الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الدكتور مولاي الطاهر – سعيدة

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

مطبوعة بعنوان:

محاضرات في مقياس الإحصاء 2

مسائل و تمارين محلولة

لطلبة السنة الأولى جدع مشترك علوم إقتصادية وتجارية وعلوم التسيير

من إعداد:

د.طيبي بومدين

السنة الجامعية: 2020/2019

فهرس المحتويات

المقدمة :

علم الإحصاء هو مجموعة من الأساليب و الطرق الرياضية المتعلقة بجمع، عرض و تحليل البيانات، إن هذه العمليات تسمح بإتخاذ القرارات في حالة عدم التأكد، و في الوقت الحالي و نظرا للتطور العلمي و التكنولوجي الذي يشهده العالم نجد أن التحليل الإحصائي يستخدم في جميع المجالات، كذلك إن الاحتمالات هو علم رياضي يحاول تكميم الأمور الكيفية التي ترتبط بالتجارب والاختبارات التي لا يمكن التنبؤ بنتيجتها بشكل حتمي قبل إجرائها، وكثيراً ما ترتبط الأمثلة بحجر النرد والقطع النقدية، فيأتي علم الاحتمالات ليضع مقداراً عددياً يساعد على التنبؤ بنتيجة اختبار ما قبل إجراء التجربة، أي يمكننا القول إنه علم التنبؤ بالنتيجة، أما الإحصاء فهو علم رياضي يعنى بالبيانات من حيث آلية تجميعها، تنظيمها، تحليلها، وإظهارها، فإذاً هو علم التعامل مع البيانات، وقد يحتاج الباحث القائم على هذه التجارب و البيانات لأداة تعينه على تحليل نتائجها من جهة، والتنبؤ بأدائها من جهة أخرى،فهو بحاجة للإحصاء والاحتمالات معاً، و بهذا يمكننا القول إنه علم التعبير الرياضي عن نتائج التجربة.

و نظرا للأهمية الكبيرة التي يكتسيها علم الإحصاء و الاحتمالات، فإن دراسته أيضا من الأهمية بمكان بالنسبة للطلبة الجامعيين، و لذلك إرتأينا تقديم هذه المطبوعة و التي هي عبارة عن محاضرات مدعمة بمجموعة من المسائل و التمارين المحلولة في مقياس الإحصاء 2 حسب البرنامج الوزاري المعتمد في هذا المقياس لطلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم إقتصادية و تسيير و علوم تجارية.

وتأتي هذه المطبوعة البيداغوجية كثمرة تجربة عدة سنوات في تدريس هذا المقياس، و حاولت من خلالها صياغة محتوى المقياس بطريقة مبسطة يسهل فهمها، و ملائمة لمستوى الطلبة و طبيعة التخصص، و لتحضير هذه المطبوعة إعتمدت على مجموعة من المراجع العلمية و الأعمال البيداغوجية من محاضرات في مجال الإحصاء و الإحتمالات، وتشتمل هذه المطبوعة على أربعة فصول رئيسية تتوافق مع البرنامج الوزاري المعتمد، ففي الفصل الأول تطرقنا إلى نظرية الاحتمالات و التحليل التوفيقي، وفي الفصل الثاني إلى المتغير العشوائي و التوزيعات الإحتمالية، و تعرضنا في الفصل الثالث إلى التوزيعات الإحتمالية الشهيرة، و الفصل الرابع و الأخير خصصناه لنظرية المعاينة كتمهيد لمقياس الإحصاء المطبق.

و في الأخير نأمل أن تساهم هذه المطبوعة في تعزيز قدرات الطالب على الفهم و الإستيعاب الجيد لمقررات مقياس الإحصاء2.

الفصل الأول

نظرية الإحتمالات و التحليل التوفيقي

تمهيد:

تعتبر نظرية الإحتمالات من أهم فروع الرياضيات المعاصرة، و تستعمل النماذج المجردة لنظرية الإحتمال في بناء قوانين في مجال الظواهر العرضية، و يفهم من الظواهر العرضية تلك الظواهر التي تحدث أكثر أو أقل إختلافا عند إعادتها عددا من المرات، فمثلا قياس طول جسم معين قد يختلف من عملية قياس إلى أخرى حتى و لو كانت هذه القياسات متقاربة جدا، و تحدث هذه الظواهر بفعل تأثير ما يسمى بالعوامل العشوائية. إن العلوم متميزة بخاصية الحتمية و الضرورية بحيث أن توفر مجموعة من العوامل A تؤدي حتما إلى حدوث النتيجة B (مثلا قانون تساقط الأجسام ل"غاليلي")، لكن في مجال الظواهر العرضية قد تتوفر نفس الشروط و لكن لا تتحقق نفس النتائج.

ترتكز نظرية الإحتمالات على مجموعة من المبادئ الأساسية:

1- التجربة العشوائية:

التجربة العشوائية هي كل تجربة لا يمكن معرفة نتائجها مسبقا، بالرغم من تكرار نفس التجربة وضمن نفس الشروط، نعطي بعض التجارب العشوائية للتوضيح مثلا:

- رمي زهرة نرد بالصدفة و مراقبة الرقم الظاهر على الوجه العلوي.
- رمي قطعة نقود معدنية بالصدفة في الهواء.
- سحب ورقة بالصدفة من لعبة تتضمن 52 ورقة.

2- فضاء العينة:

فضاء العينة هو مجموع النتائج المتوقعة في تجربة عشوائية، و نرمز له بالرمز Ω، في الأمثلة التوضيحية السابقة للتجربة العشوائية كان فضاء العينة كما يلي بالترتيب:

- $\Omega = \{1،2،3،4،5،6\}$
- $\Omega = \{Pile, Face\}$
- $\Omega = \{1،2،3.........52\}$

3- الحادث:

الحادث هو نقطة أو مجموعة نقاط من فضاء العينة، إذن هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فهو يتكون فقط من إحدى النتائج الممكنة للتجربة، و نرمز للحادث بالحروف اللاتينية $A, B, C...$.

