}} = \mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}$$

3- حاصل قسمة ضرب المعدلين على الفرق بينهما يساوي القيمة الاسمية للورقة

$$\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}}{\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} - \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}} = \frac{(\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}) \times \frac{\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}}{(\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}) - \frac{\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}}$$

$$\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}}{\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} - \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}} = \frac{\left(\frac{\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}}^{2} \times \boldsymbol{i}^{2} \times \boldsymbol{n}^{2}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}\right)}{\frac{(\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{i}^{2} \times \boldsymbol{n}^{2}) - (\boldsymbol{V}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n})}{\mathbf{1} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}}}$$

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}}{\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} - \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{n}}}$$

مثال 4-3

قدم شخص للبنك ورقة تجارية تستحق بعد 70يوم من أجل خصمها بمعدل خصم 6% ، إذا كان الفرق بين الخصم التجاري و العقلاني هو 6.0543 .

- أحسب قيمة كل من الخصم التجاري و العقلاني ؟
- أحسب القيمة الاسمية للورقة ؟

- احسب القيمة الحالية التجارية و العقلانية ؟

لدينا :

$$\frac{E_{\mathrm{C}}}{E_{\mathrm{r}}} = 1 + i \times n = 1 + 0.06 \times \frac{70}{360} = 1.011666$$

$$E_{\mathrm{C}} = 1.01166\, E_{\mathrm{r}}$$

و لدينا

$$E_{\mathrm{C}} - E_{\mathrm{r}} = 6.0543 \Longrightarrow 0.011666 E_{\mathrm{r}} = 6.0543$$

$$E_{\mathrm{r}} = 518.94$$
$$E_{\mathrm{c}} = 524.99$$

و لدينا

$$V_{\mathrm{n}} = \frac{E_{\mathrm{C}} \times E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{C}} - E_{\mathrm{r}}} = \frac{524.99 \times 518.94}{524.99 - 518.94} = 45000$$

و منه القيمة الحالية التجارية هي :

$$V_{\mathrm{ac}} = V_{\mathrm{n}} - E_{\mathrm{c}} = 44475$$

والقيمة الحالية العقلانية هي :

$$V_{\mathrm{ar}} = V_{\mathrm{n}} - E_{\mathrm{r}} = 44481.05$$

6.3 تطبيقات الخصم التجاري

في الواقع لما يلجأ حاملي الأوراق التجارية لأجل خصمها لدى البنوك التجارية سوف يتم اقتطاع مصاريف أخرى إضافة للخصم التجاري تتمثل في بعض العمولات و كذلك القيمة المضافة و مجموع هذه الاقتطاعات تمثل الأجيو banking agios و عليه عملية الخصم التجاري يترتب عليها اقتطاع كل من :

– الخصم التجاري : يحسب على أساس معدل خصم من القيمة الاسمية للورقة التجارية.

- مختلف العمولات : تتمثل في المصاريف المختلفة التي يتحملها البنك و يمكن أن نميز بين ثلاث أنواع من العمولات :

– عمولات ثابتة : و هي عبارة عن مبلغ محدد يتم اقتطاعه عن خصم كل ورقة تجارية مهما كانت مدة الخصم و مهما كانت قيمة الورقة التجارية.

– عمولات متغيرة : تختلف قيمتها باختلاف عملية الخصم فيوجد عمولات تتناسب مع قيمة الورقة و مع المدة مثلها مثل الخصم التجاري و يوجد عمولات تتناسب إلا مع قيمة الورقة التجارية أي مستقلة عن الزمن.

- الرسم على القيمة المضافة : الرسم يحسب على قيمة العمولات و لا يحسب على الخصم التجاري.

و بالتالي في حالة وجود عمولات و رسم على القيمة المضافة تحسب القيمة الحالية بالصيغة التالية :

$$\boldsymbol{V_a = V_n - Agio}$$

$$\boldsymbol{Agios = \ E_c + com + tva}$$

$$\boldsymbol{V_a = V_n - (E_c + com + tva)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_a = V_n - \big(E_c + com \times (1 + t)\big)}}$$

ترميز:

- $Agios$: مجموع الاقتطاعات
- com : قيمة العمولات
- t : معدل الرسم على القيمة المضافة
- tva : قيمة الرسم على القيمة المضافة

مثال 5–3

قدم تاجر للبنك ورقة تجارية قيمتها الاسمية 56000 دج لأجل خصمها تستحق بعد 45 يوم.قبل البنك خصمه بالشروط التالية :

- معدل خصم 5%
- عمولة 1: بنسبة 0.02% من القيمة الاسمية
- عمولة 2 : ب2 دج
- عمولة 3 : بقيمة 3 دج لكل شهر
- الرسم على القيمة المضافة 19%

1- حدد نوع العمولات ؟

2- احسب قيمة الأجيو ؟ ثم القيمة الحالية المتحصل عليها ؟

لدينا العمولة 1 متغيرة و مستقلة عن الزمن أما العمولة 2 ثابتة و العمولة 3 متغيرة في الزمن.

$$Agios = E_c + com \times (1+t)$$

$$Agios = \left(56000 \times 0.05 \times \frac{45}{360}\right) + \left(\left(56000 \times \frac{0.02}{100}\right) + 2 + (3 \times 1.5)\right) \times 1.19 = 371.$$

$$V_a = V_n - Agio = 56000 - 371.063 = 55628.937$$

7.3 معدل الخصم الحقيقي و خارج الرسم

لاحظنا أن القيمة الحالية المتحصل عليها في حالة تطبيق البنك عمولات و رسم على القيمة المضافة تكون اقل مقارنة إذا تم تطبيق الخصم التجاري فقط و عليه فمعدل الخصم الحقيقي هو المعدل الذي يأخذ بعين الاعتبار كل الاقتطاعات أما معدل الخصم خارج الرسم لا يأخذ بعين الاعتبار الرسم على القيمة المضافة ، و نستعمل هذين المعدلين غالبا من أجل المفاضلة بين البنوك لخصم الأوراق التجارية من حيث التكلفة الإجمالية للخصم .

يعطى معدل الخصم الحقيقي بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\boldsymbol{i_R = \frac{Agios}{V_n \times n}}}$$

أما معدل الخصم الحقيقي خارج الرسم فيعطى بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\boldsymbol{i_{RHT} = \frac{Agios - TVA}{V_n \times n}}}$$

مثال 6-3

يملك تاجر ورقة تجارية قيمتها 120000دج تستحق بعد 4 أشهر و يريد أن يختار بين احدى البنوك .

شروط الخصم للبنكين في الجدول التالي :

	معدل الخصم	عمولة1	عمولة2	الرسم على القيمة المضافة
البنك الأول	%6	%0.02 من القيمة الاسمية	20دج	%19
البنك الثاني	%5	30 دج	%1 متناسبة مع الزمن	%19

1- على أساس معدل الخصم الحقيقي أي البنكين أفضل ؟

أولا : حساب قيمة الاقتطاعات لكل من البنكين

البنك الأول :

$$Agios = \left(120000 \times 0.06 \times \frac{4}{12}\right) + \left(\left(120000 \times \frac{0.02}{100}\right) + 20\right) \times 1.19 = 2452.36$$

البنك الثاني :

$$Agios = \left(120000 \times 0.05 \times \frac{4}{12}\right) + \left(\left(120000 \times 0.01 \times \frac{4}{12}\right) + 30\right) \times 1.19 = 2511.7$$

ثانيا : حساب معدل الخصم الحقيقي لكلا البنكين

البنك الأول :

$$i_{\mathrm{R}} = \frac{2452.36}{120000 \times \frac{4}{12}} = 6.13\%$$

البنك الثاني :

$$i_R = \frac{2511.7}{120000 \times \frac{4}{12}} = 6.27\%$$

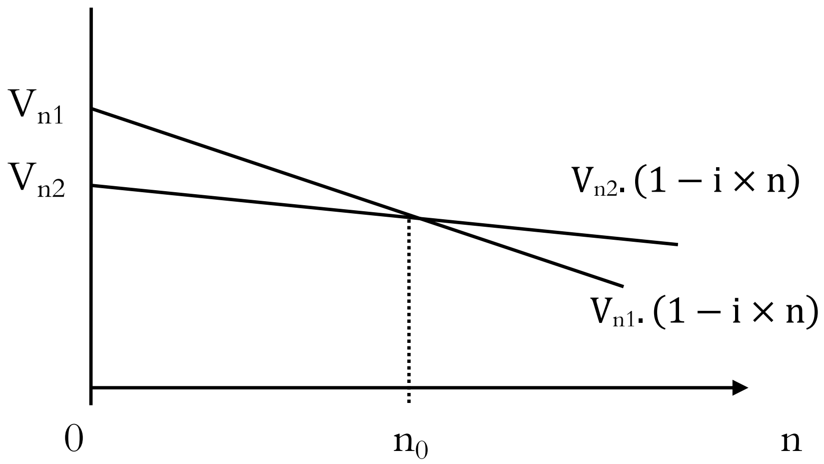
و عليه سوف يختار البنك الأول من أجل الخصم بالرغم من أن معدل الخصم في البنك الأول 6% اكبر من معدل الخصم في البنك الثاني 5%.

8.3 تكافؤ الأوراق التجارية

نقول أن ورقتين تجاريتين متكافئتين إذا كانتا مختلفتين في القيمة الاسمية و تاريخ الاستحقاق و تساوتا في القيمة الحالية بتاريخ معين ، وعليه فان هذه القيمة الحالية تسمى قيمة التكافؤ و التاريخ يسمي تاريخ التكافؤ، و لما تتكافأ ورقتين تجاريتين يمكن استبدالهما لان لهم نفس القيمة الحالية عند تاريخ الاستبدال.

1- تحديد تاريخ التكافؤ

تاريخ التكافؤ تتساوى فيه القيم الحالية للورقتين و بالضرورة يكون قبل تاريخ استحقاق لكلا الورقتين و يمكن التعبير عنه من خلال الشكل التالي :

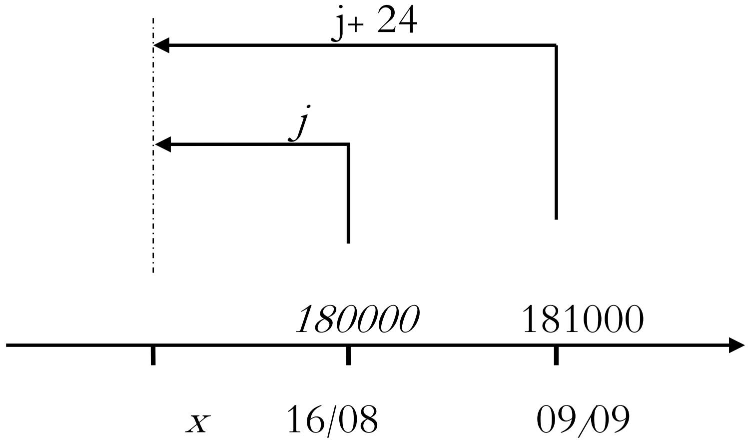


الشكل (2-3) : تاريخ التكافؤ لورقتين تجاريتين[10]

مثال 7-3

[10] Walder.M (2008),op.cit DUNOD,P:29

من خلال المثال التالي نقوم بتحديد تاريخ التكافؤ لورقتين تجاريتين بمعدل خصم 8%،حيث القيمة الاسمية للورقة الأولى 180000 تستحق يوم 08/16 و الورقة الثانية 181000تستحق بتاريخ 09/09.



- لدينا من تاريخ 16/08 لغاية 09/09 :24 يوم و عليه المطلوب إيجاد تاريخ التكافؤ الممثل في الشكل بـ : x

$$V_{a1} = V_{a2}$$

$$V_{n1} \times (1 - i \times n_1) = V_{n2} \times (1 - i \times n_2)$$

$$V_{n1} - V_{n1} \times i \times \frac{j}{360} = V_{n2} - V_{n2} \times i \times \left(\frac{j+24}{360}\right)$$

$$180000 - 180000 \times 0.08 \times \frac{j}{360} = 181000 - 181000 \times 0.08 \times \frac{j+24}{360}$$

$$181000 \times 0.08 \times \frac{j+24}{360} - 180000 \times 0.08 \times \frac{j}{360} = 181000 - 180000$$

$$40.222\, j + 965.33 - 40\, j = 1000$$

$$0.222\, j = 34.67$$

$$j \approx 156$$

وعليه تاريخ التكافؤ هو 13 مارس

وبالتالي القيمة الحالية للورقتين بتاريخ 13 مارس هي نفسها :

$$V_{a1} = 180000 \times \left(1 - 0.08 \times \frac{156}{360}\right) = 173760$$

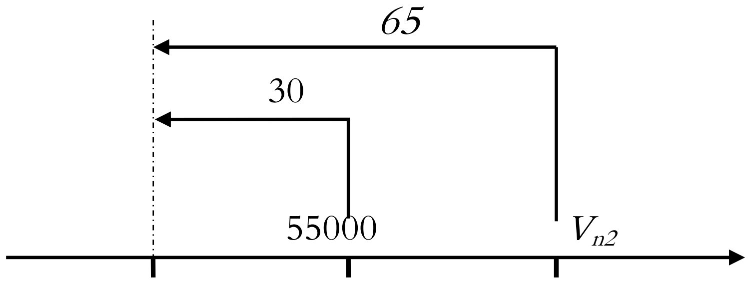
$$V_{a2} = 181000 \times \left(1 - 0.08 \times \frac{156 + 24}{360}\right) = 173760$$

2- تحديد القيمة الاسمية لورقة التكافؤ

من اجل تحديد قيمة الورقة الاسمية تستحق بتاريخ محدد لورقة تجارية أخرى نعتمد على علاقة تساوي قيمهم الحالية عند تاريخ التكافؤ.

مثال 8-3

نريد إيجاد القيمة الاسمية لورقة تجارية تستحق بعد 65 يوم و التى تكافؤ ورقة تجارية قيمتها الاسمية 55000 و تستحق بعد 30 يوم باستعمال معدل خصم 5%.



$$V_{a1} = V_{a2}$$

$$55000 \times \left(1 - 0.05 \times \frac{30}{360}\right) = V_{n2} \times \left(1 - 0.05 \times \frac{65}{360}\right)$$

$$V_{n2} \approx 55269.03$$

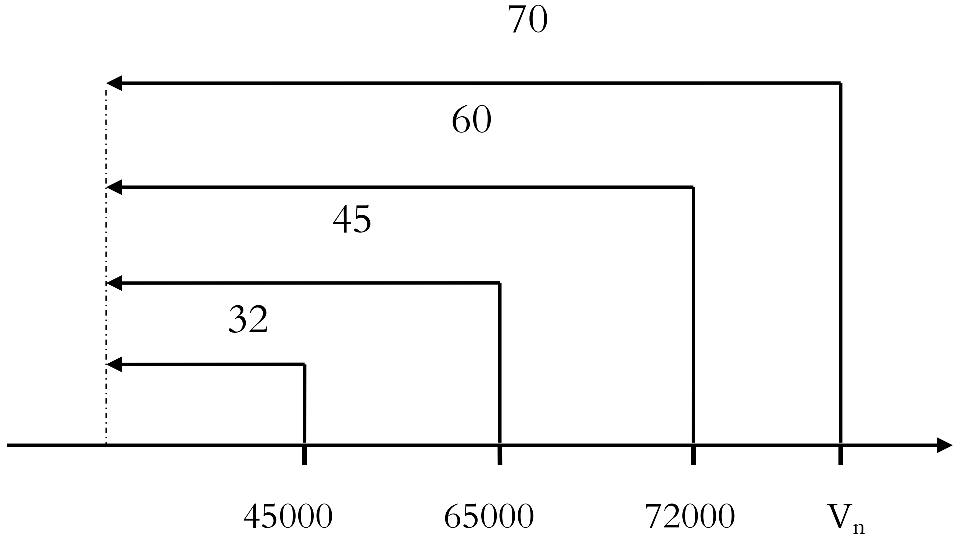
3- تحديد القيمة الاسمية لورقة تكافؤ عدة أوراق تجارية

لكي نقوم باستبدال ورقة تجارية مع عدة أوراق أخرى يشترط تساوي قيمة الورقة الحالية مع مجموع قيم الأوراق الأخرى عند تاريخ الاستبدال.

$$V_{an} = V_{a1} + V_{a2} + V_{a3} + \cdots ..$$

مثال 9-3

لدينا ثلاث أوراق تجارية بقيمة اسمية 45000، 65000 ، 72000 تستحق بعد 32 يوم، 45 يوم و 60 يوم على التوالي. إذا أردنا استبدال هذه الأوراق الثلاثة بورق واحدة تستحق بعد 70 يوم . فما هي قيمتها الاسمية إذا كان معدل الخصم 5%؟



$$V_{an} = V_{a1} + V_{a2} + V_{a3}$$

$$V_n \times \left(1 - 0.05 \times \frac{70}{360}\right) = 45000 \times \left(1 - 0.05 \times \frac{32}{360}\right) + 65000 \times \left(1 - 0.05 \times \frac{45}{360}\right) + 72000 \times \left(1 - 0.05 \times \frac{60}{360}\right)$$

$$V_n = 182568.72$$

تمارين محلولة للفصل الثالث

تمرين 1–3

يمتلك تاجر ورقة تجارية قيمتها الاسمية 152000 دج تستحق بتاريخ 30 جوان، قدمها للبنك من أجل خصمها بتاريخ 16 ماي .

- أحسب قيمة الخصم التجاري إذا كان معدل الخصم 6% ؟
- أحسب القيمة المتحصل عليها بعد الخصم ؟

تمرين 2–3

قام شخص بخصم ورقة تجارية بتاريخ 15 افريل و تحصل على مبلغ 198600 دج، إذا علمت أن تاريخ استحقاق الورقة هو 21 ماي و معدل الخصم هو 7%.

- أحسب القيمة الاسمية للورقة المخصومة؟

تمرين 3–3

قام تاجر ببيع بضاعة و تحصل على ورقة تجارية بقيمة 450000دج تستحق بعد 6 أشهر، إذا كان معدل الفائدة 5%.

- أحسب قيمة البضاعة ؟
- بعد شهرين قام هذا التاجر بخصم هذه الورقة بمعدل خصم 6%.أحسب القيمة المتحصل عليها ؟

تمرين 4–3

ورقة تجارية قيمتها الاسمية 4200دج تستحق بعد 55 يوم . إذا كان معدل الخصم 6%.

- أحسب قيمة الخصم التجاري و العقلاني للورقة ؟
- أحسب القيمة الحالية التجارية و العقلانية للورقة ؟

تمرين 3-5

قدر الخصم التجاري و الخصم العقلاني لورقة تجارية ب 2100دج،2068.965 دج على التوالي لمدة 3 أشهر .

- أحسب معدل الخصم المطبق ؟
- أحسب القيمة الاسمية للورقة ؟

تمرين 3-6

قدمت ثلاث أوراق تجارية للخصم بتاريخ 12 مارس لهم نفس القيمة الاسمية 70000.00دج ، قدر مبلغ الخصم الإجمالي 2900دج بمعدل خصم 8%.

- حدد تاريخ استحقاق الورقة الثالثة علما أن الأولى تستحق يوم 30 مارس و قيمة الخصم للورقة الثانية 100دج.

تمرين 3-7

يمتلك شخص ورقة تجارية قيمتها الاسمية 60000 دج تستحق بعد 120 يوم، أراد خصمها في احد البنوك التجارية الموضحة في الجدول التالي :

	البنك A	البنك B
معدل الخصم	6 %	8%
C1	6 %	4.5 %
C2	1% لكل شهر	0.5% لكل شهر
TVA	19 %	19 %

1- حدد طبيعة العمولات C1 و C2 ؟

2- ما هو الاقتراح الأفضل ؟

3- احسب معدل الخصم الحقيقي خارج الرسم لكلا البنكين ؟ ماذا تستنتج ؟

4- إذا أراد استبدال هذه الورقة بورقة أخرى تستحق بعد 160 يوم ، احسب قيمتها الاسمية ؟

تمرين 8-3

قدمت ورقتين تجاريتين للخصم في نفس اليوم حيث القيمة الاسمية للورقة الأولى 6500 دج تستحق بتاريخ 11/01 ،خصمت بالشروط التالية : معدل خصم 6%،عمولة متغيرة في الزمن 5% ، أما الورقة الثانية ذات القيمة الاسمية 6900 دج تستحق بتاريخ 12/31 خصمت بالشروط التالية : معدل خصم 10 %، عمولة متغيرة في الزمن 3% ،عمولة اخرى متغيرة مستقلة عن الزمن3.4% .

- إذا علمت أن كلتا الورقتين لهما نفس القيمة الصافية يوم الخصم ، حدد تاريخ الخصم ؟

تمرين 9-3

يمتلك تاجر ثلاث أوراق تجارية قيمهم الاسمية على التوالي : 15000 دج تستحق بتاريخ 19 أكتوبر، 25000دج تستحق بتاريخ 14 سبتمبر و 16000 دج تستحق بتاريخ 15 أوت.