مثال: في عملية رمي زهرة النرد، قد يهمنا الحصول على رقم زوجي، نعبر عن هذا الحادث A بالقائمة كما يلي: $A = \{2, 4, 6\}$

و قد يهمنا الحصول على رقم مضاعف ل 3 ، نعبر عن هذا الحادث الذي نسميه B مثلا بالقائمة كما يلي: $B = \{3, 6\}$

و يمكن تصنيف الحوادث كما يلي:

- **الحادث الأكيد:**

الحادث الأكيد هو الحادث الذي يقع بالضرورة عند إجراء تجربة عشوائية، فالحصول مثلا على كرة بيضاء من صندوق يحتوي على كرات بيضاء فقط (إذا سحبت كرة بالصدفة منه) هو حادث أكيد.

- **الحادث المستحيل:**

الحادث المستحيل هو الحادث الذي لا يقع إطلاقا عند إجراء تجربة عشوائية، فالحصول مثلا على كرة بيضاء من صندوق يحتوي على كرات سوداء فقط (إذا سحبت كرة بالصدفة منه) هو حادث مستحيل.

- **الحادث العشوائي:**

الحادث العشوائي هو الحادث الذي قد يقع و قد لا يقع عند إجراء تجربة عشوائية، فالحصول على كرة بيضاء من صندوق يحتوي على كرات بيضاء و أخرى سوداء (إذا سحبت كرة بالصدفة منه) هو حادث عشوائي.

و يمكن تصنيف الحوادث فيما بينها كما يلي:

- **الحادثان المتنافيان:**

الحادثان المتنافيان هما الحادثان اللذان لا يمكن وقوعهما معا (أي في نفس الوقت) أي بمعنى آخر لا توجد نقاط مشتركة بينهما.

- **الحادثان المستقلان:**

نقول عن حادثين أنهما مستقلان إذا لم يكن لوقوع أحدهما تأثير على وقوع الثاني.

4- حساب الإحتمال:

ليكن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية عدد حالاتها الكلية هو N (عدد عناصر Ω هو N)، ليكن A حادث من Ω عدد عناصره هو n (عدد الحالات الملائمة لوقوع A هو n)، يعرف وقوع A بالعلاقة التالية:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{n}{N}$$

5- خواص الإحتمال:

- ***الخاصية الأولى:***

الإحتمال هو عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا، و لا يكون أكبر من الواحد)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- ***الخاصية الثانية:***

مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.

6- إحتمال الحادث العكسي:

ليكن Ω فضاء عينة لتجربة عشوائية، عدد حالاته الكلية هو N.

A حادث من Ω عدد حالاته الملائمة هو n .

$\bar{A}$ حادث عكسي.

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{N-n}{N} = \frac{N}{N} - \frac{n}{N}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال:

نرمي قطعة نقدية 3 مرات متتالية بالصدفة في الهواء، المطلوب حساب إحتمال الحصول على Pile مرة واحدة على الأقل بطريقتين.

$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, FPF, FFP, PFF, FFF\}$

A: نحصل على P مرة على الأقل

الطريقة الأولى:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{7}{8}$$

الطريقة الثانية: إستعمال الحادث العكسي

$\bar{A}$: نحصل على P ثلاثة مرات

$P(\bar{A}) = 1/8$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$P(A) = 1 - 1/8$

$P(A) = 7/8$

7- الإحتمال الشرطي:

نعتبر فضاء عينة Ω و حادثين منه A و B بحيث إحتمال وقوع B موجب تماما $P(B) > 0$. نعرف الإحتمال الشرطي لوقوع A علما أن B قد وقع بالعلاقة التالية:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

8- قوانين الإحتمال:

- **قانون الجمع:**

نعتبر حادثين A و B بحيث العدد الحالات الملائمة ل A هو n1 و عدد الحالات الملائمة لوقوع B هو n2 ، عدد الحالات الملائمة ل $(A \cap B)$ هو n3، و عدد الحالات الكلية هو N

$$P(A \cup B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n1 + n2 - n3}{N}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n1}{N} + \frac{n2}{N} - \frac{n3}{N}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حالة خاصة:

إذا كان **A** و **B** حادثين متنافيين فإن: $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

قانون الضرب:

نعتبر حادثين A و B من فضاء عينة Ω بحيث إحتمال وقوع B موجب تماما $P(B) > 0$.

إذا كان A و B مستقلين :

$$P(A/B) = P(A)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

9- نظرية الإحتمالات الكلية و نظرية Bayes لحساب الإحتمالات:

- **نظرية الإحتمالات الكلية:**

نعتبر صندوقين $U1, U2$ بحيث يحتوي الصندوق $U1$ على $b1$ كرة بيضاء و $n1$ كرة سوداء، و يحتوي الصندوق $U2$ على $b2$ كرة بيضاء و $n2$ كرة سوداء.

نسحب كرة من أحد الصندوقين و ذلك عبر مرحلتين:

المرحلة الأولى: إختيار أحد الصندوقين بالصدفة.

المرحلة الثانية: سحب كرة بالصدفة من الصندوق المختار في المرحلة الأولى.

المطلوب: حساب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء مثلا.

ليكن الحادث A هو الحصول على كرة بيضاء:

$$P(A) = P(A/U1)\ .\ P(U1) + P(A/U2)\ .\ P(U2)$$

$$P(A) = \frac{b1}{b1 + n1} P(U1) + \frac{b2}{b2 + n2} P(U2)$$

مثال:

ينقسم مصنع إلى ثلاثة أقسام a,b,c بحيث يضمن القسم a 35 % من جملة المنتوج الكلي للمصنع و 10 % من منتوجه الفاسد، بينما يضمن القسم b 40 % من المنتوج الكلي و 9 % من منتوجه الفاسد، في حين يضمن القسم c الباقي من المنتوج الكلي و 12 % من منتوجه الفاسد.

إشترى شخص قطعة من منتوج المصنع، المطلوب أحسب إحتمال أن تكون هذه القطعة فاسدة.