- بتاريخ 01جويلية أراد استبدال هذه الأوراق بورقة واحدة تستحق يوم 29 اكتوبر، أحسب قيمة الورقة الجديدة؟ اذا كان معدل الخصم هو 8%
- إذا أراد استبدالهم بورقة قيمتها الاسمية 56200 دج ، حدد تاريخ استحقاقها ؟

تمرين 10-3

تم إيداع لدى بنك تجاري ثلاث أوراق تجارية بتاريخ 01 أبريل 2016 وتم خصمها بالشروط التالية :

	القيمة الاسمية	معدل الخصم	عمولة 1	عمولة 2	القيمة الحالية	تاريخ الاستحقاق
الورقة 1	؟	%6	-	-	49250	2016/06/30
الورقة 2	؟	%6	-	-	75000	2016/07/30
الورقة 3	150000	%6	%3	10 دج	؟	2016/08/29

1- أحسب القيمة الاسمية للورقة الأولى علما أنه تم خصمها بالخصم التجاري و حدد قيمته ؟

2- أحسب القيمة الاسمية للورقة الثانية علما أنه تم خصمها بالخصم العقلاني و حدد قيمته ؟

3- أحسب القيمة الحالية للورقة الثالثة ؟ و أحسب معدل الخصم الحقيقي لهذه الورقة ؟

حلول تمارين الفصل الثالث

حل التمرين 1–3

1- حساب قيمة الخصم التجاري

المدة الزمنية بين تاريخ الاستحقاق و تاريخ الخصم 45 يوم

$$E_c = 152000 \times 0.06 \times \frac{45}{360}$$

$$E_c = 1140$$

2- حساب القيمة الحالية المتحصل عليها

$$V_a = 152000 - 1140$$

$$V_a = 150860$$

حل التمرين 2–3

1- حساب القيمة الاسمية للورقة

المدة الزمنية بين تاريخ الاستحقاق و تاريخ الخصم 36 يوم

$$198600 = V_n \times \left(1 - 0.07 \times \frac{36}{360}\right)$$

$$V_n = 200000$$

حل التمرين 3–3

1- حساب قيمة البضاعة باستعمال علاقة الفائدة البسيطة

$$\text{قيمة البضاعة} = \frac{450000}{1 + 0.05 \times \frac{6}{12}}$$

$$\text{قيمة البضاعة} = 439024.39$$

2- حساب القيمة الحالية

$$V_a = 450000 \times \left(1 - 0.06 \times \frac{4}{12}\right)$$

$$V_{\mathrm{a}} = 441000$$

حل التمرين 4–3

1– حساب قيمة الخصم التجاري و العقلاني

$$E_{\mathrm{c}} = 4200 \times 0.06 \times \frac{55}{360}$$

$$E_{\mathrm{c}} = 38.5$$

$$E_{\mathrm{r}} = \frac{4200 \times 0.06 \times \frac{55}{360}}{1 + 0.06 \times \frac{55}{360}}$$

$$E_{\mathrm{r}} = 38.15$$

2– حساب القيمة الحالية التجارية و العقلانية

$$V_{\mathrm{ac}} = 4200 - 38.5 = 4161.5$$

$$V_{\mathrm{ar}} = 4200 - 38.15 = 4161.85$$

حل التمرين 5–3

1– حساب معدل الخصم المطبق

$$\frac{2100}{2068.965} = 1 + i \times \frac{3}{12}$$

$$i = 0.06 = 6\%$$

2– حساب القيمة الاسمية للورقة

$$V_{\mathrm{n}} = \frac{2100 \times 2068.965}{2100 - 2068.965}$$

$$V_{\mathrm{n}} \approx 140000$$

حل التمرين 6–3

1– أولا إيجاد مدة خصم الورقة الثالثة

لدينا :

$$E_1 + E_2 + E_3 = 2900$$

مدة خصم الورقة الأولى من تاريخ 12 مارس لغاية 30 مارس هي 18يوم

$$70000 \times 0.08 \times \frac{18}{360} + 100 + E_3 = 2900$$

$$E_3 = 1400 = 70000 \times 0.08 \times \frac{n}{360}$$

$$n = 90$$ يوم

2- ثانيا تحديد تاريخ استحقاق الورقة الثالثة لمدة 90 يوم

ابتداء من 12 مارس إلى 31 مارس ⟵ 19 يوم

افريل ⟵ 30 يوم

ماي ⟵ 31 يوم

جوان ⟵ 10 يوم

بإضافة يوم واحد نحدد تاريخ الاستحقاق ب 11 جوان.

حل التمرين 7-3

1- طبيعة العمولات :

- C_1 : متغيرة مستقلة عن الزمن
- C_2 : متغيرة غير مستقلة عن الزمن

2- لتحديد الاقتراح الأمثل نعتمد علي قيمة الاجيو الأقل أو القيمة الحالية الكبيرة لكلا البنكين

$$Agio_A = E + (C_1 + C_2) \times (1 + tva)$$

$$Agio_A = 60000 \times 0.06 \times \frac{120}{360} + \left(60000 \times 0.06 + 60000 \times 0.01 \times \frac{120}{30}\right) \times 1.19$$

$$Agio_A = 8340$$

و منه $$\mathrm{V_{aA}} = 60000 - 8340 = 51660$$

$$Agio_B = 60000 \times 0.08 \times \frac{120}{360} + \left(60000 \times 0.045 + 60000 \times 0.005 \times \frac{120}{30}\right) \times 1.19$$

$$Agio_B = 6241$$

و منه $$\mathrm{V_{aB}} = 60000 - 6241 = 53759$$

وعليه الاختيار الأفضل هو الخصم عند البنك B.

3- حساب معدل الخصم الحقيقي لكلا البنكين

$$i_R = \frac{Agio - TVA}{V_n \times n}$$

$$i_{RA} = \frac{8340 - 1140}{60000 \times \frac{120}{360}}$$

$$i_{RA} = 3.6\%$$

$$i_{RA} = \frac{8340 - 1140}{60000 \times \frac{120}{360}}$$

$$i_{RA} = 36\%$$

$$i_{RB} = \frac{6241 - 741}{60000 \times \frac{120}{360}}$$

$$i_{RA} = 27.5\%$$

نستنتج أن معدل الخصم الحقيقي الأقل يوافق أفضل اختيار أي يعطي قيمة حالية أكبر.

4- حساب القيمة الاسمية للورقة الجديدة

لدينا :

$$\mathrm{V_{a1}} = \mathrm{V_{a2}}$$

$$60000.\left(1 - 0.06 \times \frac{120}{360}\right) = \mathrm{V_n}.\left(1 - 0.06 \times \frac{160}{360}\right)$$

$$\mathrm{V_n} = 60411$$

حل التمرين 8-3

الورقتين لهم نفس القيمة الحالية يوم الخصم و عليه :

$$V_{\mathrm{a1}} = V_{\mathrm{a2}}$$

الفارق الزمني بين تواريخ استحقاقهما هو 60 يوم من 10/31 إلى 12/30 و منه

$$V_{\mathrm{n1}} - agios_1 = V_{\mathrm{n2}} - agios_2$$

$$6500 - \left(\left(6500 \times 0.06 \times \frac{n}{360}\right) + \left(6500 \times 0.05 \times \frac{n}{360}\right)\right)$$

$$= 6900 - \left(\left(6900 \times 0.1 \times \frac{n+60}{360}\right) + \left(6900 \times 0.03 \times \frac{n+60}{360}\right) + (6900 \times 0.034)\right)$$

$$6500 - \left(\left(6500 \times 0.11 \times \frac{n}{360}\right)\right) = 6900 - \left(\left(6900 \times 0.13 \times \frac{n+60}{360}\right) + (6900 \times 0.034)\right)$$

$$6500 - 1.986\,n = 6900 - 384.1 - 2.492\,n$$

$$0.506\,n = 15.9$$

$$n \approx 31$$

و عليه فان تاريخ الخصم يوافق 10/01

حل التمرين 9-3

1- تحديد قيمة الورقة الاسمي المكافئة للأوراق الثلاثة

لدينا

$$V_{a1}+V_{a2}+V_{a3}=V_{an}$$

مدة الخصم للأوراق التجارية بتاريخ 07/01 هي :

الورقة الأولي 110 يوم، الورقة الثانية 75 يوم و الورقة الثالثة 45 يوم أما الورقة المكافئة 120 يوم و عليه

$$15000\times\left(1-0.08\times\frac{110}{360}\right)+25000\times\left(1-0.08\times\frac{75}{360}\right)+16000\times\left(1-0.08\times\frac{45}{360}\right)=Vn\times\left(1-0.08\times\frac{120}{360}\right)$$

$$Vn=56556.06$$

2- تحديد تاريخ استحقاق الورقة المكافئة ذات القيمة الاسمية 56200 دج

$$15000\times\left(1-0.08\times\frac{110}{360}\right)+25000\times\left(1-0.08\times\frac{75}{360}\right)+16000\times\left(1-0.08\times\frac{45}{360}\right)=56200\times\left(1-0.08\times\frac{n}{360}\right)$$

$$n=\ 91$$

و عليه فان تاريخ الاستحقاق للورقة الجديدة هو 30 سبتمبر.

حل التمرين 10-3

1- حساب القيمة الاسمية للورقة الأولى

لدينا مدة الخصم من 1 أبريل لغاية 30 جوان تقدر بـ : 90 يوم

$$V_n=\frac{V_a}{1-i.n}$$

$$V_n=\frac{49250}{1-0.06\times\frac{90}{360}}$$

$$V_n=50000$$

و منه

$$E_c=V_n-V_{ac}$$

$$E_c=50000-49250$$

$$E_c=750$$

2- حساب القيمة الاسمية للورقة الثانية

لدينا مدة الخصم من 1 أبريل لغاية 30 جويلية تقدر بـ : 120 يوم

$$V_n = V_a.(1 + i.n)$$

$$V_n = 75000.\left(1 + 0.06 \times \frac{120}{360}\right)$$

$$V_n = 76500$$

ومنه

$$E_R = V_n - V_{aR}$$

$$E_c = 76500 - 75000$$

$$E_c = 1500$$

3- حساب القيمة الحالية للورقة الثالثة

4- لدينا مدة الخصم من 1 أبريل لغاية 29 أوت تقدر بـ : 150 يوم

$$Agio = E + (C_1 + C_2) \times (1 + tva)$$

$$Agio = 15000 \times 0.06 \times \frac{150}{360} + (150000 \times 0.06 + 10)$$

$$Agio_A = 8260$$

و منه $\mathrm{V_a} = 150000 - 8260 = 51660$

$$\mathrm{V_a} = 141740$$

5- حساب معدل الخصم الحقيقي

$$i_R = \frac{Agio - TVA}{V_n \times n}$$

$$i_{RA} = \frac{8260}{150000 \times \frac{150}{360}}$$

$$i_{RA} = 13.21\%$$

الفصل الرابع : الفائدة المركبة *Compound Interest*

رأينا في حساب الفائدة البسيطة على أنه يتم تسديد الفائدة المترتبة عن القرض إلى نهاية مدة العقد أي مدة القرض معنى ذلك أن رأس المال أو القرض يبقى ثابت طول مدة العقد، إلا أنه من المفروض أن الفائدة تسدد كل نهاية فترة تحسب على أساسها الفائدة غالبا سنة لما يكون معدل التوظيف سنوي و إذا لم يسحب صاحب الفائدة مبلغ الفائدة عند استحقاقه سوف يضاف إلى رأس المال الأصلي و بذلك سوف تكون الفائدة في الفترة الموالية أكبر من الفترة السابقة و نفس الشيء للفترة الموالية و هكذا إلى غاية آخر مدة العقد. نستنتج من هذا أنه الفائدة المتحصل عليها تصبح رأس مال عند استحقاقها و بالتالي سوف تولد فائدة أخرى و لهذا يطلق عليها بالفائدة المركبة و مبدئيا تحسب الفائدة المركبة لما تكون مدة التوظيف تتجاوز فترة استحقاق الفائدة غالبا السنة لما يكون معدل التوظيف سنوي.

1.4 اشتقاق صيغة الفائدة المركبة **Formula for Compound Interest**

ليكن لدينا رأس مال C_0 و نريد توظيفه لمدة زمنية n بمعدل فائدة سنوي i و ذلك من خلال مبدأ الفائدة المركبة أي إضافة مبلغ الفائدة I لرأس المال كل نهاية فترة استحقاق أي كل نهاية سنة، من خلال الجدول التالي سوف نوضح قيمة الجملة الإجمالية المتحصل عليها في نهاية التوظيف.

الفترة	رأس المال بداية المدة	فائدة المدة	صيغة الجملة	قيمة الجملة نهاية المدة
1	C_0	$C_0 \times i$	$C_0 + C_0 \times i$	$C_0 \times (1+i)$
2	$C_0 \times (1+i)$	$C_0 \times (1+i) \times i$	$C_0 \times (1+i) + C_0 \times (1+i) \times i$	$C_0 \times (1+i)^2$
3	$C_0 \times (1+i)^2$	$C_0 \times (1+i)^2 \times i$	$C_0 \times (1+i)^2 + C_0 \times (1+i)^2 \times i$	$C_0 \times (1+i)^3$
....				
....				
....				
n-1	$C_0 \times (1+i)^{n-2}$	$C_0 \times (1+i)^{n-2} \times i$	$C_0 \times (1+i)^{n-2} + C_0 \times (1+i)^{n-2} \times i$	$C_0 \times (1+i)^{n-1}$
n	$C_0 \times (1+i)^{n-1}$	$C_0 \times (1+i)^{n-1} \times i$	$C_0 \times (1+i)^{n-1} + C_0 \times (1+i)^{n-1} \times i$	$C_0 \times (1+i)^n$

من خلال هذا الجدول توصلنا إلى صيغة الجملة باستعمال الفائدة المركبة خلال n فترة و هي كالتالي:

$$\boxed{\mathbf{C}_n = \mathbf{C_0} \times (\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}}$$

مثال 1-4

الجملة المتحصل عليها بعد توظيف رأس مال بقيمة 10000 دج لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة 6% تقدر ب:

$$C_n = 10000 \times (1 + 0.06)^5$$

$$C_n = 13382.25$$

1- صيغة مبلغ الفائدة

و كذلك مبلغ الفائدة الإجمالية ما هو إلا الفرق بين رأس المال و الجملة الإجمالية و يحسب بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\boldsymbol{I = C_n - C_0}}$$

$$\boxed{\mathbf{I = C_0 \times ((1 + i)^n - 1)}}$$

أما مبلغ الفائدة لكل فترة يحسب بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\mathbf{I_n = C_0 \times (1 + i)^{n-1} \times i}}$$

مثال 2-4

من خلال توظيف مبلغ قيمته 120000دج لمدة 6 سنوات بمعل فائدة 7% سوف نحصل على فائدة إجمالية بقيمة :

$$I = 120000 \times \left(1.07^6 - 1\right)$$

$$60087.64 I =$$

أما الفائدة المتحصل عليها في السنة الثالثة هي :

$$I_3 = 120000 \times (1.07)^2 \times 0.07$$

$$I_3 = 9617.16$$

2- صيغة رأس المال الموظف أو القرض

من خلال صيغة الفائدة المركبة نجد أن قيمة القرض تحسب كالآتي :

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$\boxed{\mathbf{C_0 = C_n \times (1 + i)^{-n}}}$$

مثال 3–4

المبلغ الموظف لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة سنوي 4% و الذي يعطي ججملة قدرها 243330.58 دج هو :

$$C_0 = 243330.58 \times (1.04)^{-5}$$

$$C_0 = 200000$$

3– إيجاد مدة التوظيف

في حالة معرفتنا بقيمة القرض و كذلك الجملة و معدل الفائدة نحصل على مدة التوظيف من خلال صيغة الفائدة المركبة كالتالي :

$$(1 + i)^n = \frac{C_n}{C_0}$$

$$ln(1 + i)^n = \ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)$$

$$n \times ln(1 + i) = \ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{n = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{ln(1 + i)}}}$$

مثال 4–4

المدة اللازمة لكي نحصل على جملة 67004.78 دج بعد توظيف مبلغ 50000دج بمعدل فائدة 5 % هي :

$$n = \frac{\ln\left(\frac{67004.78}{50000}\right)}{ln(1.05)}$$

$$n = 6$$

4- إيجاد معدل الفائدة المطبق

من خلال صيغة الفائدة المركبة نحصل على :

$$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{C}_n}{\mathrm{C}_0}$$

$$1+i=\sqrt[\mathrm{n}]{\frac{\mathrm{C}_n}{\mathrm{C}_0}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{i}=\sqrt[\mathrm{n}]{\frac{\mathbf{C}_n}{\mathbf{C}_0}}-\mathbf{1}=\left(\frac{\mathbf{C}_n}{\mathbf{C}_0}\right)^{\frac{1}{\mathrm{n}}}-\mathbf{1}}$$

5- إيجاد معدل الفائدة و المدة الزمنية من خلال الجداول المالية

الجدول المالي للفائدة المركبة يوفر قيمة الجملة لوحدة نقدية واحدة $(1+i)^{\mathrm{n}}$معتمدا على مركبتي المعدل و المدة بحيث الأعمدة تمثل معدلات الفائدة و الأسطر المدة ، فمن خلال معرفة مدة التوظيف نحصل على معدل التوظيف و العكس.

مثال5-4

ما هي المدة اللازمة للحصول على جملة قيمتها 1125509 دج بعد توظيف مبلغ 1000000دج بمعدل فائدة سنوي 3% ؟ وما هو المعدل المطبق لكي تصبح الجملة تساوي 1169859 دج ؟

- أولا نحسب قيمة $(1+i)^{\mathrm{n}}$ بحيث :

$$(1+i)^{\mathrm{n}}=\frac{C_{\mathrm{n}}}{\mathrm{C}_0}$$

$$(1.03)^{\mathrm{n}}=\frac{1125509}{1000000}=1.125509$$

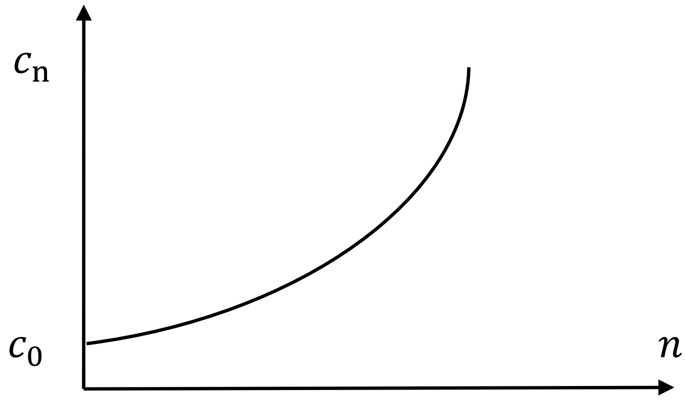
- ثانيا نبحث عن هذه القيمة في الجدول من خلال العمود الذى يحمل قيمة معدل الفائدة 3% نحصل على المدة 4 سنوات.
- لإيجاد المعدل نقوم بحساب $(1+i)^{\mathrm{n}}$ بحيث :

$$(1+i)^4 = \frac{1169859}{1000000} = 1.169859$$

- نبحث عن هذه القيمة في الجدول من خلال السطر الذى يحمل قيمة المدة 4 سنوات و نحصل على المعدل 4 %.

التمثيل البياني لصيغة الفائدة المركبة

نفترض أن معدل الفائدة i ثابت و عليه فلن المعادلة $(1+i)^n$ *دالة متزايدة في* n *ذات شكل أسي و باعتبار الزمن مستمر فان منحنى الدالة يكون مستمر، كما يمكن تمثيلها بدلالة* i *بافتراض المدة ثابتة، إلا انه غالبا ما يأخذ الزمن كمتغير.*



الشكل (1–4): منحنى جملة الفائدة المركبة[11]

2.4 حساب قيمة الجملة لما عدد الفترات يكون عدد غير طبيعي

غالبا ما يطرح مشكل حساب الجملة المكتسبة عندما يعبر عن الفترة بالسنوات و الأشهر أو الأيام معنى ذلك n يأخذ قيمة صحيحة و هذا هو الغالب في الواقع و في هذه الحالة يوجد طريقتين لحساب الجملة.

1– الطريقة التجارية

في هذه الطريقة يعبر عن الجملة باستعمال الصيغة الأساسية للفائدة المركبة أي تأخذ الفترة n كاملة كما هي،وهذه الطريقة الغالب استعمالها في البنوك التجارية و المؤسسات المالية.

$$\boxed{\mathbf{C}_n = \mathbf{C_0} \times (\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}+\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{12}}+\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{360}}}}$$

حيث :j،m تعبر عن عدد الأشهر و الأيام على التوالي.

[11] Walder.M (2008),op.cit DUNOD,P:64

2- الطريقة العقلانية

يتم حساب الجملة بالصيغة الأساسية للفائدة المركبة للفترة الكاملة و يتم إضافة الفائدة المتحصل عليها للجزء المتبقي من المدة باستعمال صيغة الفائدة البسيطة أي بالنسبة للفترة الأقل من سنة. و تكون الجملة المحسوبة بهذه الطريقة اكبر من الطريقة التجارية.

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n + C_0 \times (1+i)^n \times i \times \left(\frac{m}{12} + \frac{j}{360}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{C_n = C_0 \times (1+i)^n \times \left(1 + i \times \left(\frac{m}{12} + \frac{j}{360}\right)\right)}}$$

مثال6-4

قرض بقيمة 50000دج يسترد بعد سنتين و 7 أشهر بمعدل فائدة سنوي 6% ، يحقق جملة قدرها باستعمال الطريقة التجارية تساوي :

$$C_n = 50000 \times (1.06)^{2+\frac{7}{12}}$$

$$C_n = 58122.39$$

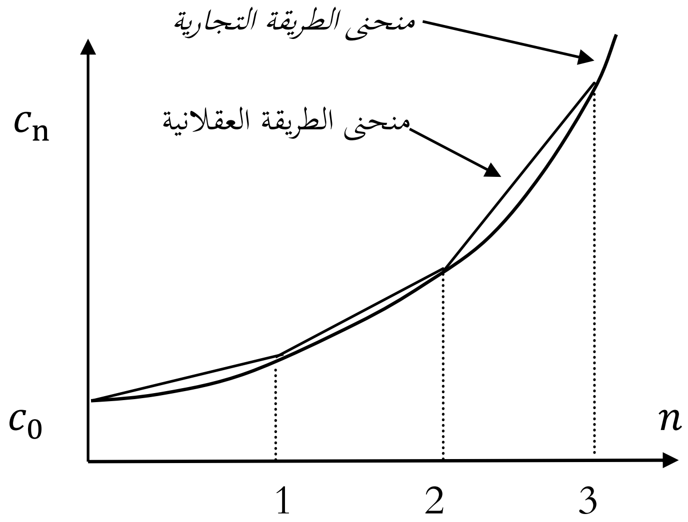
أما باستعمال الطريقة العقلانية يحقق جملة قدرها :

$$C_n = 50000 \times 1.06^2 \times \left(1 + 0.06 \times \frac{7}{12}\right)$$

$$C_n = 58146.3$$

3- الاختلاف بين الطريقتين

يكمن الاختلاف في حالة ما إذا كانت المدة تختلف عن العدد الكامل للفترات أي تحتوي على أشهر أو أيام، أما في حالة n يكون عدد كامل فلا اختلاف بين الطريقتين. و يمكن توضيح ذلك بيانيا من خلال تطابق المحنيين عندما تكون المدة كاملة أي n= 1،2،3،4 ....الخ .



الشكل(2-4) : منحنى الفائدة المركبة للطريقة التجارية و العقلانية[12]

3.4 معدلات الفائدة المكافئة Equivalent interest rates

بالنسبة للتكافؤ يأخذ معدل الفائدة السنوي كمعيار و نقول أن معدل فائدة غير سنوي مثل المعدل الشهري أو السداسي أو الفصلي يكافئ المعدل السنوي إذا كان يعطي نفس الجملة المكتسبة لرأس مال وظف لنفس المدة. و يحسب بالعلاقة التالية : نرمز للمدة ب p و المعدل المكافئ $\mathrm{i_p}$

$$c_0 \times (1+\mathrm{i_p})^{\mathrm{p}} = c_0 \times (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$$

$$(1+\mathrm{i_p})^{\mathrm{p}} = (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$$

$$\boxed{\mathbf{i_p} = (\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p}}} - \mathbf{1}}$$

مثال 7-4

المعدلات المكافئة الشهيرة للمعدل السنوي 10% تقدر بـ :

المعدل المكافئ	عدد الفترات	صيغة الحساب	قيمة المعدل
i_m	12	$(1.1)^{\frac{1}{12}} - 1$	0.79 %
i_t	4	$(1.1)^{\frac{1}{4}} - 1$	2.41 %
i_q	3	$(1.1)^{\frac{1}{3}} - 1$	3.22 %
i_s	2	$(1.1)^{\frac{1}{2}} - 1$	4.88 %

[12] Walder.M (2008),op.cit DUNOD,P: 68

تمارين محلولة للفصل الرابع

تمرين 1-4

تم إيداع رأس مال بقيمة 250000دج في بنك تجاري بمعدل فائدة سنوي 6%.

- أحسب قيمة الجملة المتحصل عليها بعد سنتين ؟
- أحسب القيمة المتحصل عليها بعد ثلاث سنوات و 7 أشهر؟
- ما هي المدة اللازمة لتصبح الجملة تساوي 447711.92دج؟

تمرين 2-4

اقترض شخص مبلغ لمدة 4 سنوات و نصف ليسدده في آخر المدة بقيمة 186828.49 دج بمعدل فائدة سنوي 5%.

- أحسب قيمة القرض ؟
- إذا أراد تسديده بعد 6 سنوات، أحسب المبلغ المسدد ؟

تمرين 3-4

منح بنك قرض لأحد زبائنه لمدة 10 سنوات و تحصل في نهاية المدة على فائدة إجمالية بقيمة 94901.72 دج و ذلك بمعدل فائدة 6%.

- أحسب قيمة القرض ؟
- أحسب المبلغ المسدد من طرف الزبون ؟

تمرين 4-4

قدرت قيمة الفائدة السنوية I_n و I_{n-1} لقرض بنكي بـ 7756.64دج و 7387.27 دج على التوالي.

- ما هو معدل الفائدة المطبق ؟
- أحسب مدة القرض إذا كان أصل القرض 100000دج ؟

تمرين 5-4

تم توظيف مبلغ لمدة 10 سنوات بمعدل فائدة سنوى6% لأربع سنوات الأولى و 7% للباقية ليعطى جملة قدرها227356.50 دج.

1- أحسب المبلغ الموظف ؟

2- ما هو معدل الفائدة المطبق خلال 10 سنوات الذى يعطينا نفس الجملة ؟

تمرين 4-6

اقترض شخص مبلغ 120000دج بتاريخ 15 مارس 2017 ليسدده بتاريخ 13 جوان 2018 و ذلك بمعدل فائدة سنوي 5%.

- أحسب الجملة المسددة بالطريقة التجارية و العقلانية ؟
- باستعمال المعدل المكافئ السداسي أحسب الجملة بطريقتين؟ ماذا تلاحظ ؟

تمرين 4-7

تم توظيف مبلغ مالي لمدة 10 سنوات ، الخمسة سنوات الأولى بمعدل 3% و الخمسة سنوات الموالية بمعدل 3.5 %، إذا كانت الجملة المتحصل عليها 11014.85 دج

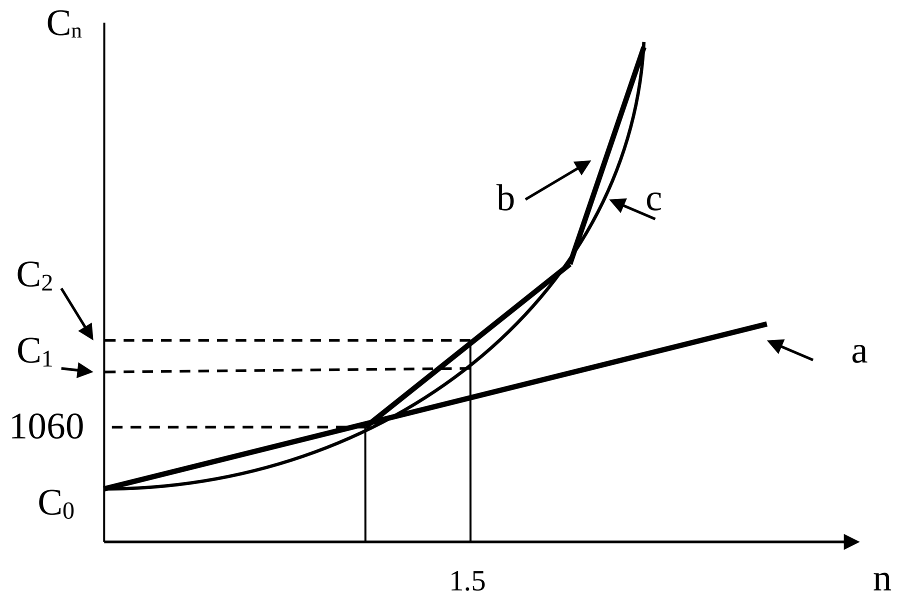
- أحسب المبلغ الأصلي ؟
- ما هو المعدل المطبق ليعطي نفس الجملة؟

تمرين 4-8

وظف مستثمر رأس مال قدره 50000 دج بتاريخ 15 افريل 2006 بمعدل فائدة 5%

- أحسب جملة المبلغ بتاريخ 14 جوان 2006؟
- قام بسحب المبلغ بعد 3 سنوات و نصف ليوظفه في بنك آخر بمعدل 6%. ما هي المدة اللازمة ليصبح 79371 دج ؟

تمرين 4-9



- ماذا تمثل المنحنيات a, b و c ؟
- حدد المدة التي يتقاطع فيه كل من a وc ؟
- إذا كان معدل الفائدة 6% ، احسب C_2, C_1, C_0 ؟

تمرين 4–10

قام تاجر بتوظيف مبلغ 3000 دج بمعدل فائدة بسيطة i .

- أحسب بدلالة i الجملة المكتسبة خلال سنة واحدة ؟ تم قام بتوظيف الجملة المكتسبة في السنة الأولى لسنة أخرى بمعدل i+2%، إذا كانت الفائدة المتحصل عليها في السنة الثانية تقدر ب 254.4 دج.
- أحسب معدل الفائدة i ؟

حلول تمارين الفصل الرابع

تمرين 1–4

1– حساب قيمة الجملة المتحصل عليها بعد سنتين

$$C_n = C_0(1+i)^n$$
$$C_n = 250000 \times 1.06^2$$
$$C_n = 280900$$

2– حساب قيمة الجملة المتحصل عليها بعد ثلاث سنوات و 7 أشهر

$$C_n = 250000 \times 1.06^{3+\frac{7}{12}}$$
$$C_n = 308048.685$$

3– إيجاد المدة كي تصبح الجملة تساوي 447711.92

$$447711.92 = 250000 \times 1.06^n$$
$$1.79084 = 1.06^n$$
$$\ln 1.79084 = n \ln 1.06$$
$$n = 10 \text{ سنوات}$$

تمرين 2–4

1– حساب قيمة القرض

$$C_n = C_0(1+i)^n$$
$$186828.49 = C_0 \times 1.05^{4.5}$$
$$C_0 = 150000$$

2– حساب قيمة الجملة المسددة بعد 6 سنوات

$$C_n = 150000 \times 1.05^6$$
$$C_n = 201014.34$$

تمرين 3–4

1– حساب قيمة القرض

$$I = C_0 \times ((1+i)^n - 1)$$
$$94901.72 = C_0 \times (1.06^{10} - 1)$$
$$C_0 = 120000$$

2– حساب الجملة المسددة

$$C_n = 120000 \times 1.06^{10}$$
$$C_n = 214901.72$$

تمرين 4–4

1- إيجاد معدل الفائدة المطبق

لدينا :

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{C}_0 \times (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-1} \times \mathrm{i}$$

$$\mathrm{I}_{n-1} = \mathrm{C}_0 \times (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-2} \times \mathrm{i}$$

بقسمة المعادلة الأولى على الثانية نحصل على :

$$\frac{\mathrm{I_n}}{\mathrm{I_{n-1}}} = 1+\mathrm{i}$$
$$\frac{7756.64}{7387.27} = 1+\mathrm{i}$$

$$\mathrm{i} = 5\%$$

2- حساب مدة القرض

$$7756.64 = 100000 \times 1.05^{\mathrm{n}-1} \times 0.05$$

$$15.51328 = 1.05^{\mathrm{n}-1}$$
$$n-1 = \frac{\ln 1.551328}{\ln 1.05}$$

$n = 8$ سنوات

تمرين 4–5

1- حساب المبلغ الموظف

$$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$$
$$C_0 = 227356.5 \times 1.07^{-6} \times 1.04^{-4}$$
$$C_0 = 120000$$

2- معدل الفائدة الذي يعطينا نفس الجملة هو :

$$227356.50 = 120000 \times (1+i)^{10}$$

$$1.89463 = (1+i)^{10}$$
$$i = \sqrt[10]{1.89463} - 1$$
$$i \approx 6.6\%$$

تمرين 6-4

1- حساب الجملة المسددة

- بالطريقة التجارية

لدينا مدة القرض من 15 مارس 2017 لغاية 13 جوان 2018 هي :

15 مارس 2017 إلى 14 مارس 2018 ⟵ سنة

14 مارس 2017 الى 13 جوان 2018 ⟵ 3 اشهر

$$C_n = C_0(1+i)^{n+\frac{m}{12}}$$
$$C_n = 120000 \times 1.05^{1.25}$$
$$C_n = 127546.30$$

- بالطريقة العقلانية

$$C_n = C_0(1+i)^n \times \left(1 + i \times \frac{m}{12}\right)$$
$$C_n = 120000 \times 1.05^1 \times \left(1 + 0.05 \times \frac{3}{12}\right)$$
$$C_n = 127575$$

2- حساب الجملة باستعمال المعدل السداسي المكافئ

$$i_s = \sqrt[2]{1.05} - 1$$
$$i_s = 2.4695$$

- الجملة بالطريقة التجارية

$$C_n = 120000 \times 1.024695^{2.5}$$
$$C_n = 127546.27$$

- الجملة بالطريقة العقلانية

$$C_n = 120000 \times 1.024695^2 \times \left(1 + 0.024695 \times \frac{3}{6}\right)$$
$$C_n = 127555.76$$

- نلاحظ أن المعدل المكافئ بالطريقة التجارية يعطينا نفس الجملة أما الطريقة العقلانية يعطينا جملة أقل مقارنة بالمعدل السنوي.

تمرين 4–7

1- حساب المبلغ الأصلي

$$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$$
$$C_0 = 11014.85 \times 1.035^{-5} \times 1.03^{-5}$$
$$C_0 = 8000$$

2- المعدل المطبق ليعطي نفس الجملة هو :

$$11014.85 = 8000 \times (1+i)^{10}$$
$$i = \sqrt[10]{\frac{11014.85}{8000}} - 1$$
$$i = 3.249\%$$

تمرين 4–8

1- حساب جملة المبلغ

- تقدر المدة من 15 افريل 2006 لغاية 14 جوان 2006 بشهرين و عليه نستعمل قانون الفائدة البسيطة

$$C_n = C \times (1 + i.n)$$
$$C_n = 50000 \times \left(1 + 0.05 * \frac{2}{12}\right)$$
$$C_n = 51250$$

2- حساب المدة اللازمة لكي يصبح المبلغ 79371 دج

- حساب الجملة بعد 3 سنوات ونصف باستعمال قانون الفائدة المركبة

$$C_n = C \times (1+i)^n$$
$$C_n = 50000 \times 1.05^{3.5}$$
$$C_n = 59310.63$$

- تحدد المدة التوظيف في البنك الثانى كالتالي :

$$79371 = 59310.63 \times 1.06^n$$
$$1.3382 = 1.06^n$$
$$\ln 1.3382 = n \ln 1.06$$
$$n = 5$$

تمرين 9-4

1- تمثل المنحنيات :

- a : منحنى الجملة المكتسبة باستعمال الفائدة البسيطة
- b : منحنى الجملة المكتسبة باستعمال الفائدة المركبة بالطريقة العقلانية
- c : منحنى الجملة المكتسبة باستعمال الفائدة المركبة بالطريقة التجارية

2- يتقاطع منحنى a و c لما n تساوي 1 ، أي أن الفائدة المركبة و البسيطة تتساوي لما مدة التوظيف تساوي السنة.

3- حساب كل من :

- رأس المال عند الزمن 1

$$C_0 = \frac{1060}{1.06}$$
$$C_0 = 1000$$

- الجملة عند الزمن 1.5 بالطريقة التجارية

$$C_1 = 1000 \times 1.06^{1.5}$$
$$C_1 = 1091.33$$

- الجملة عند الزمن 1.5 بالطريقة العقلانية

$$C_1 = 1000 \times 1.06^1 \times (1 + 0.06 \times 0.5)$$
$$C_1 = 1091.80$$

تمرين 10-4

1- الجملة المتحصل عليها بعد سنة واحدة بدلالة i

$$C_n = C \times (1+i)^n$$
$$C_n = 3000 \times (1+i)^1$$

2- تحديد معدل الفائدة i

$$I_2 = C_{n2} - C_{n1}$$
$$254.4 = [3000 \times (1+i)^1 \times (1 + i + 0.02)] - [3000 \times (1+i)^1]$$
$$254.4 = (3000 + 3000\,i) \times (i + 0.02)$$
$$254.4 = 3000\,i + 60 + 3000\,i^2 + 60\,i$$

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية نقوم بحلها

$$3000\, i^2 + 3060\, i - 194.4 = 0$$

- حساب المميز

$$\Delta = \mathrm{b}^2 - 4.\mathrm{a}.\mathrm{c}$$
$$\Delta = 3060^2 - 4 \times 3000 \times (-194.4)$$
$$\Delta = 11696400$$

المميز موجب لدينا حلين

$$\sqrt{\Delta} = 3420$$

وعليه

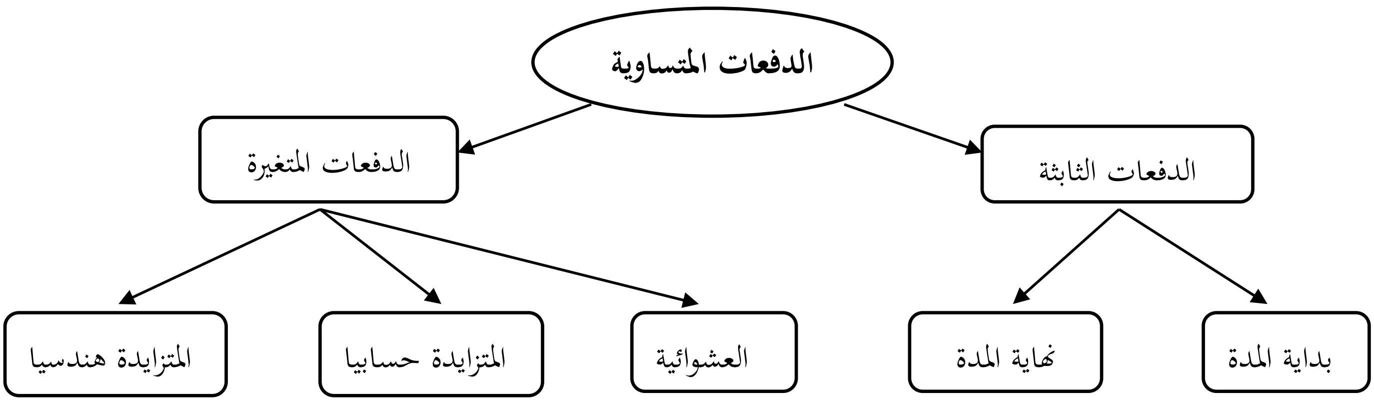
$$i_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\, a}$$
$$i_1 = \frac{-3060 + 3420}{6000}$$

$$i_1 = 0.06$$
$$i_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\, a}$$
$$i_1 = \frac{-3060 - 3420}{6000}$$
$i_1 = -1.08$ حل مرفوض

الفصل الخامس : الدفعات Annuities

المعاملات المالية البنكية غالبا ما تكون في المدى البعيد بحيث يتفاوت تكرار عمليات السحب وعمليات الإيداع من شخص لآخر وذلك من حيث قيمة المبالغ والمدة الفاصلة بين كل إيداع وسحب وهذا ما يكون غالبا حتمية في المعاملات البنكية مثل تسديد قرض خلال مدة معينة عن طريق دفعات خلال فترات يتم تحديدها من طرف البنك ويكون الزبون مجبر على احترام المبلغ المسدد وكذلك مدة التسديد لغاية انتهاء مدة التسديد، وفي حالة أخرى يمكن أن يلتزم شخص بتكوين رأس مال من خلال القيام بعملية إيداع متكررة ولفترات متساوية إلى غاية حصوله على المبلغ المراد تكوينه، ففي كلتا الحالتين يمكن أن نعتبر هده المعاملة المالية على أنها دفعات إما لتسديد قرض أو لتكوين رأس مال .الذي يتم دراسته في الرياضيات المالية بالنسبة للدفعات هو معرفة قيمة القرض المسدد أو قيمة الجملة المتحصل عليها من خلال عدد معين من الدفعات إلا أن هناك شرط تساوي المدة الزمنية بين الدفعات و تبقى ثابتة خلال كل الدفعات مثل سنة أو شهر و لذلك غالبا ما يطلق عليها الدفعات المتساوية Equal Payment.

ويمكن تصنيف الدفعات المتساوية إلى نوعين أساسيين، دفعات ثابتة ودفعات متغيرة وهذا على أساس مبلغ الدفعة أما على أساس مدة الدفع فهناك نوعين دفعات بداية المدة ودفعات نهاية المدة. الشكل التالي يوضع نوع الدفعات التي نصادفها في هذا الفصل .



الشكل(1–5) :أنواع الدفعات المتساوية[13]

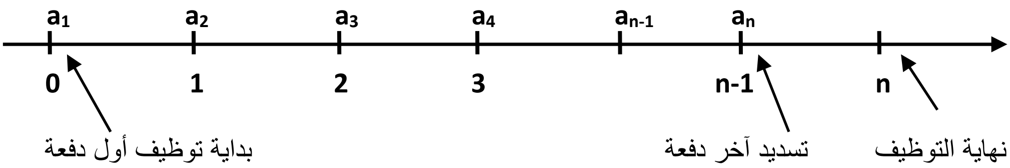
من إعداد الأستاذ[13]

1.5 الدفعات الثابتة Equal size payment

تتميز هذه الدفعات بثبات مبلغ الدفعة خلال مدة التوظيف أو خلال مدة تسديد القرض و تنقسم لقسمين :

1- الدفعات الثابتة بداية المدة An annuity due

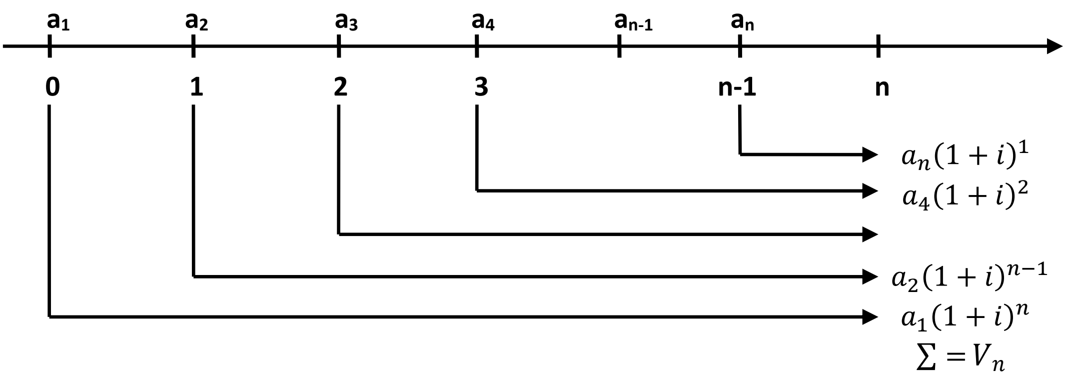
نميز هذا النوع من خلال تاريخ الدفعة الأولى الذي يكون في نفس تاريخ بداية العقد و نستعمل هذا النوع من الدفعات غالبا عند تكوين رأس مال، فتاريخ أول دفعة هو نفسه التاريخ لبداية تكوين رأس مال أو بداية التوظيف في البنك. كما يمكن تمييزها من خلال تاريخ آخر دفعة الذي يكون قبل فترة واحدة من نهاية العقد فآخر دفعة لتكوين رأس مال تكون قبل فترة واحدة من تاريخ تكوين الجملة النهائية و سحبها.