القسم a (35%)		القسم b (40%)		القسم c (25%)	
10% فاسد		09% فاسد		12% فاسد	

ليكن

الحادث A هو الحصول على قطعة فاسدة:

$P(A/a) = 0.1$

$P(A/b) = 0.09$

$P(A/c) = 0.12$

$P(A) = P(A/a).P(a) + P(A/b).P(b) + P(A/c).P(c)$

$P(A) = (0.1).(0.35) + (0.09).(0.4) + (0.12).(0.25)$

- **نظرية Bayes لحساب الإحتمالات:**

نفس معطيات نظرية الإحتمالات الكلية، و السؤال المطروح هو حساب إحتمال السحب من الصندوق الأول U1 علما أن الكرة المسحوبة كانت بيضاء.

$$P(U1/A) = \frac{P(A/U1).P(U1)}{P(A/U1).P(U1) + P(A/U2).P(U2)}$$

مثال:

نفس معطيات المثال السابق، إذا كانت القطعة المشترات غير فاسدة فما هو إحتمال أن تكون قد أنتجت في القسم c .

لتكن B : القطعة غير الفاسدة

$$P(c/B) = \frac{P(B/c).P(c)}{P(B/a).P(a) + P(B/b).P(b) + P(B/c).P(c)}$$

$$P(c/B) = \frac{(0.28).(0.25)}{(0.9).(0.35) + (0.89).(0.4) + (0.88).(0.25)}$$

10- التحليل التوفيقي:

التحليل التوفيقي هو النظرية الرياضية للعد.

- **المبدأ الأساسي للعد:**

إذا كانت لدينا k مجموعة $(A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k)$، حيث عدد عناصر هذه المجموعات هو $(n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k)$ على الترتيب فإن عدد الطرق الممكنة لإختيار عنصر واحد من كل مجموعة هو:

$n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots\ldots \times n_k$.

أمثلة:

- لتكوين لجنة مراقبة نحتاج إلى مراقب و شرطي، إذا علمت أنه تقدم للمراقبة 18 شخص، و تقدم لمنصب شرطي 24 شخص، فما هو عدد اللجنات الممكن تكوينها ؟

عدد اللجنات = $18 \times 24 = 432$ لجنة.

- ما هو عدد الرموز السرية الممكن تشكيلها من 3 أحرف فرنسية على اليمين و رقمين على اليسار؟

عدد الرموز السرية = $(26)^3 \times (10)^2 = 1.757.600$ رمز.

- ما هو عدد الكلمات الممكن تكوينها من 4 أحرف فرنسية ؟

عدد الكلمات الممكن تكوينها = $(26)^4 = 456.976$ كلمة.

- **<u>التوفيقات</u> (Les Combinaisons):**

نسمي توفيقة ذات k عنصر من المجموعة A ذات n عنصر، كل مجموعة جزئية تحتوي على k عنصر من عناصر المجموعة A ، حيث $(k \leq n)$.

مثال:

لتكن المجموعة A المتكونة من العناصر $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$، إذن $n = 5$.

التوفيقات ذات عنصرين من A: $\{-1, 2\}$، $\{1, 0\}$................الخ

التوفيقات ذات 3 عناصر من A : $\{0, 1, 2\}$، $\{-1, 3, 2\}$................الخ

ملاحظة:

في التوفيقة الترتيب غير مهم و التكرار غير ممكن.

التوفيقة $\{3, 1, 0\} = \{1, 0, 3\}$.

عدد التوفيقات ذات k عنصر من مجموعة ذات n عنصر هو:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال:

1- ما هو عدد الفرق ذات 6 عناصر ما الممكن تشكيلها من قسم يحتوي على 9 عناصر؟

2- يتكون فوج من 15 طالب و 12 طالبة، نريد إختيار عدد من الطلبة للقيام ببحث ما و بالتالي يشكلون فريقا للبحث.

أ- ما هو عدد الفرق الممكن تكوينها من طالبين ؟

ب- ما هو عدد الفرق الممكن تكوينها من 5 طالبات ؟

ج- ما هو عدد الفرق الممكن تكوينها من 3 طلاب و 4 طالبات ؟

الحل:

1- عدد الفرق هو: C_9^6

$$C_9^6 = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9.8.7.6!}{6!.3.2!} = 12.7=84$$

2- عدد الفرق الممكن تكوينها من:

أ- طالبين هو: C_{15}^2

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15.14.13!}{2.13!} = 105$$

ب- 5 طالبات هو: C_{12}^5

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{5.4.3.2.7!} = 792$$

ج- 3 طلاب و 4 طالبات هو: $C_{15}^3 . C_{12}^4$

$$C_{15}^3 .\ C_{12}^4 = \frac{15!}{3!(15-3)!} . \frac{12!}{4!(12-4)!} = 225225$$

- **الترتيبات (Les Arrangements):**
- **الترتيبات بدون تكرار:**

نسمي ترتيبية بدون تكرار ذات k عنصر من المجموعة A ذات n عنصر كل ترتيبية ذات k عنصر من A بدون إرجاع.

مثال:

لتكن المجموعة A المتكونة من العناصر $A = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$، إذن $n = 5$.

- الترتيبات ذات عنصرين: $(-2, -1)$، $(1, 4)$، $(-2, 4)$..............الخ
- الترتيبات ذات ثلاثة عناصر: $(-2, -1, 1)$، $(1, 3, 4)$..............الخ

ملاحظة:

في الترتيبات بدون تكرار، الترتيب مهم و التكرار غير ممكن.

الترتيبة $(-2, -1, 1)$ تختلف عن الترتيبة $(1, -2, -1)$.

عدد الترتيبات ذات k عنصر من مجموعة ذات n عنصر هو:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال:

1- بكم كيفية يمكن سحب ورقتين الواحدة تلوى الأخرى بدون إرجاع من علبة تتضمن 52 ورقة ؟

$$A_{52}^2 = \frac{52!}{(52-2)!} = 2652$$

2- ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من 4 أرقام مختلفة ؟

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

- **الترتيبات بالتكرار:**

نسمي ترتيبية بالتكرار ذات k عنصر من مجموعة تحتوي على n عنصر، كل ترتيب يحتوي على k عنصر بحيث تكون هطه العناصر مسحوبة بالإرجاع قبل كل سحب (يمكن للعنصر أن يتكرر أكثر من مرة).

مثال:

لتكن المجموعة B المتكونة من العناصر $B = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$، إذن $n = 5$.