***الشكل(2-5)*:الدفعات الثابتة بداية المدة**[14]

الجملة المكتسبة لدفعات بداية المدة V_n

تتمثل في مجموع الدفعات إضافة للفوائد المترتبة عليها إلى غاية آخر مدة للتوظيف التي تكون فترة واحدة بعد آخر دفعة.



$$V_n = a_n(1+i) + a_{n-1}(1+i)^2 + a_{n-2}(1+i)^3 + \cdots \ldots + a_2(1+i)^{n-1} + a_1(1+i)^n$$

بما أن الدفعات متساوية نقوم بوضعها كعامل مشترك.

---

[14] من إعداد الأستاذ

$$V_n = a(1+i)\underbrace{[(1+i)^0 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \cdots ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]}_{\text{x}}$$

يمثل المقدار x مجموع متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ حدها الاول 1 و عدد حدودها n.

$$V_n = a\,(1+i)\left[\frac{(1+i)^n \text{-1}}{(1+i)-1}\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_n = a\,(1+i)\frac{(1+i)^n \text{-1}}{i}}}$$

ملاحظة :n عدد الدفعات، a : قيمة الدفعة الثابتة.

مثال 1-5

ابتداء من تاريخ 2010/01/01 يوظف تاجر دفعات ثابتة بقيمة 10000دج للدفعة بمعدل فائدة سنوي 6%. ما هي قيمة الجملة المكتسبة في نهاية سنة 2015 أي سنة بعد آخر دفعة ؟

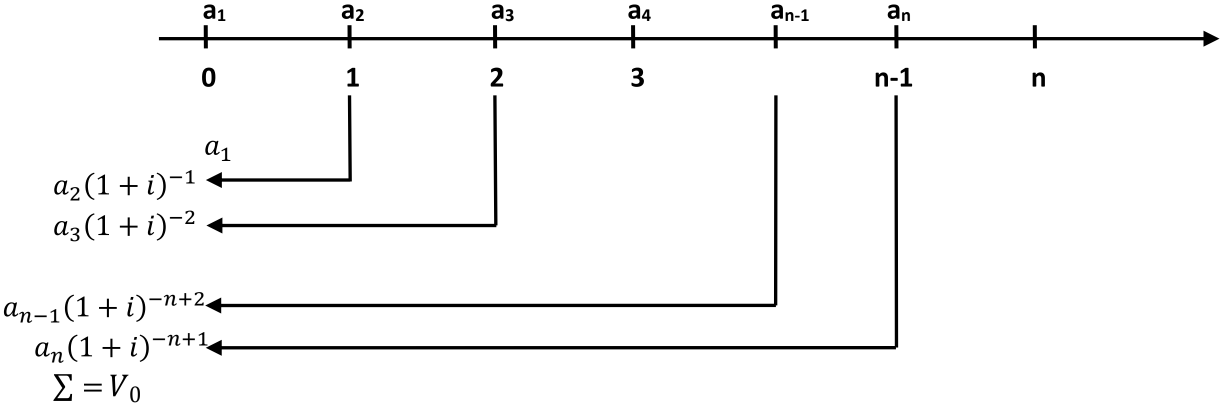
عدد الدفعات يساوي 5 و هي عبارة عن دفعات بداية المدة لان تاريخ آخر دفعة سنة قبل تاريخ انتهاء التوظيف أي تاريخ الحصول على الجملة المكتسبة، و عليه الجملة المكتسبة تقدر بـ :

$$V_n = 10000\,(1.06)\frac{1.06^5 \text{-1}}{0.06}$$

$$V_n = 59753.18$$

القيمة الحالية لدفعات بداية المدة V_0

تتمثل في مجموع الدفعات مستحدثة إلى تاريخ أول دفعة.



$$V_0 = a_1 + a_2(1+i)^{-1} + a_3(1+i)^{-2} + \cdots \ldots + a_{n-1}(1+i)^{-n+2} + a_n(1+i)^{-n+1}$$
$$V_0 = a\,\underbrace{[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots \ldots + (1+i)^{-n+2} + (1+i)^{-n+1}]}_{x}$$

يمثل المقدار x مجموع متتالية هندسية أساسها $(1+i)^{-1}$ حدها الاول 1 و عدد حدودها n.

$$V_0 = a\left[\frac{1-((1+i)^{-1})^n}{1-(1+i)^{-1}}\right]$$

بضرب البسط و المقام بـ $(1+i)$

$$\boxed{\boldsymbol{V_0 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}}$$

مثال 2-5

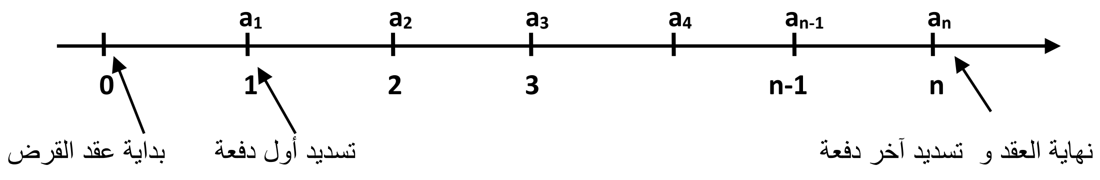
يتم تسديد قرض من خلال 5 دفعات سنوية ثابتة ابتداء من تاريخ الحصول على القرض حيث قيمة الدفعة تقدر بـ 22395.88 دج بمعدل فائدة 6%. ما هي قيمة القرض؟

بما أن أول دفعة هي تاريخ الحصول على القرض (هذا شيء افتراضي ليس واقعيا غالبا) فان نوع الدفعات هو بداية المدة.

$$V_0 = 22395.88 \times 106\frac{1-1.06^{-5}}{0.06}$$
$$V_0 = 100000$$

2- الدفعات الثابتة نهاية المدة An ordinary annuity

غالبا تستعمل دفعات نهاية المدة لتسديد القروض بحيث تكون الدفعة الأولى فترة واحدة بعد بداية عقد القرض و الدفعة الأخيرة تماما مع نهاية عقد القرض .

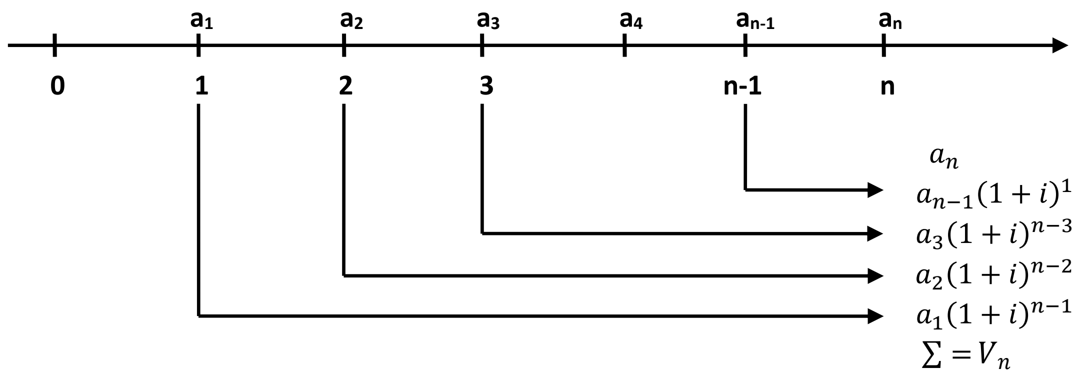


الشكل(3-5): الدفعات الثابتة نهاية المدة[15]

[15] من إعداد الأستاذ

الجملة المكتسبة لدفعات نهاية المدة V_n

تتمثل في مجموع الدفعات إضافة للفوائد المترتبة عليها إلى غاية آخر مدة العقد التي توافق مع آخر دفعة.



$$V_n = a_n + a_{n-1}(1+i)^1 + a_{n-2}(1+i)^2 + \cdots \ldots + a_2(1+i)^{n-2} + a_1(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a\underbrace{[1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \cdots \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]}_{x}$$

يمثل المقدار x مجموع متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ حدها الاول 1 و عدد حدودها n.

$$\boxed{V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

مثال 3–5

الجملة المتحصل عيها عند آخر دفعة لـ 10 دفعات قيمة الدفعة 2000 دج و بمعدل فائدة سنوي 5% تقدر بـ :

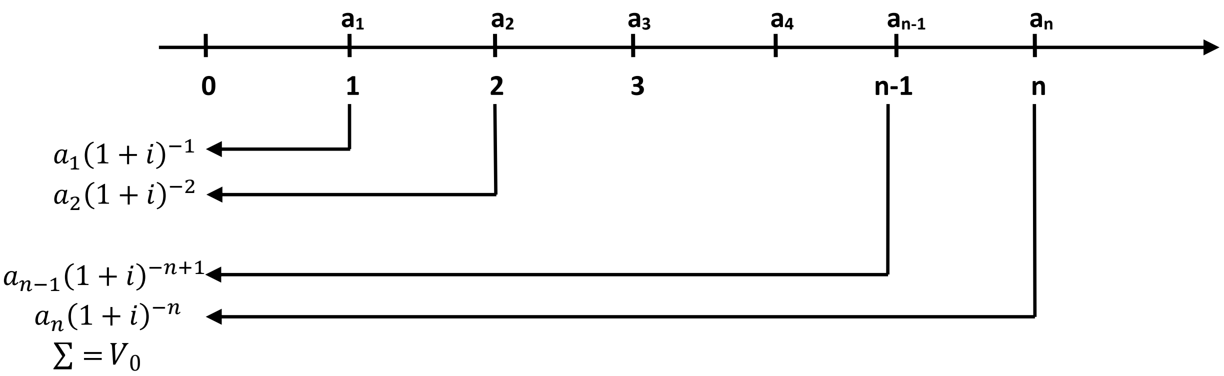
بما أن تاريخ استحقاق الجملة هو نفسه تاريخ آخر دفعة فهذه عبارة عن دفعات نهاية المدة.

$$V_n = 2000\frac{(1.05)^{10} - 1}{0.05}$$

$$V_n = 25155.78$$

القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة V_0

تتمثل في مجموع الدفعات مستحدثة إلى تاريخ بداية العقد أي فترة واحدة قبل تسديد أول دفعة.



$$V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \cdots \ldots + a_{n-1}(1+i)^{-n+1} + a_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a_1(1+i)^{-1}\underbrace{[1 + (1+i)^{-1} + \cdots \ldots + (1+i)^{-n+2} + a_n(1+i)^{-n+1}]}_{\text{x}}$$

يمثل المقدار x مجموع متتالية هندسية أساسها $(1+i)^{-1}$ حدها الاول 1 و عدد حدودها n.

$$V_0 = a_1(1+i)^{-1}\left[\frac{1-((1+i)^{-1})^n}{1-(1+i)^{-1}}\right]$$

بضرب البسط و المقام في $(1+i)$

$$\boxed{\boldsymbol{V_0 = a_1 \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}}$$

مثال 4–5

بتاريخ 15 مارس 2005 تحصل شخص على قرض ليسدده عن طريق 10 دفعات بقيمة 2500 دج للدفعة ابتداء من تاريخ 15 مارس 2006 و ذلك بمعدل فائدة 5%. احسب قيمة القرض؟

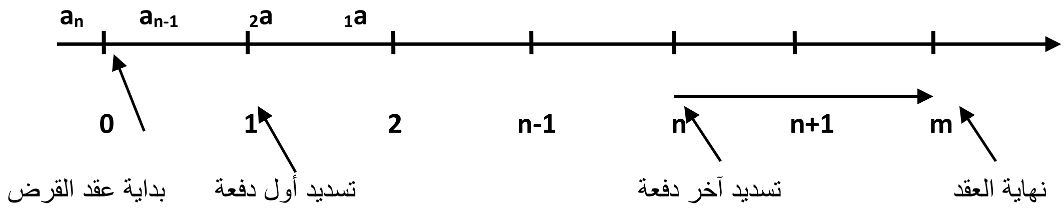
يتم التسديد عن طريق دفعات نهاية المدة لان اول دفعة سنة بعد الحصول على القرض و منه :

$$V_0 = 2500\frac{1-(1.05)^{-10}}{0.05}$$

$$V_0 = 19304.33$$

حساب الجملة المكتسبة بعد m فترة من تسديد الدفعة الأخيرة

رأينا في دفعات نهاية المدة أن الجملة المتحصل عليها توافق تاريخ تسديد آخر دفعة أما دفعات بداية المدة فتاريخ الجملة المتحصل عليها يكون فترة واحدة بعد تسديد آخر دفعة، و يمكن أن نقوم بحساب جملة الدفعات بعد m فترة من تسديد آخر دفعة من خلال رأسملة جملة الدفعات المتحصل عليها خلال m فترة باستعمال قانون الفائدة المركبة.



الشكل(4-5): **جملة الدفعات لـ m فترة بعد تسديد الدفعة الأخيرة**[16]

1- في حالة دفعات نهاية المدة

$$\boxed{\boldsymbol{V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{m-n}}}$$

2- في حالة دفعات بداية المدة

$$\boxed{\boldsymbol{V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{m-n+1}}}$$

مثال5-5

أحسب الجملة المكتسبة بتاريخ 30 جوان 2016 لـ 10 دفعات قيمة الواحدة 3500 دج حيث آخر دفعة كانت بتاريخ 2014/12/31 و ذلك بمعدل فائدة 5%.

المدة الزمنية بين تاريخ آخر دفعة و تحصيل الجملة هي سنة و نصف

$$V_n = 3500\frac{(1.05)^{10} - 1}{0.05}(1.05)^{1.5}$$

[16] من إعداد الأستاذ

مثال6–5

وظف تاجر دفعات ثابتة بقيمة 42000دج ابتداء من تاريخ2004/04/01 إلى غاية آخر دفعة في 2013/04/01 بمعدل فائدة سنوي 6%. ما هي الجملة المحصل عليها بتاريخ 2016/14/01؟

عدد الدفعات هو 10 ، إذا اعتبرناها دفعات بداية المدة فان الجملة المحصل عليها لعشرة دفعات تكون بتاريخ 2014/04/01 و الفرق المتبقي من الزمن سنتين حتى 2016/04/01

$$V_n = 42000\frac{(1.06)^{10}-1}{0.06}(1.06)^3$$

$$V_n = 659338.58$$

2.5 الدفعات المتغيرة

يتميز هذا النوع بعدم ثبات قيمة الدفعة خلال مدة التوظيف أو مدة التسديد و سنتطرق لدراسة ثلاث أنواع من هذه الدفعات.

1– دفعات عشوائية

في هذا النوع من الدفعات لا نستطيع مسبقا معرفة قيمة الدفعة المستحقة و هي غالبا تستعمل عند تكوين رأس مال لان للشخص الحرية الكاملة في تحديد قيمة الدفعة، أما عند تسديد القروض البنكية فلا يستعمل هذا النوع من الدفعات لاستحالة التنبؤ بقيمتها مسبقا. و بالنسبة لحساب الجملة المكتسبة أو القيمة الحالية فلا توجد صيغة محددة و لذلك نعتمد فقط على قانون الفائدة المركبة لكل دفعة .

مثال7–5

أحسب قيمة المبلغ المتحصل عليه سنة بعد آخر دفعة لخمس دفعات سنوية تقدر بـ:5200دج،7000دج،8500دج،8600دج و 9000دج و ذلك بمعدل فائدة 5%.

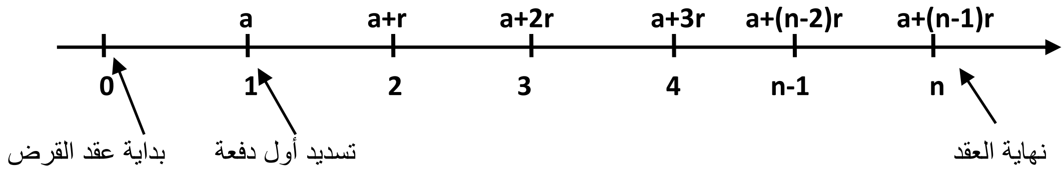
نوع الدفعات متغيرة عشوائية نهاية المدة

$$V_n = 5200(1.05)^5 + 7000(1.05)^4 + 8500(1.05)^3 + 8600(1.05)^2 + 9000(1.05)$$

$$V_n = 43916.52$$

2– الدفعات المتزايدة حسابيا

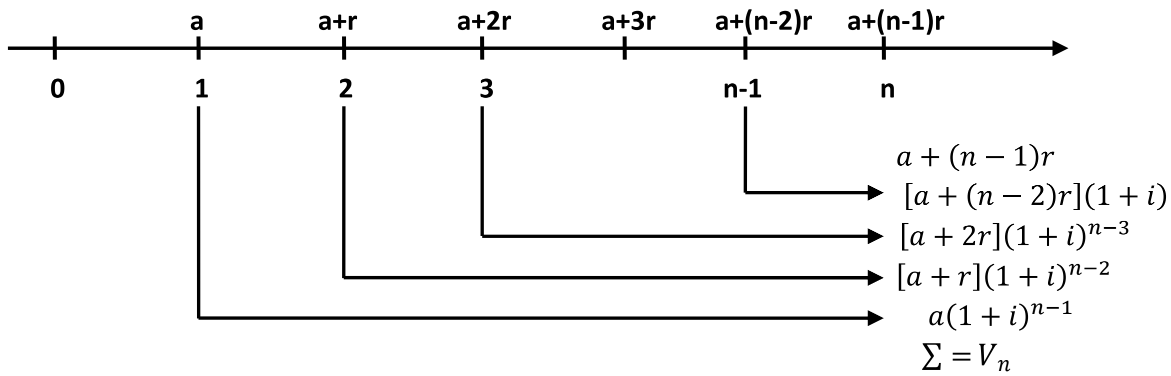
في هذا النوع من الدفعات يضاف مبلغ ثابت للدفعة الموالية إلى غاية الدفعة الأخيرة لتشكل متتالية حسابية أساسها يتمثل في قيمة الزيادة السنوية.



الشكل (5-5): الدفعات المتزايدة حسابيا[17]

الجملة المكتسبة للدفعات المتزايدة حسابيا نهاية المدة V_n

تتمثل في مجموع الدفعات إضافة للفوائد المترتبة عليها إلى غاية آخر مدة العقد التي توافق مع آخر دفعة.



$$V_n = a(1+i)^{n-1} + [a+r](1+i)^{n-2} + [a+2r](1+i)^{n-3} + \cdots \ldots + [a+(n-2)r](1+i) + a + (n-1)r$$

نقوم بعملية النشر و إخراج a عامل مشترك

$$V_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-3} + \cdots \ldots + a(1+i) + a + r(1+i)^{n-2} + 2r(1+i)^{n-3} + \cdots \ldots + (n-2)r(1+i) + (n-1)r$$

لتبسيط العلاقة نقوم بتجزئتها لقسمين $V_n = V_{n1} + V_{n2}$

$$V_{n1} = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-3} + \cdots \ldots + a(1+i) + a$$

نلاحظ أن V_{n1} تمثل متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ و حدها الأول a و عدد حدودها n و عليه يمكن تعويضها بعلاقة المجموع.

---

[17] من إعداد الأستاذ

$$V_{n1} = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_{n2} = r(1+i)^{n-2} + 2r(1+i)^{n-3} + \cdots \ldots + (n-2)r(1+i) + (n-1)r$$

بضرب طرفي المعادلة في $(1+i)$ نحصل على :

$$V_{n2}\,(1+i) = r(1+i)^{n-1} + 2r(1+i)^{n-2} + \cdots \ldots + (n-2)r(1+i)^2 + (n-1)r(1+i)$$

نقوم بعملية الطرح للعلاقتين الأخيرتين طرف لطرف مع الأخذ بعين الاعتبار الحدود التي لها نفس القوة

$$\begin{aligned} V_{n2}\,(1+i) - V_{n2} &= r(1+i)^{n-1} + [2r(1+i)^{n-2} - r(1+i)^{n-2}] + [3r(1+i)^{n-3} - 2r(1+i)^{n-3}] + \cdots \\ &+ [(n-2)r(1+i)^2 - (n-3)r(1+i)^2] + [(n-1)r(1+i) - (n-2)r(1+i)] - (n-1)r \end{aligned}$$

$$V_{n2}\,(1+i) - V_{n2} \underbrace{= r(1+i)^{n-1} + r(1+i)^{n-2} + r(1+i)^{n-3} + \cdots + r(1+i)^2 + r(1+i) +}_{\mathbf{X}} r - nr$$

نلاحظ أن المقدار x يمثل مجموع متتالية هندسية حدها الأول r أساسها $(1+i)$ و عدد حدودها n و بالتالي تصبح العلاقة الأخيرة كالتالي :

$$V_{n2}\, i = r\frac{(1+i)^n - 1}{i} - nr$$

$$V_{n2} = \frac{r}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}$$

بجمع العلاقتين V_{n1}+V_{n2} نحصل على :

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} + \frac{r}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_n = \left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}}}$$

مثال5-8

وظف شخص 6 دفعات سنوية تتزايد بقيمة 1000دج سنويا حيث قيمة الدفعة الأولى 3000دج و ذلك بمعدل فائدة 5%. الجملة المحصل عليها عند آخر دفعة تقدر ب :

$$V_n = \left(3000 + \frac{1000}{0.05}\right)\frac{(1.05)^6 - 1}{0.05} - \frac{6 \times 1000}{0.05}$$
$$V_n = 36444$$

القيمة الحالية للدفعات المتزايدة حسابيا نهاية المدة V_0

للحصول على القيمة الحالية للدفعات المتزايدة حسابيا نقوم باستحداث علاقة الجملة المكتسبة إلى بداية الفترة

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = \left(\left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}\right)(1+i)^{-n}$$
$$V_0 = \left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i} \times (1+i)^{-n} + \frac{nr}{i} - \frac{nr}{i}$$

$$V_0 = \left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + nr \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_0 = \left(a + \frac{r}{i} + nr\right)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i}}}$$

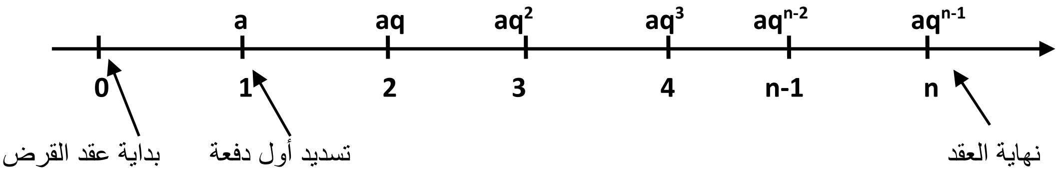
مثال9-5

تحصل شخص على قرض ليسدده عن طريق 10 دفعات قيمة الأولى 1500دج و تتزايد كل سنة بمقدار 200دج و ذلك بمعدل فائدة سنوي 5%. ما هي قيمة القرض ؟

$$V_0 = \left(1500 + \frac{200}{0.05} + 10 \times 200\right)\frac{1-(1.05)^{-10}}{i} - \frac{10 \times 200}{0.05}$$
$$V_0 = 17913$$

3- الدفعات المتزايدة هندسيا نهاية المدة

هذا النوع من الدفعات يتزايد سنويا بمعدل ثابت إلى غاية الدفعة الأخيرة لتشكل متتالية هندسية أساسها يتمثل في قيمة الزيادة السنوية(q>1).

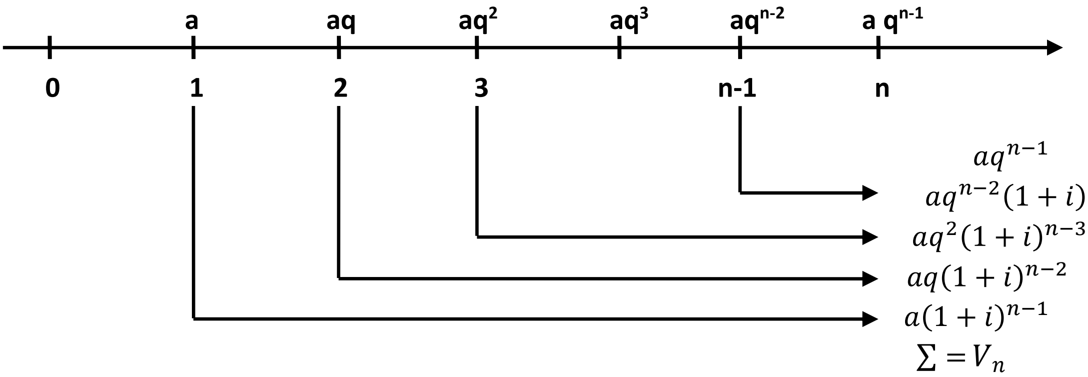


الشكل(5-6):الدفعات المتزايدة هندسيا[18]

[18] من إعداد الأستاذ

الجملة المكتسبة للدفعات المتزايدة هندسيا نهاية المدة V_n

تتمثل في مجموع الدفعات إضافة للفوائد المترتبة عليها إلى غاية آخر مدة العقد التي توافق مع آخر دفعة.



$$V_n = aq^{n-1} + aq^{n-2}(1+i) + \cdots \ldots + aq^2(1+i)^{n-3} + aq(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

من خلال قراءتنا للعلاقة من اليسار لليمين نلاحظ أن هذا المجموع يشكل متتالية هندسية أساسها $q(1+i)^{-1}$ ، حدها الاول $a(1+i)^{n-1}$ ، و عدد حدودها n .

$$V_n = a(1+i)^{n-1}\frac{\left(q(1+i)^{-1}\right)^n - 1}{q(1+i)^{-1} - 1}$$

$$V_n = a(1+i)^{n-1}\frac{\frac{q^n}{(1+i)^n} - 1}{\frac{q}{(1+i)} - 1}$$

$$V_n = a(1+i)^{n-1}\frac{\frac{q^n - (1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{(1+i)}}$$

$$V_n = a(1+i)^{n-1}\frac{q^n - (1+i)^n}{(1+i)^n} \times \frac{(1+i)}{q-(1+i)}$$

$$V_n = a(1+i)^{n-1}\frac{q^n - (1+i)^n}{(1+i)^{n-1}} \times \frac{1}{q-(1+i)^n}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_n = a \times \frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)}}}$$

مثال5-10

يقوم شخص بتوظيف دفعات سنوية تتزايد بمعدل 5% سنويا حيث قيمة الدفعة الأولى 4500 دج خلال خمس سنوات و بمعدل فائدة 6%. ما هي الجملة المتحصل عليها عند آخر دفعة ؟

$$V_n = 4500 \times \frac{1.05^5 - (1.06)^5}{1.05 - (1.06)}$$

$$V_n = 27874.80$$

القيمة الحالية للدفعات المتزايدة هندسيا نهاية المدة V_0

للحصول على القيمة الحالية للدفعات المتزايدة هندسيا نقوم باستحداث علاقة الجملة المكتسبة إلى بداية الفترة

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a \times \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \times (1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}}$$

مثال5-11

يتم تسديد قرض عن طريق 6 دفعات متزايدة هندسيا بمعدل سنوي 3% حيث قيمة الدفعة الأولى 3600 دج و ذلك بمعدل فائدة سنوي 6%. ها هي قيمة القرض ؟

$$V_0 = \frac{3600}{1.06^6} \times \frac{1.03^6 - 1.06^6}{1.03 - 1.06}$$

$$V_0 = 18988.82$$

تمارين محلولة للفصل الخامس

تمرين 5-1

يوظف شخص كل سنة مبلغ ثابت قيمته 9000دج لدى بنك تجاري بمعدل فائدة 8% ابتداء من تاريخ 2003/11/01 إلى غاية تاريخ 2012/11/01.

أحسب الجملة المتحصل عليها عند :

1- تاريخ آخر دفعة ؟
2- سنة بعد آخر دفعة ؟
3- إلى غاية 2015/11/01؟

تمرين 5-2

تحصل شخص على قرض لشراء سيارة من بنك تجاري على ان يسدده خلال 5 سنوات بدفعات شهرية و بمعدل فائدة سنوي 6%، قيمة الدفعة 20000دج.

1- أحسب قيمة شراء السيارة ؟
2- إذا أراد تسديد القرض خلال 4 سنوات ، ما هي قيمة الدفعة الواجب تسديدها؟

تمرين 5-3

تحصل شخص على قرض بنكي بقيمة 400000دج ليسدده عن طريق دفعات سنوية قيمة الدفعة 54347.183 دج و ذلك بمعدل فائدة سنوي 6%.

1- ما هو عدد الدفعات الواجب تسديدها ؟
2- أ حسب قيمة الدفعة الجديدة إذا أراد تسديد القرض عن طريق 20 دفعة ؟

تمرين 5-4

تحصل تاجر على قرض بتاريخ 2012/03/01 من بنك تجاري بمعدل فائدة سنوي 8%، ابتداء من تاريخ 2012/09/01 ، بدأ يسدد عن طريق دفعات شهرية ثابتة حتى بلغ 20 دفعة قيمة الدفعة 15000دج وتبقى له مبلغ سدد بعد 6 أشهر من تاريخ آخر دفعة.

1- حدد تاريخ نهاية العقد مع البنك أي تسديد المبلغ المتبقي ؟

2- احسب قيمة المبلغ المتبقي عند الأزمنة التالية :

3- مباشر بعد تسديد آخر دفعة ؟

4- بتاريخ 2012/09/01 قبل تسديد الدفعة الأولى ؟

5- حدد قيمة القرض ؟

التمرين 5-5

تحصل شخص على قرض ليسدده بـ : 10 دفعات سنوية متساوية قيمة الدفعة 9878.01 دج بمعدل فائدة سداسي 6%.

1- ما طبيعة الدفعات ؟

2- أحسب المعدل السنوي المكافئ ؟

3- أحسب قيمة القرض ؟

4- أحسب قيمة الدين 6 أشهر مباشرة بعد دفع الدفعة السادسة ؟

التمرين 5-6

سحبت عينة تتكون من أربع زبائن A ,B,C,D لأحد البنوك الادخارية لدراسة سلوكهم الادخاري، تم تسجيل عملية الدفع والسحب خلال 10 أشهر من خلال الجدول التالي : إشارة (-) تدل على السحب :

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	5000	5000	5000	5000	-2000	-2000	-2000	-2000	-2000	-2000
B	6000	6100	6200	6300	6400	6500	6600	6700	6800	6900
C	2000	4000	8000	16000	32000					
D	2000	2000	2000	4500	6000	6000	6000			

1- ما طبيعة دفعات التوظيف A,B,C,D ؟

2- أحسب رصيد الشخص A بعد دفع الدفعة الرابعة ؟ ثم بعد آخر سحب ؟

إذا علمت أن الجملة المكتسبة من طرف الشخص B تحسب بالعلاقة التالية :

$$Vn = \frac{(1+i)^n-1}{i} \times \left(a + \frac{r}{i}\right) - \frac{nr}{i}$$

1- أحسب الجملة المكتسبة سنة بعد الدفعة الأخيرة ؟ إذا أراد سحب هذه الجملة ب 10 دفعات شهرية متزايدة ب 200 دج الدفعة الأولى بعد شهر من تحصيله للجملة ، احسب قيمة الدفعة الأولى ؟

2- أحسب جملة الشخص C سنة بعد آخر دفعة ؟

3- أحسب جملة الشخص D عند أخر دفعة ؟

معدل الفائدة السنوي 6 %

التمرين 5-7

الجدول التالي يمثل تدفقات نقدية لتسديد قرض

الفترة	0	1	2	3	4	5
الدفعة	-	a	a+1000	a+2000	a+3000	a+4000

1- ما نوع هذه الدفعات ؟

2- برهن أن جملة الدفعات عند آخر دفعة تساوي :

$$V_5 = \left(a + \frac{1000}{i}\right) \times \frac{(1+i)^5 - 1}{i} - \frac{5000}{i}$$

3- إذا كان i= 6% و a=5000 أحسب قيمة القرض ؟

التمرين 5-8

الجدول التالي يبين دفعات نقدية لحساب ادخار أحد الأشخاص خلال الفترة الممتدة من 2006/03/01 إلى غاية 2012/01/01.

تاريخ الايداع	2006/03/01	2007/01/01	2008/01/01	2009/01/01	2010/01/01	2011/01/01
قيمة الدفعة	2500	10000	10000	10000	20000	20000

1- قام بسحب المبلغ بتاريخ 2006/12/31 ، إذا كان معدل الفائدة 6% ، أحسب قيمة المبلغ المتحصل عليه ؟

2- أحسب الجملة المتحصل عليها بتاريخ 2010/01/01 قبل دفع مبلغ 20000 ؟

3- أحسب الجملة المتحصل عليها عند نهاية التوظيف ؟

4- ما هي المدة اللازمة لكي يحصل على مبلغ 90000 دج ؟

التمرين 9-5

يتم تسديد قرض قيمته 27768.38 دج بعدل فائدة 6 %من خلال الدفعات التالية :

- دفعتين بقيمة مبلغ x
- تليها دفعتين بقيمة نصف المبلغ x
- تليها دفعتين بقيمة ضعف المبلغ x

1- أحسب قيمة المبلغ x ؟

التمرين 10-5

يوظف شخص مبلغ 50000 دج كل سنتين خلال 20 سنة بمعدل فائدة سنوي 5%.

1- أحسب جملة الدفعات عند آخر دفعة ؟

حلول تمارين الفصل الخامس

حل التمرين 1–5

لدينا عدد الدفعات ابتداء من 2003/11/01 إلى غاية 2012/11/01 يقدر ب 10 دفعات

1- لإيجاد الجملة عند تاريخ آخر دفعة نستعمل قانون دفعات نهاية المدة

$$V_n = 9000\frac{1.08^{10} - 1}{0.08}$$

$$V_n = 130379.06$$

2- لإيجاد الجملة سنة بعد تاريخ آخر دفعة نستعمل قانون دفعات بداية المدة

$$V_n = 9000\frac{1.08^{10} - 1}{0.08} \times 1.08$$

$$V_n = 140809.38$$

3- الجملة إلى غاية 2015/11/01 (عدد السنوات من تاريخ آخر دفعة إلى 2015/11/01 هو 3سنوات).

$$V_n = 9000\frac{1.08^{10} - 1}{0.08} \times 1.08^3$$
$$V_n = 164240.06$$

حل التمرين 2–5

1- أولا نقوم بحساب معدل الفائدة الشهري المكافئ

$$i_m = \sqrt[12]{1.06} - 1$$

$$i_m = 0.486\% = 0.00486$$

2- قيمة شراء السيارة تتمثل في القيمة الحالية لجملة الدفعات المسددة لذلك نستعمل قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة لان تسديد الدفعة الأولى يكون شهر بعد الحصول على القرض، حيث عدد الدفعات هو 60 دفعة.

$$V_0 = 20000\frac{1 - 1.00486^{-60}}{0.00486}$$

$$V_0 = 1038703.11$$

3- قيمة الدفعة إذا أراد تسديد القرض خلال 4 سنوات أي 48 دفعة هي :

$$1038703.11 = a\ \frac{1 - 1.00486^{-48}}{0.00486}$$

$$a = 24314.04$$

حل التمرين 3-5

1- عدد الدفعات يقدر بـ :

$$400000 = 54347.183\ \frac{1 - 1.06^{-n}}{0.06}$$

$$0.441 = 1 - 1.06^{-n}$$

$$0.558 = 1.06^{-n}$$

$$\ln 0.558 = -n \ln 1.06$$

$$-n = \frac{\ln 0.558}{\ln 1.06}$$

$$n = 10$$

2- قيمة الدفعة الجديدة هي :

$$400000 = a\ \frac{1 - 1.06^{-20}}{0.06}$$

$$a = 34873.82$$

حل التمرين 4-5

1- تحديد تاريخ نهاية العقد أي تسديد آخر مبلغ : لدينا عدد الدفعات 20 دفعة ابتداء من 2012/09/01 و بالتالي آخر دفعة تكون بتاريخ 2014/04/01، و بعد 6 أشهر سدد الباقي أي بتاريخ 2014/10/01.

أولا نحدد المعدل الشهري المكافئ

$$i_m = \sqrt[12]{1.08} - 1$$

$$i_m = 0.643\% = 0.00643$$

2- إيجاد قيمة المبلغ المتبقي عند الأزمنة التالية :

3- مباشر بعد تسديد آخر دفعة : نحسب القيمة الحالية للمبلغ المتبقي بتاريخ 2014/04/01 أي لمدة 6 أشهر.

$$V_{1.4.2014} = 156369.56 \times 1.08^{-0.5} = 156369.56 \times 1.00643^{-6}$$
$$V_{1.4.2014} = 150466.68$$

4- بتاريخ 2012/09/01 قبل تسديد الدفعة الأولى :نقوم بحساب القيمة الحالية للدفعات و اعتبارها دفعات بداية المدة و نضيف إليها القيمة الحالية للمبلغ المتبقي بتاريخ 2012/09/01.

$$V_{1.9.2012} = 15000\ \frac{1 - 1.00643^{-20}}{0.00643} \times 1.00643 + 150466.68 \times 1.00643^{-19}$$

$$V_{1.9.2012} = 415685.78$$

5- تحديد قيمة القرض :

$$V_0 = 415685.78 \times 1.08^{-0.5}$$

$$V_0 = 400000$$

حل التمرين 5-5

1- طبيعة الدفعات نهاية المدة لأنها ناجمة عن تسديد قرض

2- تحديد معدل الفائدة السنوي المكافئ

$$i = 1.06^2 - 1$$

$$i = 12.36\ \%$$

3- حساب قيمة القرض

$$V_0 = a\ \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 9878.01 \times \frac{1 - (1.1236)^{-10}}{0.1236}$$

$$V_0 = 55000$$

4- حساب قيمة الدين 6 أشهر مباشرة بعد دفع الدفعة السادسة

أولا نحسب قيمة الدين بعد دفع الدفعة السادسة

$$V_6 = 9878.01 \times \frac{1 - (1.1236)^{-4}}{0.1236}$$

$$V_6 = 29776.89$$

ثانيا نقوم برأسملة قيمة الدين بـ : 6 أشهر

$$V_{6.5} = 29776.89 \times 1.1236^{0.5}$$

$$V_{6.5} = 31563.50$$

حل التمرين 6-5

1- طبيعة الدفعات :

- A : ثابتة
- B : متزايدة حسابيا
- C : متزايدة هندسيا
- D : عشوائية

2-

- حساب رصيد الشخص A بعد دفع الدفعة الرابعة

أولا نحسب المعدل الشهري المكافئ

$$i_m = \sqrt[12]{1.06} - 1$$

$$i_m = 0.486\%$$

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_n = 5000 \times \frac{1.00486^4 - 1}{0.00486}$$

$$V_n = 20146.27$$

- حساب رصيد الشخص A بعد آخر سحب

$$V_n{}' = \left[20146.27 - 2000 \times \frac{1 - 1.00486^{-6}}{0.00486}\right] \times 1.00486^6$$

$$V_n{}' = 8594.17$$

-3

- حساب الجملة المكتسبة للشخص B سنة بعد دفع الدفعة الاخيرة

$$V_n = \left[\frac{1.00486^{10} - 1}{0.00486} \times \left(6000 + \frac{100}{0.00486}\right) - \frac{10 \times 100}{0.00486}\right] \times 1.00486^{12}$$

$$V_n = 69835.16$$

- حساب قيمة الدفعة الأولى

$$V_0 = \left(a + \frac{r}{i} + n \times r\right) \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n \times r}{i}$$

$$69835.16 = \left(a + \frac{200}{0.00486} + 10 \times 200\right) \times \frac{1 - 1.00486^{-10}}{0.00486} - \frac{10 \times 200}{0.00486}$$

$$a = 6279.54$$

-4 حساب جملة الشخص C سنة بعد آخر دفعة

$$V_n = a \times \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \times (1+i)$$
$$V_n = 2000 \times \frac{2^5 - 1.00486^5}{2 - 1.00486} \times 1.06$$

$$V_n = 65986.6$$

5- حساب جملة الشخص D عند آخر دفعة

$$V_n = 2000 \times \frac{1.00486^3 - 1}{0.00486} \times 1.00486^4 + 4500 \times 1.00486^3 + 6000 \times \frac{1.00486^3 - 1}{0.00486}$$
$$V_n = 28800.81$$

حل التمرين 5-7

1- نوع الدفعات متغيرة متزايدة حسابيا

2- البرهان

$$V_5 = (a+4000) + (a+3000)(1+i) + (a+2000)(1+i)^2 + (a+1000)(1+i)^3 + a\,(1+i)^4$$

نقوم بعملية النشر ونبسيط العلاقة لقسمين $V_5 = V_5' + V_5''$

$$V_5 = [a + a\,(1+i) + a\,(1+i)^2 + a\,(1+i)^3 + a\,(1+i)^4]$$
$$+[4000 + 3000\,(1+i) + 2000\,(1+i)^2 + 1000\,(1+i)^3]$$

بحيث :

$$V_5' = [a + a\,(1+i) + a\,(1+i)^2 + a\,(1+i)^3 + a\,(1+i)^4]$$

عبارة عن متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ و حدها الاول 1 و عدد حدودها 5 و منه يمكن كتابتها على الشكل :

$$V_5' = a\frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

$$V_5'' = [4000 + 3000\,(1+i) + 2000\,(1+i)^2 + 1000\,(1+i)^3]$$

بضرب طرفي المعادلة في $(1+i)$ نحصل على :

$$V_5''(1+i) = 4000\,(1+i) + 3000\,(1+i)^2 + 2000\,(1+i)^3 + 1000(1+i)^4$$

نقوم بعملية الطرح للعلاقتين الأخيرتين طرف لطرف مع الأخذ بعين الاعتبار الحدود التي لها نفس القوة

$$V_5''(1+i) - V_5'' = -4000 + 1000\,(1+i) + 1000\,(1+i)^2 + 1000\,(1+i)^3 + 1000(1+i)^4$$

$$V_5''(1+i) - V_5'' = -5000 + \underbrace{[1000 + 1000\,(1+i) + 1000\,(1+i)^2 + 1000\,(1+i)^3 + 1000(1+i)^4]}_{\mathbf{x}}$$