- الترتيبات بالتكرار ذات 3 عناصر من B هي: $(2, 1, -1)$، $(1, 3, 1)$، $(3, 3, 3)$........الخ
- الترتيبات بالتكرار ذات 8 عناصر من B هي: $(1, 3, 2, 4, 3, 2, 1, -1)$...............الخ

عدد الترتيبات بالتكرار ذات k عنصر من بين n عنصر هو:

$$\tilde{A}^k_n = n^k$$

مثال:

يحتوي كيس على 8 كرات خضراء و 9 كرات بيضاء، نسحب من هذا الكيس 4 كرات على التوالي بحيث نعيد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل كل سحب موالي.

1- ما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على 4 كرات خضراء ؟

$$\tilde{A}^4_8 = 8^4 = 4096$$

2- ما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على 4 كرات بيضاء ؟

$$\tilde{A}^4_9 = 9^4 = 4096$$

3- ما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على الكرتين الأولتين خضراء و الكرتين الأخيرتين بيضاء؟

$$\tilde{A}^2_8 \,.\, \tilde{A}^2_9 = 8^2 \,.\, 9^2 = 5184$$

- **التبديلات** (Les Permutations):
- **التبديلات بدون تكرار:**

التبديلات بدون تكرار هي حالة خاصة للترتيبات بدون تكرار مع $k=n$ و عددها:

$$P_n = n!$$

مثال:

- بكم كيفية يمكن لعشرة طلاب الحصول على 10 كراسي ؟

عدد الكيفيات هو: $P_{10} = 10! = 3.162.880$

- كم من كلمة يمكن تكوينها أحرف كلمة Gestion ؟

عدد الكلمات هو: $P_7 = 7! = 5040$

- **التبديلات بالتكرار:**

التبديلة بالتكرار هي ترتيبة على n عنصر مقسمة إلى k فئة عدد عناصرها $n_1, n_2, \ldots, n_k$ على الترتيب و عددها هو:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots\ldots n_k!}$$

مثال:

- بكم كيفية يمكننا ترتيب 5 كرات حمراء و 7 كرات بيضاء، و 3 كرات صفراء ؟

$$P_{15}^{5,7,3} = \frac{15!}{5!\,x7!\,x3!}$$

- كم من كلمة يمكن تكوينها من أحرف كلمة Mathématique ؟

m تكرر مرتين، a تكرر مرتين، t تكرر مرتين، و بقية الحروف مرة واحدة

$$P_{12}^{2,2,2} = \frac{12!}{2!\,x2!\,x2!}$$

تلخيص حول التحليل التوفيقي

	التوفيقات	الترتيبات بدون تكرار	الترتيبات بالتكرار
الترتيب	غير مهم	مهم	مهم
التكرار	غير ممكن	غير ممكن	ممكن
العدد	$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}^k{}_n = n^k$
طريقة السحب	في آن واحد	على التوالي و بدون إرجاع	على التوالي و بالإرجاع

تمارين وحلول حول الفصل الأول:

التمرين 01:

يتكون الفوج الواحد في الأعمال التطبيقية في مادة الإحصاء الرياضي من 40 طالبا، نختار بطريقة عشوائية أحد الطلبة و واحد فقط ليمثل زملائه في المجلس البيداغوجي، إدا كان لدينا 25 طالبة و 15 طالب، فما هو احتمال أن يكون ممثل الطلبة:

1- طالبة

2- طالبا

3- طالبا أو طالبة

4- طالبا وطالبة

الحل:

نرمز إلى الطالبة بالحرف F و إلى الطالب بالحرف G

1- إحتمال إختيار طالبة لتمثل الفوج هو:

$$P(x = F) = 25/40 = 5/8$$

2- إحتمال إختيار طالب ليمثل الفوج هو:

$$P(x = G) = 15/40 = 3/8$$

3- إحتمال أن يكون ممثل الفوج طالب أو طالبة (هذه الحالة جمع الحداث المتنافية)

$$P(x = G \text{ ou } F) = 15/40 + 25/40 = 1$$

و هذا هو الحادث الأكيد لأن ممثل الفوج إن لم يكن طالب فهو طالبة.

4- إحتمال أن يكون ممثل الفوج طالب و طالبة، هذا الإحتمال = 0 ، لأنه لدينا شخص واحد ليمثل الفوج و لا يمكن ان يكون هذا الشخص في نفس الوقت طالب و طالبة، و هذا هو الحادث المستحيل.

التمرين 02:

لتكن لدينا ثلاث صناديق تحتوي على مجموعة من الكريات كما هو موضح في الجدول التالـي:

	الكريات البيضاء	*الكريات السوداء*	*الكريات الحمراء*
الصندوق الأول	*03*	*04*	*02*
الصندوق الثانـي	*05*	*02*	*01*
الصندوق الثالث	*02*	*03*	*04*

1- نسحب كرة واحدة من الصندوق الأول ، ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

أ- بيضاء ، ب- حمراء ، ج- سوداء ، د- ليست سوداء ، هـ- أن تكون من أي لون.

2- نسحب كرة واحدة على الترتيب من الصندوق الأول ثم من الصندوق الثاني ثم من الصندوق الثالث، ما هو احتمال أن تكون الكريات الثلاثة وعلى نفس الترتيب:

أ- كلها حمراء ، ب- واحدة من الثلاثة فقط حمراء ، ج- كلها ليست حمراء ، د- كلها من نفس اللون.

3- نسحب كرتين من الصندوق الأول الواحدة تلوى الأخرى مع الإرجاع، ما هو احتمال أن تكون الكرتان:

أ- الأولى سوداء والثانية بيضاء ، ب- واحدة سوداء والأخرى بيضاء ، ج- من نفس اللون.

4- نكرر نفس التجربة العشوائية السابقة ولكن بدون إرجاع الكرة الأولى، أحسب الاحتمالات المطلوبة في السؤال 3.

الحل:

1- نسحب كرة واحدة من الصندوق الأول:

نضع: B: الكرة بيضاء، R: الكرة حمراء، N: الكرة سوداء، أي:

$$\Omega = \{B\ B\ B, N\ N\ N\ N, R\ R\ \}$$

- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

أ- بيضاء B: $P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{3}{9}$

ب- حمراء R: $P(R) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{2}{9}$

ج- سوداء N: $P(N) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{4}{9}$

د- ليست سوداء 'N: $P(\quad ') = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{5}{9}$ أو بالحادث العكسي:

$$P(N') = 1 - P(N) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

هـ- أن تكون من أي لون:

$$P(B \cup R \cup N) = P(B) + P(R) + P(N) = 1$$

2- نسحب كرة واحدة على الترتيب من الصندوق الأول ثم من الصندوق الثاني ثم من الصندوق الثالث:

- احتمال أن تكون الكريات الثلاثة وعلى نفس الترتيب:

أ- كلها حمراء S:

$$P(S) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1).P(R_2).P(R_3) = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{648}$$

ب- واحدة من الثلاثة فقط حمراء K:

$$P(K) = P[(R_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3) \cup (\bar{R}_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3) \cup (\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3)]$$
$$P(K) = P(R_1).P(\bar{R}_2).P(\bar{R}_3) + P(\bar{R}_1).P(R_2).P(\bar{R}_3) + P(\bar{R}_1).P(\bar{R}_2).P(R_3)$$

$$P(K) = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{5}{9}\right) + \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{5}{9}\right) + \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{301}{648}$$

ج- كلها ليست حمراء T:

$$P(T) = P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3) = \mathrm{P}(\bar{R}_1).\mathrm{P}(\bar{R}_2).P(\bar{R}_3) = \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{245}{648}$$

د- كلها من نفس اللون F:

$$P(F) = P[(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap N_3)]$$
$$P(F) = \mathrm{P}(R_1).\mathrm{P}(R_2).P(R_3) + \mathrm{P}(B_1).\mathrm{P}(B_2).P(B_3) + \mathrm{P}(N_1).\mathrm{P}(N_2).P(N_3)$$

$$P(F) = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{2}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{3}{9}\right) = \frac{62}{648}$$

3- نسحب كرتين من الصندوق الأول الواحدة تلوى الأخرى مع الإرجاع:

- احتمال أن تكون الكرتان:

أ- الأولى سوداء والثانية بيضاء C:

$$P(C) = P(N \cap B) = P(N).P(B) = \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right) = \frac{12}{81}$$

ب- واحدة سوداء والأخرى بيضاء L:

$$P(L) = P[(N \cap B) \cup (B \cap N)] = P(N).P(B) + P(B).P(N)$$
$$= \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{24}{81}$$

ج- من نفس اللون D:

$$P(D) = P[(R \cap R) \cup (B \cap B) \cup (N \cap N)]$$

$$= P(R).P(R) + P(B).P(B) + P(N).P(N)$$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right) + \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{29}{81}$$

4- نكرر نفس التجربة العشوائية السابقة ولكن بدون إرجاع الكرة الأولى، (النتيجة الثانية غير مستقلة عن النتيجة الأولى)

- احتمال أن تكون الكرتان:

أ- الأولى سوداء والثانية بيضاء C:

$$P(C) = P(N \cap B) = P(N).P(B/N) = \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{12}{72}$$

ب- واحدة سوداء والأخرى بيضاء L:

$$P(L) = P[(N \cap B) \cup (B \cap N)] = P(N).P\left(\frac{B}{N}\right) + P(B).P\left(\frac{N}{B}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right) = \frac{24}{72}$$

ج- من نفس اللون D:

$$P(D) = P[(R \cap R) \cup (B \cap B) \cup (N \cap N)]$$

$$= P(R).P(R/R) + P(B).P(B/B) + P(N).P(N/N)$$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{20}{72}$$

التمرين 03:

في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية توجد ثلاث آلات $_1$ ، M_2 ، M_3، تنتج في اليوم الواحد على التوالي 3000 مصباح، 5000 مصباح، 2000 مصباح، من جهة أخرى فإن الآلة M_1 لديها 5% إنتاج معيب، الآلة M_2 لديها 2% إنتاج معيب، الآلة M_3 لديها 5% إنتاج معيب، سحبنا مصباحا من الإنتاج الكلي اليومي للمصنع:

1-حساب احتمال أن يكون هذا المصباح من إنتاج الآلة M_1؟ الآلة M_2؟ الآلة M_3؟

2-حساب احتمال أن يكون هذا المصباح من إنتاج الآلة $_1$ أو الآلة M_2 وهو معيب؟ اشرح النتيجة؟

3- أوجد احتمال أن يكون هذا المصباح معيبا؟ أن يكون هذا المصباح صالحا؟ اشرح النتيجة؟

4- بعد السحب وإجراء عملية المراقبة على المصباح تأكدنا أنه فعلا معيب، ما هو احتمال أن يكون من انتاج الآلة M_1؟ M_2؟ M_3؟

الحل:

1- إيجاد احتمال أن يكون هذا المصباح:

- من إنتاج الآلة M_1:

$$P(M_1) = \frac{3000}{10000} = 0,3$$

- من إنتاج الآلة M_2:

$$P(M_2) = \frac{5000}{10000} = 0,5$$

- من إنتاج الآلة M_3:

$$P(M_3) = \frac{2000}{10000} = 0,2$$

2- إيجاد احتمال أن يكون هذا المصباح من إنتاج الآلة $_1$ أو الآلة M_2 وهو معيب:

$$P(L) = P[(M_1 \cap \bar{A}) \cup (M_2 \cap \bar{A})]$$

$$= P(M_1).P(\bar{A}/M_1) + P(M_1).P(\bar{A}/M_1)$$

$$= (0,3)(0.05) + (0,5)(0,02) = 0,025 = \frac{25}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 مصباح منتج بالمصنع هناك 25 مصباحا من إنتاج الآلة $_1$ أو الآلة M_2 وهو معيب

3- إيجاد احتمال:

- أن يكون هذا المصباح معيبا:

$$P(\bar{A}) = P[(M_1 \cap \bar{A}) \cup (M_2 \cap \bar{A}) \cup (M_3 \cap \bar{A})]$$

$$P(\bar{A}) = P(M_1)P\left(\frac{\bar{A}}{M_1}\right) + P(M_2)P\left(\frac{\bar{A}}{M_2}\right) + P(M_2)P\left(\frac{\bar{A}}{M_2}\right)$$

$$= 0,035 = \frac{35}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 مصباح منتج بالمصنع هناك 35 مصباحا معيبا.