نلاحظ أن المقدار x يمثل مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1000 أساسها $(1+i)$ و عدد حدودها 5 وبالتالي تصبح العلاقة الأخيرة كالتالي :

$$x = 1000\,\frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

وعليه

$$V_5''(1+i) - V_5'' = -5000 + 1000 \times \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

$$V_5'' \times i = -5000 + 1000 \times \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

$$V_5'' = \frac{-5000}{i} + \frac{1000}{i} \times \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

بجمع العلاقتين $V_5' + V_5''$ نحصل على :

$$V_5 = a\,\frac{(1+i)^5 - 1}{i} + \frac{-5000}{i} + \frac{1000}{i} \times \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

$$V_5 = \left(a + \frac{1000}{i}\right) \times \frac{(1+i)^5 - 1}{i} - \frac{5000}{i}$$

3- حساب قيمة القرض

$$V_0 = \left(a + \frac{r}{i} + n.r\right) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n.r}{i}$$

$$V_0 = \left(5000 + \frac{1000}{0.06} + 5 \times 1000\right) \times \frac{1-1.06^{-5}}{0.06} - \frac{5 \times 1000}{0.06}$$

$$V_0 = 28994.63$$

حل التمرين 8–5

1- إيجاد الجملة بتاريخ 2006/12/31

$$C_n = C_0 \times (1 + i.n)$$
$$C_n = 2500 \times \left(1 + 0.06 \times \frac{8}{12}\right)$$
$$C_n = 2600$$

2- إيجاد الجملة بتاريخ 2010/01/01 قبل دفع الدفعة

$$V_n = 2600 \times 1.06^3 + 10000 \times \frac{1.06^3 - 1}{0.06}$$

$$V_n = 34932.64$$

3- إيجاد الجملة بتاريخ 2012/01/01 عند نهاية التوظيف

$$V_n = 2600 \times 1.06^5 + 10000 \times \frac{1.06^3 - 1}{0.06} \times 1.06^2 + 20000 \times \frac{1.06^2 - 1}{0.06}$$

$$V_n = 34932.64 \times 1.06^2 + 20000 \times \frac{1.06^2 - 1}{0.06}$$
$$V_n = 80450.31$$

4- المدة اللازمة لكي تصبح الجملة تساوي 90000 دج

$$90000 = 80450.31 \times 1.06^n$$
$$1.1187 = 1.06^n$$
$$\ln 1.1187 = n.\ln 1.06$$
$$n = 1.925 \approx \text{سنة و} 11 \text{ شهر}$$

حل التمرين 9-5

-1 إيجاد قيمة المبلغ x علما أن القيمة الحالية لمجموع الدفعات هي 27768.38

$$27768.38 = x.\frac{1-1.06^{-2}}{0.06} + \frac{x}{2}.\frac{1-1.06^{-2}}{0.06}.1.06^{-2} + 2x.\frac{1-1.06^{-2}}{0.06}.1.06^{-4}$$

$$27768.38 = x.\left[\frac{1-1.06^{-2}}{0.06} + \frac{1}{2}.\frac{1-1.06^{-2}}{0.06}.1.06^{-2} + 2.\frac{1-1.06^{-2}}{0.06}.1.06^{-4}\right]$$

$$x = 5000$$

حل التمرين 10-5

-1 إيجاد جملة الدفعات عند آخر دفعة علما أنه لدينا 10 دفعات خلال 20 سنة

الطريقة الأولى:

لدينا :

- جملة الدفعة الأولى تقدر بـ : 50000×1.05^{18}
- جملة الدفعة الثانية تقدر بـ : 50000×1.05^{16}
- جملة الدفعة الثالثة تقدر بـ : 50000×1.05^{14}
- ....
- جملة الدفعة التاسعة تقدر بـ : 50000×1.05^{2}
- جملة الدفعة العاشرة تقدر بـ : 50000

الدفعة الإجمالية هي مجموع جملة الدفعات الذى يكون مجموع متتالية هندسية ذات الأساس 1.05^2 والتى عدد حدودها 10 و حدها الأول1 و يقدر بـ :

$$50000.\frac{[1.05^2]^{10}-1}{1.05^2-1} = 806486.34$$

الطريقة الثانية :

- نقوم بحساب معدل الفائدة لسنتين المكافئ لـ : 5%

$$1.05^2 = 1 + i$$
$$i = 10.25\%$$

- نقوم بحساب جملة 10 دفعات نهاية المدة باستعمال معدل الفائدة لسنتين

$$50000.\frac{1.1025^{10} - 1}{0.1025} = 806486.34$$

الفصل السادس : استهلاك القروض Undivided loan

يعد الاقتراض البنكي السبيل الأبسط و الأقل تكلفة غالبا من أجل تمويل المشاريع بالنسبة للمؤسسات الاقتصادية و كذلك التمويل الاستهلاكي بالنسبة للأفراد ، فالشخص المقترض يتحصل على مبلغ محدد من طرف المقرض عن طريق عقد مبرم بينهما يتم فيه الاتفاق على مدة التسديد، طريق التسديد و معدل الفائدة المستعمل، و هذا النوع من القروض البسيطة التى تتم من طرف مقرض واحد تسمى بالقروض الغير مجزئة.

1.6 طرق استهلاك القروض البنكية

هناك عدة طرق يسدد بها الأفراد القرض البنكي المتحصل علية و ذلك حسب الاتفاق المبدئي بين البنك و المقترض ، و من بين طرق التسديد ما يلي :

نعتمد على الرموز التالية في باقي الفصل :

- I_n الفائدة المترتبة في السنة **n**
- K_0 قيمة القرض الأصلية
- K_n رأس المال المتبقى في نهاية السنة **n**
- a_n الدفعة في السنة **n**
- C_n القسط المستهلك من القرض في السنة **n**

1– التسديد في نهاية مدة القرض In fine

في هذه الحالة تدفع الفوائد سنويا على أصل القرض على أن يتم دفع أصل القرض عند نهاية العقد .بحيث يحسب مبلغ الفائدة الثابتة I على أساس معدل سعر الفائدة i ، و تكون الدفعة a خلال مدة العقد n تساوي مبلغ الفائدة I، إلا الدفعة الأخيرة a_n يضاف إليها أصل القرض K .

الفائدة السنوية

$$\boxed{I = I_1 = I_2 = \cdots I_n = K \times i}$$

الدفعة السنوية حتى ما قبل الأخيرة

$$\boxed{a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = I}$$

الدفعة الأخيرة

$$\boxed{a_n = K \times (1 + i)}$$

مثال6-1

تحصل شخص على قرض بقيمة 120000دج ليسدده بعد 5 سنوات عند نهاية العقد و ذلك بمعدل فائدة سنوي 10%.

- أحسب قيمة الدفعة السنوية ؟
- قم بإعداد جدول استهلاك القرض ؟

قيمة الدفعة السنوية هي نفسها قيمة الفائدة السنوية بما أن القرض يسدد إلى نهاية الفترة ما عدا الدفعة الأخيرة التى يضاف إليها قيمة أصل القرض

$$a_1 = \cdots = a_4 = I = 120000 \times 0.1$$
$$a = I = 12000$$
$$a_5 = 120000 \times 1.1$$
$$a_5 = 132000$$

جدول استهلاك القرض

المدة	الفائدة	القسط المسدد	الدفعة	القسط المتبقي
1	12000	0	12000	120000
2	12000	0	12000	120000
3	12000	0	12000	120000
4	12000	0	12000	120000
5	12000	120000	132000	0

2– التسديد بأقساط ثابتة

يتم في هذه الحالة تقسيم أصل القرض على عدد سنوات مدته حيث يتم تسديد جزء ثابت C من القرض إضافة إلى الفائدة المترتبة عن أصل القرض المتبقي و في هذه الحالة تكون الفوائد I متناقصة و بالتالي الدفعات متناقصة.

- القسط السنوي المسدد

$$\boxed{C = \frac{K}{n}}$$

- الدفعة السنوية

$$\boxed{a_n = C + K_{n-1} \times i}$$

مثال2–6

قرض بقيمة 240000دج يسدد خلال 6 سنوات من خلال أقساط سنوية ثابتة بمعدل فائدة 5%.

- أحسب قيمة القسط السنوي ؟
- قم بإعداد جدول استهلاك القرض ؟

قيمة القسط المسدد سنويا هي :

$$C = \frac{240000}{6}$$

$$C = 40000$$

جدول استهلاك القرض

المدة	الفائدة	القسط المسدد	الدفعة	القسط المتبقي
1	12000	40000	52000	200000
2	10000	40000	50000	160000
3	8000	40000	48000	120000
4	6000	40000	46000	80000
5	4000	40000	44000	40000
6	2000	40000	42000	0

3– التسديد بدفعات ثابتة

في هذه الحالة يكون التسديد بدفعات ثابتة تحتوي كل دفعة على جزء من أصل القرض و جزء من الفائدة المترتب على الأصل المتبقي ليكون مجموعهما دفعة متساوية تسدد خلال مدة العقد، حيث تحسب a من خلال العلاقة التالية :

$$\boxed{\boldsymbol{a = K_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}}$$

نموذج جدول استهلاك القرض بدفعات ثابتة

المدة	الفائدة I	القسط C	الدفعة a	القسط المتبقي K
1	$K_0 i$	C_1	$a = C_1 + K_0 i$	$K_1 = K_0 - a$
2	$K_1 i$	C_2	$a = C_2 + K_1 i$	$K_2 = K_1 - a$
3	$K_2 i$	C_3	$a = C_3 + K_2 i$	$K_3 = K_2 - a$
....				
.....				
n-1	$K_{n-2} i$	C_{n-1}	$a = C_{n-1} + K_{n-2} i$	$K_{n-1} = K_{n-2} - a$
n	$K_{n-1} i$	C_n	$a = C_n + K_{n-1} i$	$K_n = K_{n-1} - a$

مثال6–3

تحصلت مؤسسة تجارية على قرض مالي قيمته 520000دج يسدد خلال خمس سنوات بدفعات تايثة، إذا كان معدل الفائدة البنكي 5% :

- أحسب قيمة الدفعة الثابتة ؟
- قم بإعداد جدول استهلاك القرض ؟

قيمة الدفعة الثابتة هي :

$$a = 520000 \times \frac{0.05}{1-(1.05)^{-5}}$$

$$a = 120106.90$$

جدول استهلاك القرض

المدة	الفائدة	القسط	الدفعة	القسط المتبقي
1	26000	94106.90	120106.90	425893.10
2	21294.65	98812.24	120106.90	327080.85
3	16354.04	103752.85	120106.90	223328.00
4	11166.40	108940.50	120106.90	114387.50
5	5719.37	114387.50	120106.90	0

2.6 علاقات مستخلصة من جدول استهلاك القرض من خلال دفعات ثابتة

هناك عدد كثير من العلاقات التي تربط عناصر القرض فيما بينها كالاستهلاك السنوي، الفائدة ، أصل القرض و قيمة الدفعة و من بينها نجد :

مجموع الاستهلاكات يساوي قيمة القرض

$$\boxed{k_0 = \sum_{n=1}^{n} C_n}$$

مجموع الدفعات يساوي مجموع الاستهلاكات زائد مجموع الفوائد

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n} a_n = \sum_{n=1}^{n} C_n + \sum_{n=1}^{n} I_n}$$

مثال4-6

من جدول استهلاك قرض لمدة 5 سنوات قدرت قيمة الاستهلاكات السنوية كالتالي:
14477.98دج،15201.88 دج،15961.98 دج، 16760.08 دج،17598.08 دج.

- أحسب قيمة القرض ؟
- اذا كانت قيمة الدفعة الثابتة تقدر بـ 18477.08 دج ، ما هو مجموع الفوائد المسددة ؟

الحل

- قيمة القرض تقدر بـ :

$$k_0 = 17598.08 + 16760.08 + 15961.98 + 15201.88 + 14477.98$$

$$k_0 = 80000$$

- مجموع الفوائد المسددة يقدر بـ :

$$\sum_{n=1}^{n} I_n = 18477.08 \times 5 - 80000$$

$$\sum_{n=1}^{n} I_n = 12385.4$$

المبلغ المتبقى ما قبل السنة الأخيرة يساوي الاستهلاك الأخير

$$\boxed{k_{n-1} = C_n}$$

مثال5-6

قرض يسدد عن طريق 6 دفعات ثابتة، قدرت قيمة الدين المتبقي في السنة الخامسة بـ 84436.05 دج و ذلك بمعدل فائدة بمعدل فائدة 5%.

- قم بإعداد السطر الأخير من جدول استهلاك القرض ؟

الحل

- قيمة الاستهلاك في السنة الأخيرة تقدر بـ :

$$C_6 = K_5$$
$$C_6 = 84436.05$$

- قيمة الفائدة في السنة الأخيرة تقدر بـ :

$$I_6 = 84436.05 \times 0.05$$

$$I_6 = 4221.80$$

جدول استهلاك القرض

القسط المتبقي	الدفعة	القسط	الفائدة	المدة
0	88657.85	84436.05	4221.80	6

العلاقة بين استهلاكيين متتاليين و غير متتاليين

$$\boxed{\boldsymbol{C_n = C_{n-1} \times (1+i) \Rightarrow \frac{C_n}{C_{n-1}} = 1+i}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_n = C_m \times (1+i)^{n-m} \Rightarrow \frac{C_n}{C_{n-1}} = (1+i)^{n-m}}}$$

مثال6-6

يسدد قرض عن طريق 7 دفعات قيمة الدفعة تقدر بـ :38020.36 دج، إذا علمت قيمة استهلاك السنة الأولى يساوي 27020.36 دج و معدل الفائدة 5%.

- قم بإعداد السطر الثاني و الأخير من جدول استهلاك القرض ؟

الحل

- الاستهلاك الثاني يساوي :

$$C_2 = 27020.36 \times 1.05$$

$$C_2 = 28371.37$$

- فائدة السنة الثانية :

$$I_2 = 38020.36 - 28371.37$$

$$I_2 = 9648.98$$

- الاستهلاك الأخير يساوي :

$$C_7 = C_1 \times (1+i)^{7-1}$$

$$C_7 = 27020.36 \times 1.05^6$$

$$C_7 = 36209.86$$

- فائدة السنة الأخيرة :

$$I_7 = 38020.36 - 36209.86$$

$$I_2 = 1810.49$$

العلاقة بين الدفعة و الاستهلاك الأول الأخير

$$\boxed{\boldsymbol{a = C_n \times (1+i)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a = C_1 \times (1+i)^n}}$$

مثال6–7

يسدد قرض عن طريق 4 دفعات متساوي قيمتها 42301.77 دج بمعدل فائدة 5%.

- قم بإعداد السطر الأول الأخير من جدول استهلاك القرض ؟

الحل

لدينا :

$$42301.77 = C_1 \times 1.05^4$$

$$C_1 = 34801.77$$

ومنه :

$$I_1 = 42301.77 - 34801.77$$

$$I_1 = 7500$$
$$K_0 = \frac{7500}{0.05}$$
$$K_0 = 150000$$
$$K_1 = 150000 - 34801.77$$
$$K_1 = 11598.23$$

لدينا :

$$42301.77 = C_4 \times 1.05$$

$$C_4 = 40287.4$$

ومنه :

$$I_4 = 42301.77 - 40287.4$$
$$I_4 = 2014.37$$

جدول استهلاك القرض

المدة	الفائدة	القسط	الدفعة	القسط المتبقي
1	7500	34801.77	42301.77	115198.23
4	2014.37	40287.4	42301.77	0

العلاقة بين القرض و الاستهلاك

$$\boxed{\boldsymbol{K_0 = C_1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}}$$

مثال7-6

يسدد قرض من خلال 10 دفعات بعدل فائدة 6%، حيث قدرت قيمة الاستهلاك الأول بـ :

18966.99 دج.

- أحسب قيمة القرض ؟
- إعداد السطر الأول من جدول استهلاك القرض؟

الحل

لدينا :

$$K_0 = 18966.99 \times \frac{1.06^{10} - 1}{0.06}$$

$$K_0 = 250000$$

ومنه :

$$I_1 = 250000 \times 0.06$$

$$I_1 = 15000$$

جدول استهلاك القرض

المدة	الفائدة	القسط	الدفعة	القسط المتبقي
1	15000	18966.99	33966.99	231033.01

العلاقة بين فائدتين متتاليتين

$$\boxed{I_{n-1} - I_n = C_{n-1} \times i}$$

مثال8– 6

من جدول استهلاك قرض يسدد عن طريق 10 دفعات تحصلنا على قيمة فائدة السنة الثالثة، الرابعة و الخامسة على التوالي 18224.18 دج، 16382.88 دج و 14431.11 دج.

- أحسب معدل الفائدة ؟
- **الحل**
- لدينا :

$$I_3 - I_4 = C_3 \times i$$

$$18224.18 - 16382.88 = C_3 \times i$$

$$1841.3 = C_3 \times i$$

$$I_4 - I_5 = C_4 \times i$$

$$16382.88 - 14431.11 = C_4 \times i$$

$$1951.77 = C_4 \times i$$

ومنه نحصل على :

$$\frac{C_4 \times i}{C_3 \times i} = \frac{1951.77}{1841.3}$$

$$\frac{C_4}{C_3} = 1 + i = 1.06$$

$$i = 6\%$$

تمارين محلولة للفصل السادس

تمرين 1–6

تحصل شخص على قرض بقيمة 900000 دج ليسدده خلال 6 سنوات بمعدل فائدة 5%، اتفق مع البنك على تسديد نصف القرض و خلال 3 سنوات عن طريق أقساط ثابتة و النصف الآخر خلال 3 سنوات المتبقية من خلال دفعات ثابتة .

- قم بإعداد جدول استهلاك القرض ؟

تمرين 2-6

تم الحصول على قرض بقيمة 120000 دج ليسدد خلال 15 سنة بمعدل فائدة 6%، إذا كانت 14 دفعة الأولى متساوية بقيمة 8000 دج و تختلف عن الأخيرة.

- أحسب قيمة الدفعة الأخيرة ؟
- مثل السطر الأول و الأخير لجدول استهلاك هذا القرض ؟
- أحسب قيمة الدين المتبقي بعد دفع الدفعة الحادية عشر ؟

تمرين 3-6

يسدد قرض قيمته 450000 دج من خلال دفعتين قيمة الأولى 200000 دج و الثانية 286125 دج

- أحسب معدل الفائدة المستعمل ؟
- قم بإعداد جدول استهلاك القرض ؟

تمرين 4-6

يستهلك قرض قيمته 600000 دج عن طريق 12 دفعة سنوية بمعدل فائدة 6 %

- أحسب قيمة الدين المتبقي بعد دفع الدفعة السابعة بثلاث طرق مختلفة ؟
- شكل السطر الثامن لجدول استهلاك هذا القرض ؟

تمرين 5-6

تحصل شخص على قرض يسدد من خلال عشرة دفعات ثابتة، قدر القسط المستهلك للسنة الرابعة بـ 23522.94 دج و قسط السنة السابعة بـ 20320 دج.

- أحسب معدل الفائدة المستعمل ؟
- أحسب قيمة القرض، الدفعة ؟
- أحسب المبلغ المتبقي للتسديد بعد الدفعة السابعة ؟

تمرين 6-6

قرض يستهلك من خلال 12 دفعة ثابتة بحيث الاستهلاك الأول زائد الثاني يقدر بـ 13515.22 دج و الثاني زائد الثالث يقدر بـ 14528.86 دج

- أحسب معدل الفائدة ؟
- أصل القرض ؟
- أحسب قيمة الدفعة ؟

تمرين 6-7

قرض قيمته 200000 دج يسدد عن طريق n دفعه بواسطة معدل i .إذا علمت أن الاستهلاك الأول 29403.49 دج و الاستهلاك الثالث 26669.83 دج

- أحسب معدل الفائدة ؟
- أحسب عدد الدفعات ؟
- أحسب قيمة الدفعة ؟

تمرين 6-8

من جدول استهلاك قرض يسدد عن طريق 10 دفعات تحصلنا على قيمة فائدة السنة الرابعة ، الخامسة و السادسة على التوالي 24170.38دج، 21377.41 دج و 18388.94 دج.

- أحسب معدل الفائدة ؟
- أحسب قسط الاستهلاك الأول ؟
- أحسب قيمة القرض؟
- قم بإعداد السطر الأول و الأخير من جدول استهلاك القرض ؟

تمرين 6-9

يسدد قرض عن طريق 10 دفعات حيث قدرت قيمة الدين المتبقي في نهاية السنة الأولى، الثانية و الثالثة بـ : 1840990.85 دج، 1674031.24 دج و 1498723.65 دج على التوالي.

- أحسب معدل الفائدة المطبق ؟
- أحسب قيمة القرض ؟
- قم بإعداد السطر الأول و الأخير من جدول استهلاك القرض ؟

تمرين 6-10

يسدد قرض عن طريق 8 دفعات بمعدل فائدة 6%، حيث قدر مجموع الاستهلاك الأول و الأخير بـ 303547.97 دج.