- أن يكون هذا المصباح صالحا:

$$P(A) = P[(M_1 \cap \bar{A}) \cup (M_2 \cap \bar{A}) \cup (M_3 \cap \bar{A})]$$

$$P(A) = P(M_1)P\left(\frac{A}{M_1}\right) + P(M_2)P\left(\frac{A}{M_2}\right) + P(M_2)P\left(\frac{A}{M_2}\right)$$

$$= 0,965 = \frac{965}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 مصباح منتج بالمصنع هناك 965 مصباحا صالحا.

5- بعد السحب وإجراء عملية المراقبة على المصباح تأكدنا أنه فعلا معيب، إيجاد احتمال أن يكون:

- من انتاج الآلة M_1:

$$P\left(\frac{M_1}{\bar{A}}\right) = \frac{P(M_1 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$=\frac{P(M_1)P\left(\frac{\bar{A}}{M_1}\right)}{P(M_1)P\left(\frac{\bar{A}}{M_1}\right)+P(M_2)P\left(\frac{\bar{A}}{M_2}\right)+P(M_2)P\left(\frac{\bar{A}}{M_2}\right)}$$

$$=0,428=\frac{428}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 مصباح معيب منتج بالمصنع هناك 428 مصباحا من إنتاج الآلة M_1.

- من انتاج الآلة M_2:

$$P\left(\frac{M_2}{\bar{A}}\right)=\frac{P(M_2\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$=\frac{P(M_2)P\left(\frac{\bar{A}}{M_2}\right)}{P(M_1)P\left(\frac{\bar{A}}{M_1}\right)+P(M_2)P\left(\frac{\bar{A}}{M_2}\right)+P(M_2)P\left(\frac{\bar{A}}{M_2}\right)}$$

$$=0,286=\frac{286}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 مصباح معيب منتج بالمصنع هناك 286 مصباحا من إنتاج الآلة M_2.

- من انتاج الآلة M_3:

$$P\left(\frac{M_3}{\bar{A}}\right)=\frac{P(M_3\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$=\frac{P(M_3)P\left(\frac{\bar{A}}{M_3}\right)}{P(M_1)P\left(\frac{\bar{A}}{M_1}\right)+P(M_2)P\left(\frac{\bar{A}}{M_2}\right)+P(M_2)P\left(\frac{\bar{A}}{M_2}\right)}$$

$$=0,286=\frac{286}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 مصباح معيب منتج بالمصنع هناك 286 مصباحا من إنتاج الآلة M_3.

التمرين 04:

صندوق يحتوي على 25 كرية مرقمة من 1 إلى 25، نسحب عشوائيا ثلاث كريات دفعة واحدة.

1- ما هي طبيعة العناصر في هذه التجربة العشوائية؟ أذكر بعض النماذج منها؟

2- ما هو عدد عناصر فضاء العينة (عدد الحالات الكلية)؟

3- ما هو احتمال أن تكون أرقام الكريات الثلاثة أعدادا زوجية؟

4- ما هو احتمال أن تكون أرقام الكريات الثلاثة من مضاعفات العدد 5؟

5- ما هو احتمال أن يكون مجموع رقمين من الأرقام الثلاثة يساوي 10؟

الحل:

1- طبيعة العناصر في هذه التجربة العشوائية: ثلاثيات غير مرتبة لأننا نسحب الكريات الثلاثة دفعة واحدة أي ليس هناك ترتيب بينها.

- بعض النماذج منها:

$$\Omega = \{(1,2,3), (25,19,18), (19,12,3), \dots \dots \dots \dots\}$$

2- عدد عناصر فضاء العينة (عدد الحالات الكلية): أي حساب Ω

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار جزء من الكل (3 من بين 25)، السحب يتم دفعة واحدة أي أن الترتيب غير مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخرج عدد عناصر فضاء العينة Ω بواسطة التوفيقة دون تكرار C_n^x

$$C_n^x = C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\,(25-3)!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22!}{(3 \times 2 \times 1) \times 22!} = 2300$$

إذن عدد الحالات الكلية هو 2300 حالة ممكنة.

3- احتمال أن تكون أعداد الكريات الثلاثة زوجية:

الأعداد الزوجية من (1 إلى 25) هي: 2، 4، 6، .....،24 (عددها 12)

نسمي A حدثا عشوائيا يمثل أعداد الكريات الثلاثة زوجية، وبالتالي:

$$P(A)=\frac{C_{12}^{3}}{C_{25}^{3}}=\frac{220}{2300}$$

4- احتمال أن تكون أعداد الكريات الثلاثة من مضاعفات العدد 5:

مضاعفات العدد 5 من (1 إلى 25) هي: 5، 10، 15،20، 25 (عددها 5)

نسمي B حدثا عشوائيا يمثل أعداد الكريات الثلاثة من مضاعفات العدد 5، وبالتالي:

$$P(B)==\frac{C_{5}^{3}}{C_{25}^{3}}=\frac{10}{2300}$$

5- احتمال أن يكون مجموع عددين من الأعداد الثلاثة يساوي 10:

نسمي D حدثا عشوائيا يمثل مجموع عددين من الأعداد الثلاثة يساوي 10، وبالتالي:

$$D=\{(1,9,X),(2,8,X),(3,7,X),(4,6,X)\}$$

حيث X تمثل عددا من بين 23 عددا المتبقية في كل حالة، مثلا في الثلاثيات التي تحتوي على العددين 1 و9 يمكن أن نختار العدد الثالث من 23 عددا المتبقية غير العددين 1 و9 لأن السحب تم دفعة واحدة أي دون تكرار وترتيب، وبالتالي ينتج 23 ثلاثية في الحالة الأولى فقط أي: C_{23}^{1} ، أما العدد الاجمالي للثلاثيات الممكنة فهو:

$$D=4\,C_{23}^{1}=4\times 23=92$$

$$P(D)=\frac{4\,C_{23}^{1}}{C_{25}^{3}}=\frac{92}{2300}$$

التمرين 05 :

1- أوجد قيمة n في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $A_n^2 = 72$

ب) $A_n^4 = 42A_n^2$

ج) $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$

2- اتفق 9 أصدقاء على الذهاب إلى الملعب لمشاهدة مقابلة في كرة القدم، بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف واحد به 9 مقاعد؟

- نفرض أنه لم يحضر الموعد إلا 7 منهم، فبكم طريقة يمكنهم الجلوس في نفس الصف؟

- قررت هذه المجموعة (7 أصدقاء) بعد المباراة تناول العشاء معا، فبكم طريقة يمكنهم الجلوس على مائدة مستديرة (بها 7 كراسي)؟

3- ما هو عدد الكلمات الممكنة المختلفة التي يمكن تكوينها من أحرف الإسم " MASSINISSA "؟

4- من بين الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5، كم توجد من طريقة لتكوين كلمة السر المكونة من ثلاث أرقام، في حالة عدم إعادة الرقم المسحوب؟ في حالة إعادة الرقم المسحوب؟

الحل:

1- *إيجاد قيمة n في كل حالة من الحالات التالية:*

أ) $A_n^2 = 72$:   (يجب أن يكون $n \geq 2$)

$$A_n^2 = 72$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 72$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 72$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 72$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

بحل المعادلة من الدرجة الثانية (1)، نجد:

$n=-8$ وهي مرفوضة (لأن $n \geq 2$)، أو

$n=9$ وهي مقبولة.

ب) $A_n^4 = 42A_n^2$: (يجب أن يكون $n \geq 4$)

$$A_n^4 = 42A_n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = 42\left(\frac{n!}{(n-2)!}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 42\left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}\right)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)(n-3) = 42n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 36 = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

بحل المعادلة من الدرجة الثانية (2)، نجد:

$n=-4$ وهي مرفوضة (لأن $n \geq 4$)، أو

$n=9$ وهي مقبولة.

ج) $2_n^2 + 50 = A_{2n}^2$: (يجب أن يكون $n \geq 2$)

$$2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{n!}{(n-2)!}\right) + 50 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}\right) + 50 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{(2n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow 2n(n-1) + 50 = 2n(2n-1)$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 50 = 0 \ldots\ldots\ldots(3)$$

بحل المعادلة من الدرجة الثانية (3)، نجد:

$n=-5$ وهي مرفوضة (لأن $n \geq 4$)، أو

$n=5$ وهي مقبولة.

2- اتفق 9 أصدقاء على الذهاب إلى الملعب لمشاهدة مقابلة في كرة القدم، عدد الطرق التي يمكنهم الجلوس بها في صف واحد به 9 مقاعد: يمثل تبديلة مع عدم الإعادة لأننا نهتم باختيار الكل من الكل (9 من بين 9)، السحب على التوالي دون إعادة أي أن الترتيب مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخرج عدد عدد الطرق بواسطة التبديلة دون تكرار $P_n = n!$

$$P_n = n! = 9! = 9 \times 8 \times 7 \times \ldots \times 1 = 362880$$

– نفرض أنه لم يحضر الموعد إلا 7 منهم، عدد الطرق التي يمكنهم الجلوس بها في نفس الصف:

أي بقاء مقعدين شاغرين يمكن اعتبارهما مفردتين غير متميزتين، وبالتالي فإن هذه الحالة تمثل تبديلة مع التكرار داخل المجموعة (وجود عنصرين لا يمكن تمييزهما عن بعضهما):

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots\ldots n_k} = P_9^{2,1,\ldots\ldots 1} = \frac{9!}{2!\,1!\ldots\ldots 1!} = 181440$$

أما الحالة التي تمثل ترتيبة مع عدم الإعادة فتكون عند طرح السؤال: نفرض أن هؤلاء الأصدقاء لم يجدوا إلا سبعة كراسي، فبكم طريقة يمكنهم الجلوس في هذه الحالة؟ فهنا نهتم باختيار الجزء من الكل (7 من بين 9)، السحب على التوالي دون إعادة أي أن الترتيب مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخرج عدد عدد الطرق بواسطة الترتيبة دون تكرار A_n^x

$$A_n^x = A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 181440$$

– قررت هذه المجموعة (7 أصدقاء) بعد المباراة تناول العشاء معا، عدد الطرق التي يمكنهم الجلوس بهاعلى مائدة مستديرة (بها 7 كراسي): يمثل تبديلة دائرية:

$$P_n = \frac{n!}{n} = (n-1)! = (7-1)! = 6! = 6 \times 5 \times \ldots \times 1 = 720$$

3- عدد الكلمات الممكنة المختلفة التي يمكن تكوينها من أحرف الإسم " MASSINISSA ":

تمثل تبديلة مع التكرار داخل المجموعة (وجود عناصر لا يمكن تمييزها عن بعضها)، يحسب وفق العلاقة:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots\ldots n_k!}$$

حيث: عدد الأحرف المكونة لهذه الكلمة هو 10 أي: $n = 10$

عدد أحرف S هو 4 أي: $n_1 = 4$

عدد أحرف A هو 2 أي: $n_2 = 2$

عدد أحرف I هو 2 أي: $n_3 = 2$

عدد أحرف M هو 1 أي: $n_4 = 1$

عدد أحرف N هو 1 أي: $n_5 = 1$

وبالتالي: $P_{10}^{4,2,2,1,1} = \frac{10!}{4!2!2!1!1!} = 37800$ كلمة

4- من بين الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5، عدد الطرق الممكنة لتكوين كلمة السر المكونة من ثلاث أرقام:

أ- في حالة عدم إعادة الرقم المسحوب:

ترتيبية دون إعادة: $A_n^x = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\times4\times3\times2!}{2!} = 60$ كلمة سر

ب- في حالة إعادة الرقم المسحوب:

ترتيبية بإعادة (قائمة): $n^x = 5^3 = 125$ كلمة سر

التمرين 06:

يتكون مجلس إدارة من 12 عضوا، من بينهم 09 رجال و 03 نساء، نريد تكوين لجنة من 03 أشخاص.