- أحسب قيمة الاستهلاك الأول و الأخير؟
- أحسب قيمة الدفعة ؟
- احسب أصل القرض؟

حلول تمارين الفصل السادس

حل التمرين 6-1

في 3 سنوات الأولى قيمة استهلاك القرض تقدر بـ :

$$C = \frac{900000}{6}$$

$$C = 150000$$

المبلغ المتبقي من الدين بعد 3 سنوات الأولى هو :

$$K_4 = \frac{900000}{2} = 450000$$

و بالتالي قيمة الدفعة الثابتة خلال 3 سنوات الأخيرة هي :

$$a = 450000 \times \frac{0.05}{1 - (1.05)^{-3}}$$

$$a = 165243.854$$

جدول استهلاك القرض

المدة	الفائدة	القسط	الدفعة	القسط المتبقي
1	45000	150000	195000	750000
2	37500	150000	187500	600000
3	35625	150000	185625	450000
4	22500	142743.854	165243.854	307256.146
5	15362.80	149881.04	165243.854	157375.01
6	7868.754	157375.01	165243.854	0

حل التمرين 2–6

الدفعة الأخيرة نحصل عليها باستحداث كل الدفعات

$$120000 = 8000 \times \frac{1-(1.06)^{-14}}{0.06} + a_{15} \times 1.06^{-15}$$

$$a_{15} = 109379.22$$

قيمة القسط الأخير تحسب من خلال :

$$C_{15} = \frac{109379.22}{1.06}$$

$$C_{15} = 103187.92$$

جدول استهلاك القرض

القسط المتبقي	الدفعة	القسط	الفائدة	المدة
119400	8000	600	7200	1
0	109379.22	103187.92	6191.29	15

قيمة الدين المتبقى بعد دفع الدفعة الحادية عشر هي :

$$K_{12} = 8000 \times \frac{1-(1.06)^{-3}}{0.06} + 109379.22 \times 1.06^{-4}$$

$$K_{12} = 108022.68$$

حل التمرين 3–6

نحصل على معدل الفائدة من خلال حل المعادلة التالية :

$$450000 \times (1+i)^2 = 200000 \times (1+i) + 286125$$

نضع $\boldsymbol{x}$ مكان $(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})$ ، تصبح لدينا معادلة من الدرجة الثانية

$$450000x^2 - 200000\,x - 286125 \;= 0$$

- حساب المميز

$$\Delta = 200000^2 - 4 \times 450000 \times (-286125)$$
$$\Delta = 5.55025.10^{11}$$
$$\sqrt{\Delta} = 745000$$

- لدينا حلين هما :

$$x_1 = \frac{200000 + 745000}{2 \times 450000}$$
$$x_1 = 1.05$$

$$x_2 = \frac{200000 - 745000}{2 \times 450000}$$
$$x_2 = -0.60$$ حل مرفوض

و بالتالي معدل الفائدة هو 5%

جدول استهلاك القرض

المدة	الفائدة	القسط	الدفعة	القسط المتبقي
1	22500	177500	200000	272500
2	13625	272500	286125	0

حل التمرين 4-6

قيمة الدين المتبقي بعد الدفعة السابعة هي :

- أولا حساب قيمة الدفعة الثابتة

$$a = 600000 \times \frac{0.06}{1-(1.06)^{-12}}$$

$$a = 71566.217$$

- ثانيا حساب قيمة القسط الأول

$$C_1 = 71566.217 - 600000 \times 0.06$$

$$C_1 = 35566.21$$

- الطريقة الأولى

$$K_8 = 600000 - \ 35566.21 \times \frac{1.06^7 - 1}{0.06}$$

$$K_8 = 301463$$

- الطريقة الثانية

$$K_8 = 600000 \times 1.06^7 - 71566.217 \times \frac{1.06^7 - 1}{0.06}$$

$$K_8 = 301463$$

- الطريقة الثالثة

$$K_8 = 71566.217 \times \frac{1 - 1.06^{-5}}{0.06}$$

$$K_8 = 301463$$

جدول استهلاك القرض

المدة	الفائدة	القسط	الدفعة	القسط المتبقي
8	18087.78	53478.437	71566.217	247984.563

حل التمرين 5–6

- حساب معدل الفائدة

$$\frac{C_4}{C_7} = \frac{23522.94}{20320} = (1+i)^3$$

$$i = 0.05 = 5\%$$

- حساب قيمة القرض

$$\frac{C_1}{C_4} = (1+i)^3$$

$$C_1 = 27230.74$$

$$\mathrm{K} = 27230.74 \times \frac{1.05^{10} - 1}{0.05}$$

$$\mathrm{K} = 342505.32$$

- حساب قيمة الدفعة

$$a = 342505.32 \times \frac{0.05}{1 - 1.05^{-10}}$$
$$a = 44356$$

- حساب القسط المتبقي بعد الدفعة السابعة

$$K_8 = 44356 \times \frac{1 - 1.05^{-10}}{0.05}$$
$$K_8 = 342505.27$$

حل التمرين 6–6

1- حساب معدل الفائدة

لدينا :

$$C_1 + C_2 = 13515.22$$
$$C_2 + C_3 = 14528.86$$

و منه :

$$C_1 + C_1 \times (1 + i) = 13515.22 \ldots\ldots\ldots.(1)$$
$$C_2 + C_2 \times (1 + i) = 14528.86 \ldots\ldots\ldots.(2)$$

بقسمة العلاقة (1) على (2) نحصل على :

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{13515.22}{14528.86} = 0.93023 \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{0.93023}$$

وعليه :

$$C_1 + \frac{C_1}{0.93023} = 13515.22$$
$$C_1 = 6513.34$$
$$C_2 = 7001.85$$

نعلم أن :

$$\frac{C_2}{C_1} = 1 + i = \frac{7001.85}{6513.34}$$

$$i = 7.5\%$$

2- حساب أصل القرض

لدينا :

$$K_0 = C_1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$K_0 = 6513.34 \times \frac{1.075^{12} - 1}{0.075}$$

$$K_0 = 120000$$

3- حساب قيمة الدفعة

لدينا:

$$K_0 = a \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = \frac{120000 \times 0.075}{1 - 1.075^{-12}}$$

$$a = 15513.33$$

حل التمرين 7-6

- حساب معدل الفائدة

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{29403.49}{26669.83} = (1+i)^2$$

$$i = 0.05 = 5\%$$

- حساب عدد الدفعات

لدينا:

$$K_0 = C_1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$200000 = 29403.49 \times \frac{1.05^n - 1}{0.05}$$

$$1.34 = 1.05^n$$

$$\ln 1.34 = n.\ln 1.05$$

$$n = 6$$

- حساب قيمة الدفعة

لدينا :

$$a = C_1 \times (1+i)^n$$

$$a = 29403.49 \times 1.05^6$$

$$a = 39403.48$$

حل التمرين 8–6

1– حساب معدل لفائدة

لدينا :

$$I_{n\text{-}1} - I_n = C_{n-1} \times i$$

$$\ldots\ldots\ldots.(1) I_4 - I_5 = C_4 \times i$$

$$I_5 - I_6 = C_5 \times i \ldots\ldots\ldots.(2)$$

بقسمة (1) على (2) نحصل على :

$$\frac{I_4 - I_5}{I_5 - I_6} = \frac{C_4}{C_5} = \frac{1}{1+i}$$

$$\frac{24170.38 - 21377.41}{21377.41 - 18388.94} = \frac{C_4}{C_5} = \frac{1}{1+i}$$

$$i = 7\%$$

2- حساب قسط الاستهلاك الأول

لدينا :

$$C_n = C_m \times (1+i)^{n-m}$$

$$C_4 = C_1 \times 1.07^3$$

$$C_1 = \frac{2792.97}{1.07^3}$$

$$C_1 = 2279.89$$

3- حساب قيمة القرض

لدينا :

$$K_0 = C_1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$K_0 = 2279.89 \times \frac{1.07^{10} - 1}{0.07}$$

$$K_0 = 31500$$

4- إعداد السطر الأول و الأخير

- حساب الدفعة

$$a = 31500 \times \frac{0.07}{1 - 1.07^{-10}}$$

$$a = 4484.89$$

- حساب الاستهلاك الأخير

$$C_{10} = 2279.89 \times 1.07^9$$

$$C_{10} = 4191.48$$

- حساب فائدة السنة الأولى

$$I_1 = 31500 \times 0.07$$

$$I_1 = 2205$$

- حساب فائدة السنة الأخيرة

$$I_{10} = a - C_{10}$$

$$I_{10} = 4484.89 - 4191.48$$

$$I_{10} = 293.41$$

جدول استهلاك القرض

القسط المتبقي	الدفعة	القسط	الفائدة	المدة
29220.11	4484.89	2279.89	2205	1
0	4484.89	4191.48	293.41	10

حل التمرين 9–6

1– إيجاد معدل الفائدة المطبق

لدينا :

$$K_1 = K_0 - C_1$$

$$K_2 = K_1 - C_2$$

$$K_3 = K_2 - C_3$$

نقوم بطرح K_2 من K_1

$$K_1 - K_2 = K_1 - K_1 + C_2$$

$$K_1 - K_2 = C_2$$

$$K_1 - K_2 = C_1 \times (1 + i) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

نقوم بطرح K_3 من K_2

$$K_2 - K_3 = K_2 - K_2 + C_3$$

$$K_2 - K_3 = C_3$$

$$K_2 - K_3 = C_2 \times (1 + i)$$

$$K_2 - K_3 = C_1 \times (1 + i)^2 \dots \dots \dots \dots \dots (2)$$

بقسمة العلاقة (2) على (1) نحصل على :

$$\frac{K_2 - K_3}{K_1 - K_2} = \frac{C_1 \times (1 + i)^2}{C_1 \times (1 + i)} = 1 + i$$

$$\frac{1674031.24 - 1498723.65}{1840990.85 - 1674031.24} = 1 + i$$

$$i = 5\%$$

2- حساب قيمة القرض

لدينا من العلاقة (1) :

$$K_1 - K_2 = C_1 \times (1 + i)$$

$$C_1 = \frac{K_1 - K_2}{1 + i}$$

$$C_1 = \frac{1840990.85 - 1674031.24}{1.05}$$

$$C_1 = 159009.15$$

و لدينا :

$$K_1 = K_0 - C_1$$

$$K_0 = 1840990.85 + 159009.15$$

$$K_0 = 2000000$$

3- إعداد السطر الأول و الأخير من جدول استهلاك القرض

4- حساب الدفعة

$$a = 2000000 \times \frac{0.05}{1 - 1.05^{-10}}$$

$$a = 259009.15$$

5- حساب الاستهلاك الأخير

$$C_{10} = 159009.15 \times 1.05^9$$

$$C_{10} = 246675.38$$

6- حساب فائدة السنة الأولى

$$I_1 = 2000000 \times 0.05$$

$$I_1 = 100000$$

- حساب فائدة السنة الأخيرة

$$I_{10} = a - C_{10}$$

$$I_{10} = 259009.15 - 246675.38$$

$$I_{10} = 12333.76$$

جدول استهلاك القرض

القسط المتبقي	الدفعة	القسط	الفائدة	المدة
1840990.85	259009.15	159009.15	100000	1
0	259009.15	246675.38	12333.76	10

حل التمرين 10-6

1- حساب قيمة قسط الاستهلاك الاول و الاخير

لدينا :

$$C_8 = C_1 \times (1 + i)^7$$
$$C_8 + C_1 = C_1 \times (1 + i)^7 + C_1$$
$$303547.97 = C_1 \times [1.06^7 + 1]$$

$$C_1 = 121243.13$$

و منه :

$$C_8 = 121243.13 \times 1.06^7$$

$$C_8 = 182304.83$$

2- حساب قيمة الدفعة

لدينا :

$$a = C_1 \times (1+i)^n$$

$$a = 121243.13 \times 1.06^8$$

$$a = 193243.13$$

3- حساب أصل القرض

4- لدينا :

$$K_0 = C_1 \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$K_0 = 121243.13 \times \frac{1.06^8 - 1}{0.06}$$

$$K_0 = 200000$$

الفصل السابع : اختيار الاستثمارات

من الواضح أن الشروع في عملية إنشاء أو اقتناء استثمار يستدعي إجراءات تقنية و ذلك لأجل اتخاذ قرار عملية الشراء و من بين الإجراءات التقنية التأكد من الجدوى الاقتصادية لهذا الاستثمار أي مدى تحقيق هذا الاستثمار لأرباح مستقبلية تستدعى المغامرة في إنشاءه أو الحصول عليه، و يأخذ الاستثمار الذى نتطرق إليه في هذا الفصل إما شكل المشروع كإنشاء سلسلة إنتاج أو الشكل الثاني ما يطلق علية الاستثمار الإنتاجي أو التقني كشراء معدات أو وسائل إنتاجية.

و يتمثل موضوع اختيار الاستثمارات إما لاتخاذ قرار الإنشاء أو الشراء من عدمه و هذا في حالة وجود فرصة واحدة و إما يتمثل في قرار الاختيار بين عدة فرص استثمارية في حالة وجود عدة مشاريع أو وسائل إنتاج، و كل هذا سوف نعالجه ضمن فرضية عدم وجود مخاطرة أي في حالة التأكد.

1.7 خصائص الاستثمار

يتميز الاستثمار بعدة خصائص أهمها :

- تكلفة الاستثمار: يقصد بها التكلفة الإجمالية لإنشاء أو شراء الاستثمار و لا بد من تحديدها بدقة من أجل تقييم الاستثمار على أحسن وجه، لكن في الواقع غالبا ما يتم تقييم تكلفة الاستثمار تقريبيا حسب جودة الدراسات و الخبرات لإنشاء هذا الاستثمار.
- مدة الاستثمار : هي مدة حياة المشروع الاقتصادية التي تتميز بقدرة الاستثمار على الإنتاج و تختلف عن مدة الاهتلاك بحيث يمكن للاستثمار أن يهتلك محاسبيا لكنه يكون قادر على الإنتاج.
- التدفقات النقدية : تتمثل في الإيرادات المستقبلية الناتجة عن الاستثمار.
- القيمة المتبقية :تتمثل في قيمة البيع أو التنازل عن الاستثمار عند انتهاء مدة صلاحيته أو قبل و التي تعتمد غالبا على مدة الاهتلاك .

2.7 معايير اختيار الاستثمار

هناك عدة معايير لاختيار الاستثمارات سوف نتطرق لأهمها:

1- القيمة الحالية الصافية

القيمة الحالية الصافية هي مجموع التدفقات النقدية المستقبلية للاستثمار مستحدثة مطروحا منها تكلفة الاستثمار، إذا كانت القيمة الحالية الصافية موجبة وجب قبول الاستثمار أي هناك عائد موجب و تحسب حسب العلاقة التالية:

$$VAN = -I_0 + FNT_1(1+i)^{-1} + FNT_2(1+i)^{-2} + \cdots .. + FNT_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + FNT_n(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{\boldsymbol{VAN = -I_0 + \sum_{n=1}^{n} FNT_n(1+i)^{-n}}}$$

حيث:

- I_0 : تكلفة الاستثمار
- i : معدل الاستحداث
- FNT : التدفقات النقدية الصافية (الايرادات – تكاليف)
- n : مدة الاستثمار
- في حالة تساوي التدفقات النقدية يمكن كتابة علاقة القيمة الحالية الصافية كما يلي :

$$\boxed{\boldsymbol{VAN = -I_0 + FNT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}}$$

- في حالة وجود قيمة متبقية للاستثمار تحسب القيمة الحالية الصافية بالشكل التالي :

$$\boxed{\boldsymbol{VAN = -I_0 + FNT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + VR \times (1+i)^{-n}}}$$

حيث :

- VR : القيمة المتبقية للاستثمار

مثال 1-7

أراد مستثمر الحصول على آلة إنتاجية تكلفتها 450000دج ، تقدر التدفقات النقدية التى تحققها خلال مدة حياتها بـ :100000دج خلال السنتين الأولى و 120000 دج خلال ثلاث سنوات المتبقية. و يمكن التنازل عليها بمبلغ 25000دج عند انتهاء مدة إنتاجها. إذا كان معدل الاستحداث 5 %.

- أحسب القيمة الحالية الصافية لهذا الاستثمار ؟

الحل

لدينا :

$$VAN = -450000 + 100000 \times \frac{1-1.05^{-2}}{0.05} + 120000 \times \frac{1-1.05^{-3}}{0.05} \times 1.05^{-2} - 25000 \times 1.05^{-5}$$

$$VAN = 12760.83$$

2- مدة الاسترجاع

يقصد بها المدة اللازمة لاسترجاع تكلفة الاستثمار، فكلما كانت هذه المدة قصيرة كلما كان محفزا لاختيار هذا الاستثمار، لكن هذا المعيار لا يؤخذ بعين الاعتبار عامل قيمة الزمن في اتخاذ القرار و هذا يعتبر من عيوب هذا المعيار.

$$\boxed{\boldsymbol{DR = \frac{I_0}{FNT}}}$$

لما تكون التدفقات النقدية السنوية غير متساوية يتم حساب فترة الاسترجاع من خلال حساب التدفقات النقدية المتراكمة حيث تحدد فترة الاسترجاع عند تساوي هذه الأخيرة مع تكلفة الاستثمار .

مثال 2-7

تكلفة استثمار تقدر بـ 320000دج ، يحقق تدفقات نقدية مستقبلية بـ 55000دج لمدة 7سنوات.

- أحسب مدة استرجاع تكلفة هذا الاستثمار ؟

الحل

لدينا :

$$DR = \frac{320000}{55000}$$

$$DR = 5.81$$

أي بالتقريب خمس سنوات و 10 أشهر

3- مؤشر الربحية

يقيس هذا المؤشر الربح النسبي المحقق من خلال الاستثمار أو بمعني آخر مردودية الاستثمار، و لكي يقبل المشروع لا بد أن يكون هذا المؤشر أكبر من الواحد و ذلك معناه أن القيمة الحالية الصافية تكون موجبة و يحسب بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\boldsymbol{IP = \frac{\sum_{n=1}^{n} FNT_n (1+i)^{-n}}{I_0}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{IP = \frac{VAN}{I_0} + 1}}$$

مثال 3-7

أمام مؤسسة مشروعين للانجاز A و B

A : تكلفة المشروع 150618.18 دج يحقق تدفقات نقدية سنويا بـ : 50000 دج مدة حياته 5 سنوات.

B : تكلفة المشروع 307275.56دج يحقق تدفقات نقدية في السنة الأولى و الثانية بـ : 60000 دج السنة الثالثة و الرابعة 80000دج و يمكن التنازل عليه في نهاية السنة الرابعة بـ : 160000دج, إذا كان معدل الاستحداث 6 %

- أحسب القيمة الحالية الصافية ،مدة الاسترجاع و مؤشر الربحية لكلا للمشروعين.
- أي المشروعان تقترح على المؤسسة

الحل

- حساب القيمة الحالية الصافية VAN

المشروع A

لدينا

$$VAN = -150618.18 + 50000 \times \frac{1-(1+0.06)^{-5}}{0.06}$$

$$VAN = 60000$$

المشروع B

$$VAN = -307275.56 + 60000 \times \frac{1-(1+0.06)^{-2}}{0.06} + 80000 \times \frac{1-(1+0.06)^{-2}}{0.06} \times (1+0.06)^{-2} + 160000 \times (1+0.06)^{-4}$$

$$VAN = 60000$$

من خلال معيار القيمة الحالية الصافية VAN لا يمكن المفاضلة بين المشروعين و ذلك لتساوي القيمة الحالية بينهما التي قدرت ب 60000 دج لكلا المشروعين و عليه لا بد من الاستعانة بمعايير أخرى ألا و هي مدة الاسترجاع أو مؤشر الربحية.

- حساب مدة الاسترجاع DR

المشروع A

لدينا

$$DR = \frac{150618.18}{50000}$$

$$DR = 3.012$$

أي 3 سنوات و 4 أيام (0.012*360= 4)

المشروع B

بما انه التدفقات النقدية غير متساوية سوف نقوم بحساب التدفقات النقدية المتراكمة و نحدد مدة الاسترجاع عند تساوي تكلفة الاستثمار مع التدفق النقدي المتراكم

الفترة	التدفق السنوي	التدفق المتراكم
1	60000	60000
2	60000	120000
3	80000	200000
4	80000	280000

نلاحظ أن التدفق النقدي المتراكم لم يبلغ تكلفة الاستثمار حتى نهاية المشروع و لذلك فان المؤسسة سوف تسترجع تكلفة الاستثمار إلى بعد التنازل عليه أي نهاية السنة الرابعة التي نعتبرها مدة الاسترجاع.

حسب معيار مدة الاسترجاع فان المؤسسة سوف تفضل المشروع A على المشروع B، إلا أن هذا المعيار لا يأخذ بعين الاعتبار قيمة الزمن لذلك سوف نأخذ القرار على أساس مؤشر الربحية.

- حساب مؤشر الربحية IP

لدينا

المشروع A

$$IP = \frac{60000}{150618.18} + 1$$

$$1.40\ IP =$$

المشروع B

$$IP = \frac{60000}{307275.56} + 1$$

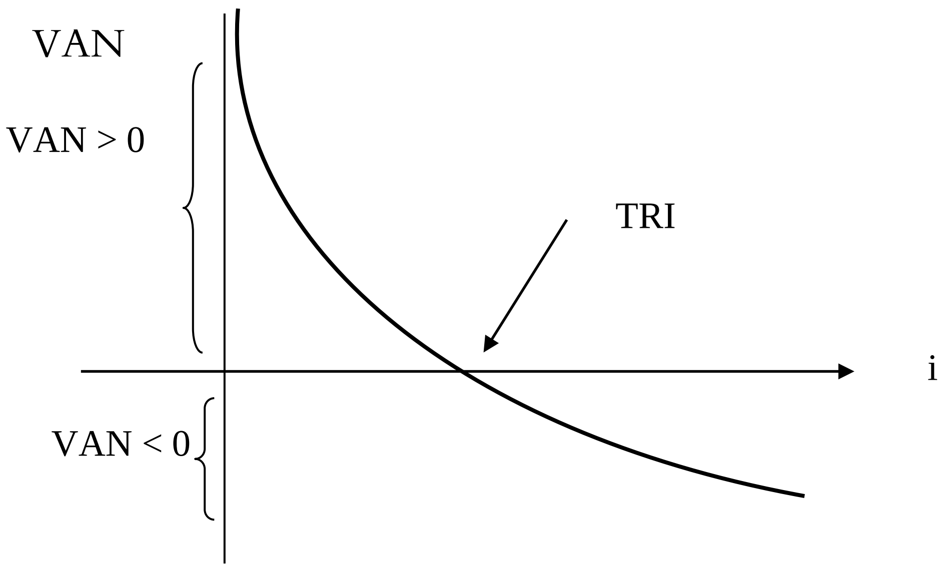
$$IP = 1.19$$

من خلال معدل الربحية يمكن اتخاذ القرار المفاضلة على أساسه حيث يقدر عائد المشروع الأول بنسبة 40% بينما عائد المشروع الثاني بنسبة 19 % و عليه فعلى المؤسسة اختيار المشروع الأول.

4– معدل العائد الداخلي

هو معدل الاستحداث الذي يحقق قيمة حالية صافية معدومة و من أجل اتخاذ القرار لا بد من مقارنة معدل العائد الداخلي مع معدل تكلفة الاستثمار أو معدل العائد المطلوب من طرف المستثمر فإذا كان معدل العائد أكبر من معدل العائد الداخلي نرفض الاستثمار و في حالة العكس نقبل الاستثمار، ويحسب بحل المعادلة التالية :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n} \frac{FNT_{\mathrm{n}}}{(1+TRI)^{\mathrm{n}}} = 0}$$



شكل 1–7 : معدل العائد الداخلي TRI[19]

[19] BERK.J , DeMARZO.P (2011),Finance d'entreprise, 2éme édition ,PEARSON.

ويمكن حساب معدل العائد الداخلي عن طريق الحصر أو التقريب الخطي أي لا بد من إيجاد معدلين للخصم واحد يحقق قيمة حالية صافية موجبة و الآخر سالبة و من الضروري أن يكون معدل العائد الداخلي محصور بين المعدلين و يحسب معدل العائد الداخلي بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\boldsymbol{TRI = i_1 + (i_2 - i_1) \times \frac{VAN_1}{VAN_1 - VAN_2}}}$$

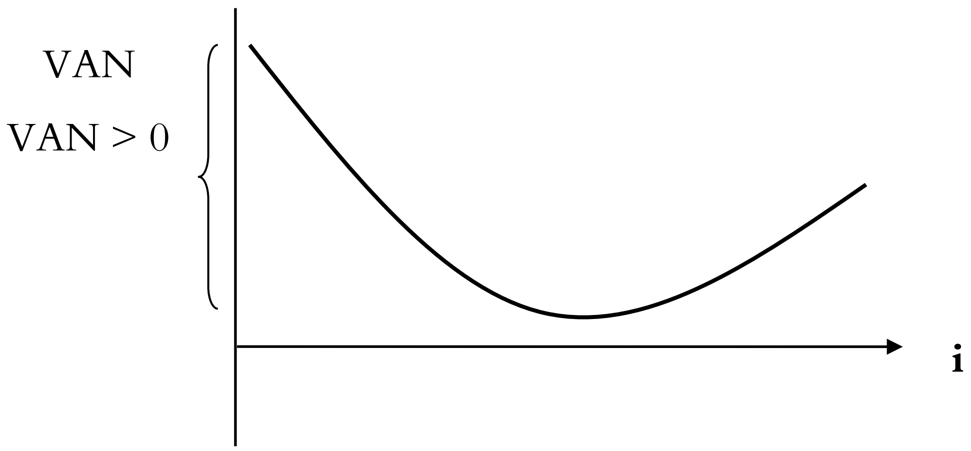
حيث :

- i_1 : معدل الاستحداث المنخفض الذي يحقق قيمة حالية صافية موجبة.
- i_2 : معدل الاستحداث المرتفع الذي يحقق قيمة حالية صافية سالبة.
- VAN_1 : القيمة الحالية الصافية الموجبة .
- VAN_2 : القيمة الحالية الصافية السالبة.

حالة خاصة

هناك حالتين يمكن أن نصادفهما عند الاعتماد على معدل العائد الداخلي في اختيار الاستثمار :

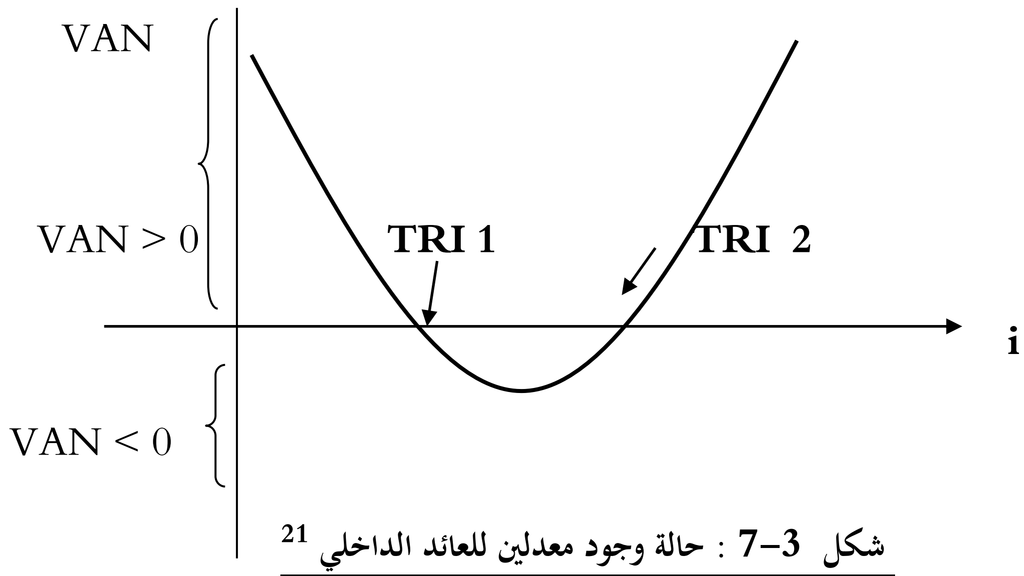
1– يوجد بعض الحالات التي لا تتضمن معدل عائد داخلي أي أن القيمة الصافية الحالية لا تنعدم عند أي معدل استحداث، في هده الحالة لا يمكننا الاعتماد على هذا المعيار.



شكل 2–7 : عدم وجود معدل عائد داخلي [20]

[20] BERK.J , DeMARZO.P (2011),op cit.

2- يمكن لمشروع استثماري أن يتضمن معدلين للعائد الداخلي أي القيمة الصافية الحالية تنعدم عند نقطتين و في هذه الحالية لا يمكن الاعتماد على هذا المعيار.



شكل 3-7 : حالة وجود معدلين للعائد الداخلي [21]

مثال 4-7

قدرت تكلفة مشروع استثماري بـ 450000دج، يحقق تدفقات نقدية ثابتة خلال 10 سنوات مدة حياته بـ 56000دج.و يتم التنازل عليه مجانا.

- أحسب القيمة الحالية الصافية عند معدل استحداث 4% و 6% ؟
- أحسب معدل العائد الداخلى لهذا المشروع ؟

الحل

- حساب القيمة الحالية الصافية

1- عند معدل 4%

$$VAN = -450000 + 56000 \times \frac{1-(1+0.04)^{-10}}{0.04}$$
$$VAN = 4210.16$$

2- عند معدل 7%

$$VAN = -450000 + 56000 \times \frac{1-(1+0.06)^{-10}}{0.06}$$

[21] BERK.J , DeMARZO.P (2011),op cit.

$$VAN = -37835.12$$

ومنه معدل العائد الداخلي هو :

$$TRI = 0.04 + (0.06 - 0.04) \times \frac{4210.16}{4210.16 - (-\,37835.12)}$$

$$TRI \approx 4.2\ \%$$

تمارين محلولة للفصل السابع

تمرين1-7

قدرت تكلفة استثمار ب 1000000 دج حيث يحقق تدفقات نقدية بقيمة 250000 سنويا ، قدرت مدة اهتلاك هذا الاستثمار ب 5 سنوات.

- أحسب القيمة الحالية الصافية عند معدل استحداث 6% و 9% ؟
- أحسب معدل العائد الداخلي للمشروع TRI ؟

تمرين2-7

تقدر تكلفة استثمار ب 980000 دج ،مدة إنتاجه 6 سنوات يحقق فيها إيرادات بقيمة 300000دج، 250000دج ، 200000دج ، 200000دج،200000دج و 150000دج خلال 6 سنوات على التوالي .

1- إذا كان معدل الاستحداث يساوي 10% ، ما جدوى هذا الاستثمار باستعمال معيار القيمة الحالية الصافية.

2- ما جدوى هذا الاستثمار إذا تم تسديد تكلفته عن طريق ثلاث دفعات بقيمة 490000دج في نهاية السنة الثانية، الرابعة و السادسة ؟

3- أحسب القيمة الحالية الصافية إذا كان معدل الاستحداث 10.5% (طريقة التسديد كالحالة 1)

4- أحسب معدل العائد الداخلي لهذا الاستثمار.

تمرين 3-7

قامت مؤسسة بشراء آلة إنتاجية بـ : 500000دج حيث تحقق تدفقات مستقبلية بقيمة 500000دج خلال خمس سنوات الأولى و 400000 دج خلال خمس سنوات الأخيرة، تقدر تكاليف الاستغلال بقيمة 250000دج سنويا، كما تعتمد المؤسسة طريقة الاهتلاك الخطي.

إذا علمت أن القيمة المتبقية للاستثمار بعد التنازل عند نهاية السنة العاشرة تقدر بـ : 60000دج، معدل الضريبة على أرباح الشركات 40% و معدل الاستحداث يقدر بـ: 10%

1- ما جدوى هذا الاستثمار باستعمال القيمة الحالية الصافية ؟

2- أحسب معدل الربحية للاستثمار.

تمرين4-7

ترغب مؤسسة في توسيع نشاطها من خلال اقتناء آلة إنتاجية جديدة، أراد المدير التقني للمؤسسة المفاضلة بين آلتين A و B حيث تقدر تكلفتهما بـ : 1000000دج ، 1500000 دج على التوالي، مدة استعمالهما خمس سنوات ، لهما نفس الكمية المنتجة و المقدرة بـ : 50000، 60000، 70000، 80000، و 90000 وحدة خلال خمس سنوات الاولى على التوالي ، كما قدر سعر بيع الوحدة الواحدة بـ : 20،23،26،29 و 32 دج للوحدة خلال خمس سنوات الاولى على التوالي ، بينما مصاريف الاستغلال تقدر بـ : 15،17،19،21 و 23 دج للوحدة بالنسبة للآلة A و 12،14،16،18و 20دج للوحدة بالنسبة للآلة B ، معدل الضريبة على أرباح الشركات 20%، و معدل الاستحداث6%

1- أحسب القيمة الحالية الصافية لكلتا الآلتين ؟

2- أحسب معدل الربحية لكلا الآلتين؟ وما هو الاختيار الأمثل ؟

تمرين5-7

يوظف تاجر مبلغ ثابت كل بداية شهر لمدة 30 شهر بمعدل فائدة سنوي 8% ليتحصل على جملة عند آخر دفعة تقدر ب 320000دج .

1- أحسب قيمة الدفعة ؟

أراد شراء استثمار بهذا المبلغ، بحيث يحقق تدفقات نقدية خلال 5 سنوات كالتالي :

	1	2	3	4	5
الايرادات	90000	110000	110000	110000	150000
التكاليف	10000	30000	30000	30000	60000

2- أحسب القيمة الحالية الصافية لهذا الاستثمار؟

3- أحسب مؤشر الربحية ؟

4- أحسب مدة الاسترجاع ؟

تمرين6-7

عرض على شخص الاستثمار في شراء آلة إنتاجية بقيمة 200000 دج و تقدر تكاليف صيانتها ب 4000دج سنويا، تهتلك لمدة 6 سنوات كما يمكن التنازل عليها بقيمة 30000 دج ، وتحقق إيرادات متوقعة سنويا ب 20% من تكلفة شراؤها.

1- إذا كان معدل الاستحداث يساوي 5 %، أحسب القيمة الحالية الصافية للاستثمار ؟

2- إذا أراد الشخص توظيف الإيرادات و القيمة المتبقية في البنك لغاية نهاية السنة الثامنة بمعدل فائدة 5%.أحسب قيمة الجملة المتحصل عليها ؟

حلول تمارين الفصل السابع

حل التمرين1–7

1- حساب القيمة الحالية الصافية عند معدل 6% و9%

لدينا :

3- عند معدل 6%

$$VAN = -1000000 + 250000 \times \frac{1-(1+0.06)^{-5}}{0.06}$$

$$VAN = 53090.94$$

4- عند معدل 9%

$$VAN = -1000000 + 250000 \times \frac{1-(1+0.09)^{-5}}{0.09}$$

$$VAN = -27587.18$$

2- حساب معدل العائد الداخلي

يمكن حسابه باستعمال طريقة الحصر بما انه تحققت لدينا قيمة حالية صافية موجبة و أخرى سالبة عند معدل 6% و 9% على الترتيب و ذلك بالعلاقة التالية :

$$TRI = i_1 + (i_2 - i_1) \times \frac{VAN_1}{VAN_1 - VAN_2}$$

$$TRI = 0.06 + (0.09 - 0.06) \times \frac{53090.94}{53090.95 — (-27587.18)}$$

$$TRI = 0.079 = 7.9\%$$

أي عند معدل استحداث 7.9% يحقق المشروع قيمة حالية صافية معدومة و منه يمكن اتخاذ قرار الاستثمار بالنسبة لهذا المشروع إذا كان معدل الفائدة أقل من 7.9 % لكي يحقق مردودية و بالتالي قيمة حالية صافية موجبة.

حل التمرين2-7

1- حساب القيمة الحالية الصافية

لدينا :

$$VAN = -I_0 + FNT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$VAN = -980000 + 300000 \times 1.1^{-1} + 250000 \times 1.1^{-2} + 200000 \times \frac{1-1.1^{-3}}{0.1} \times 1.1^{-2} + 150000 \times 1.1^{-5}$$

$$VAN = 3526.95 > 0 \Rightarrow \text{قبول الاستثمار}$$

2- حساب القيمة الحالية الصافية في حالة تسديد تكلفة الاستثمار من خلال ثلاث دفعات

$$VAN = 300000 \times 1.1^{-1} + (250000 - 490000) \times 1.1^{-2} + 200000 \times \frac{1-1.1^{-3}}{0.1} \times 1.1^{-2} - 490000 \times 1.1^{-4} + 150000 \times 1.1^{-5} - 490000 \times 1.1^{-6}$$

$$VAN = -32700.54 < 0 \Longrightarrow \text{عدم قبول الاستمار}$$

3- حساب القيمة الحالية الصافية اذا كان معدل الاستحداث 10.5%

$$VAN = -980000 + 300000 \times 1.105^{-1} + 250000 \times 1.105^{-2} + 200000 \times \frac{1-1.105^{-3}}{0.105} \times 1.105^{-2} + 150000 \times 1.105^{-5}$$

$$VAN = -280424.64 < 0 \Longrightarrow \text{عدم قبول الاستمار}$$

4- حساب معدل العائد الداخلي باستعمال طريقة الحصر

لدينا :

$$TRI = i_1 + (i_2 - i_1) \times \frac{VAN_1}{VAN_1 - VAN_2}$$

$$TRI = 0.1 + (0.105 - 0.1) \times \frac{3526.95}{3526.95 + 280424.64}$$

$$TRI \approx 10.0062\%$$

حل التمرين3–7

1- حساب القيمة الحالية الصافية

لا بد من حساب التدفقات النقدية الصافية خلال مدة حياة الاستثمار

الوحدة 10^3 دج

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الإيرادات	-700	500	500	500	500	500	400	400	400	400	460
تكاليف الاستغلال	-	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250
الاهتلاك	-	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
الضريبة		80	80	80	80	80	40	40	40	40	64
FNT		120	120	120	120	120	60	60	60	60	96

$$VAN = -500000 + 120000 \times \frac{1-1.1^{-5}}{0.1} + 60000 \times \frac{1-1.1^{-4}}{0.1} \times 1.1^{-5} + 96000 \times 1.1^{-10}$$

$VAN = 110000 > 0 \Rightarrow$ قبول الاستثمار

2- حساب معدل الربحية

لدينا :

$$\mathrm{IP} = \frac{\mathrm{VAN}}{\mathrm{I_0}} + 1$$

$$\mathrm{IP} = \frac{110000}{500000} + 1$$

$$\mathrm{IP} = 1.22$$

حل التمرين4–7

1- حساب القيمة الحالية الصافية

لا بد من حساب التدفقات النقدية الصافية للآلتين خلال مدة حياة الاستثمار

الوحدة 10^3 دج

	الآلة A					الآلة B				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
الإيرادات	1450	1560	1610	1600	2880	1450	1560	1610	1600	2880
تكاليف الاستغلال	1050	1140	1190	1200	2070	900	960	980	960	1800
الاهتلاك	200	200	200	200	200	300	300	300	300	300
FNT	200	220	220	200	610	250	300	330	340	780

$$VAN_{\mathrm{A}} = -1000000 + 200000 \times 1.06^{-1} + 220000 \times \frac{1 - 1.06^{-2}}{0.06} \times 1.06^{-1} + 200000 \times 1.06^{-4} + 610000 \times 1.06^{-5}$$

$VAN = 183440.92 > 0 \Rightarrow$ قبول الاستثمار

$$VAN_{\mathrm{B}} = -1500000 + 250000 \times 1.06^{-1} + 300000 \times 1.06^{-2} + 330000 \times 1.06^{-3} + 340000 \times 1.06^{-4} \times +780000 \times 1.06^{-5}$$

$VAN = 132095.57 > 0 \Rightarrow$ قبول الاستثمار

2- حساب معدل الربحية لكلا الآلتين

لدينا :

$$\mathrm{IP} = \frac{\mathrm{VAN}}{\mathrm{I}_0} + 1$$

$$\mathrm{IP}_A = \frac{183440.92}{1000000} + 1$$

$$\mathrm{IP}_A = 1.183$$

$$\mathrm{IP}_B = \frac{132095.57}{1500000} + 1$$

$$\mathrm{IP}_B = 1.088$$

و بالتالي يفضل الاستثمار في الآلة **A**

حل التمرين7–5

1- حساب قيمة الدفعة

- حساب المعدل الشهري المكافئ

$$i_m = \sqrt[12]{1.08} - 1 = 0.643\%$$

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = \frac{320000 \times 0.00643}{1.00643^{30} - 1}$$

$$a = 9705.07$$

2- حساب القيمة الحالية الصافية

لدينا :

$$FNT_1 = FNT_2 = FNT_3 = FNT_4 = 80000$$

$$FNT_5 = 90000$$

$$VAN = -I_0 + FNT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$VAN = -320000 + 80000 \times \frac{1 - 1.08^{-4}}{0.08} + 90000 \times 1.08^5$$

$$VAN = 6222.63$$

3- ساب مؤشر الربحية

لدينا :

$$\mathrm{IP} = \frac{\mathrm{VAN}}{\mathrm{I}_0} + 1$$

$$\mathrm{IP} = \frac{6222.63}{320000} + 1$$

$$\mathrm{IP} = 1.019$$

4- حساب مدة الاسترجاع

لدينا FNT تختلف و عليه نقوم بحساب التدفقات المتراكمة و نلاحظ أن مجموع أربع تدفقات الأولى يعطينا تكلفة الاستثمار و بالتالي DR تقدر ب 4 سنوات.

حل التمرين6-7

1- حساب القيمة الحالية الصافية للاستثمار

-التدفقات النقدية الصافية تقدر بـ :

$$FNT_1 = \cdots \ldots = FNT_6 = 200000 \times 0.2 - 4000 = 36000$$

لدينا :

$$VAN = -I_0 + FNT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + VR \times (1+i)^{-n}$$

$$VAN = -200000 + 36000 \times \frac{1-1.05^{-6}}{0.05} + 30000 \times 1.05^{-6}$$

$$VAN = 51111.37$$

2- حساب الجملة المتحصل عليها

لدينا :

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$V_n = 40000 \times \frac{1.05^6-1}{0.05} \times 1.05^2 + 30000 \times 1.05^2$$

$$V_n = 333039.35$$

قائمة المراجع

1- باللغة العربية

1- محمد نجيب حمادي الجوعاني (2005) ضوابط التجارة في الاقتصاد الإسلامي ، دار الكتب العلمية، بيروت

2- مناضل الجواري (2018)، مقدمة في الرياضيات المالية ، ARABIA GULF UNIVERSITY.

2- باللغة الأجنبية

3- Gérard Neubreg (2012) Mathématiques financières et actuarielles, DUNOD, Paris.

4- Disier Schlacther (2012), Comprendre les Mathématiques financières, Hachette, 4 éme édition, Paris.

5- Walder Masiéri (2008), Mathématiques financières, 2 éme édition, DUNOD, Paris. 8037/61

6- Alain Chauvel, Gilles Fournier, Claude Raimbault (2001) ,Manuel d'évaluation des procédés, TECHNIP, Paris.

7- Cyrielle Mandou (2009), Procédures de choix d'investissement principe et application, De Boeck, Paris .

8- Timothy J. Biehler (2008), *The* Mathematics *of* Money Math *for* Busines *and* Personal Finance Decisions, McGraw-Hill Companies

9- B. de FINETTI (1969), leçons de mathématiques financières, DUNOD.

10- Benjamine Legros (2011), Mini manuel de mathématiques financiéres, DONOD.

11- Pierre Vernimmen (2016),Finance d'entreprise, DALLOZ,Paris.

12- BERK.J , DeMARZO.P (2011),Finance d'entreprise, 2éme édition ,PEARSON.