1- ما احتمال أن تحتوي اللجنة على امرأة واحدة فقط؟

2- إذا افترضنا أن الأشخاص الثلاثة المنتخبون يتم تعيينهم حسب ترتيب القرعة: رئيسا، نائبا، أمينا للمال

3- ما احتمال أن تحتوي اللجنة على رجلين على الأقل؟

الحل:

1- احتمال أن تحتوي اللجنة على امرأة واحدة فقط:

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار جزء من الكل (3 من بين 12)، السحب يتم دفعة واحدة أي أن الترتيب غير مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخرج عدد عناصر فضاء العينة Ω بواسطة التوفيقة دون تكرار C_n^x

$$C_n^x = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{(3\times2\times1)\times9!} = 220 \text{ لجنة ممكنة}$$

نسمي A حدثا عشوائيا يمثل احتواء اللجنة على امرأة واحدة فقط، وبالتالي:

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_9^2}{C_{12}^3} = \frac{108}{220}$$

2- إذا افترضنا أن الأشخاص الثلاثة المنتخبون يتم تعيينهم حسب ترتيب القرعة: رئيسا، نائبا، أمينا للمال

3- احتمال أن تحتوي اللجنة على رجلين على الأقل:

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار جزء من الكل (3 من بين 12)، السحب يتم على التوالي أي أن الترتيب مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخرج عدد الحالات الكلية بواسطة الترتيبة دون تكرار A_n^x

$$A_n^x = A_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{9!} = 1320 \text{ لجنة ممكنة}$$

نسمي B حدثا عشوائيا يمثل احتواء اللجنة على رجلين على الأقل، وبالتالي:

$$P(B) = \frac{A_9^2 \times A_3^1 + A_9^3 \times A_3^0}{A_{12}^3} = \frac{720}{1320}$$

مسائل تقييمية حول الفصل الأول مع حلول مختصرة

المسألة الأولى:

تملك مؤسسة إنتاجية ورشتين تقومان بإنتاج منتوج واحد ذي نوعيتين مختلفتين، الإنتاج اليومي للورشتين من النوعين ملخص بالجدول التالي:

مجموع الإنتاج	الورشة		نوع المنتوج
	2	1	
760	480	280	P_1
240	120	120	P_2
1000	600	400	مجموع الإنتاج

أولا- سحبنا وحدة منتوج من الإنتاج اليومي للمؤسسة بصورة عشوائية:

1- أحسب احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من النوع الأول؟ من النوع الثاني؟

2- أحسب احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من الورشة الأولى؟ من الورشة الثانية؟

3- إذا علمت أن المنتوج من النوع الأول، ما احتمال أن تكون من الورشة الثانية؟

4- إذا علمت أن المنتوج من الورشة الثانية، ما احتمال أن يكون من النوع الأول؟

ثانيا- سحبنا وحدتين من الانتاج اليومي للمؤسسة تعاقبيا ودون إرجاع الوحدة المسحوبة:

1- أحسب احتمال كون القطعتين المسحوبتين من النوع الأول؟

2- أحسب احتمال كون القطعتين المسحوبتين من الورشة الثانية؟

3- أحسب إحتمال أن تكون الأولى من الورشة الثانية والثانية من الورشة الأولى؟

4- أحسب إحتمال أن تكون إحداهما من النوع الأول والأخرى من النوع الثاني؟

5- إذا كان السحب تعاقبيا مع الإرجاع، أحسب الاحتمالات السابقة؟

الحل:

أولا- سحبنا وحدة منتوج من الإنتاج اليومي للمؤسسة بصورة عشوائية:

1- أحسب احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من النوع الأول؟ من النوع الثاني؟

الحل: من النوع الأول: 0,76 ، من النوع الثاني: 0,24

2- أحسب احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من الورشة الأولى؟ من الورشة الثانية؟

الحل: من الورشة الأولى: 0,4 ، من الورشة الثانية: 0,6

3- إذا علمت أن المنتوج من النوع الأول، ما احتمال أن تكون من الورشة الثانية؟ الحل: 0,63

4- إذا علمت أن المنتوج من الورشة الثانية، ما احتمال أن يكون من النوع الأول؟ الحل: 0,8

ثانيا- سحبنا وحدتين من الانتاج اليومي للمؤسسة تعاقبيا ودون إرجاع الوحدة المسحوبة:

1- أحسب احتمال كون القطعتين المسحوبتين من النوع الأول؟ الحل: 0,5774

2- أحسب احتمال كون القطعتين المسحوبتين من الورشة الثانية؟ الحل: 0,3597

3- أحسب إحتمال أن تكون الأولى من الورشة الثانية والثانية من الورشة الأولى؟ الحل: 0,2402

4- أحسب إحتمال أن تكون إحداهما من النوع الأول والأخرى من النوع الثاني؟ الحل: 0,3652

5- إذا كان السحب تعاقبيا مع الإرجاع، أحسب الاحتمالات السابقة؟

أ- 0,5776 ب- 0,36 ج- 0,24 د- 0,3648

المسألة الثانية:

حديقة حيوانات لها بوابتان A_1 و A_2، تفيد إدارة الحديقة أن 70% من الزوار يدخلون من البوابة A_1 ، إحصائيات نفس الإدارة تشير إلى أن 40% من الزوار الذين يدخلون من البوابة A_1 يخرجون منها B_1، في حين أن50% من الذين يدخلون من البوابة A_2 يخرجون منها B_2

1- نختار عشوائيا شخصا من زوار هذه الحديقة (وجد داخل الحديقة):

أ- ما هو احتمال أن يخرج من البوابة الأولى؟ اشرح النتيجة؟ ب- ما هو احتمال أن يخرج من البوابة الثانية؟ اشرح النتيجة؟

2- التقينا بشخص خرج لتوه (في حينه) من الباب الثاني (التقينا به خارج الحديقة):

أ- ما هو احتمال أن يكون قد دخل من البوابة الأولى؟ اشرح النتيجة؟ ب- ما هو احتمال أن يكون قد دخل من البوابة الثانية؟

الحل:

1- نختار عشوائيا شخصا من زوار هذه الحديقة (وجد داخل الحديقة):

أ- ما هو احتمال أن يخرج من البوابة الأولى؟ اشرح النتيجة؟

الحل: 0,43 الشرح: من بين 100 زائر يدخلون للحديقة هناك 43 يخرجون من البوابة الأولى.

ب- ما هو احتمال أن يخرج من البوابة الثانية؟ اشرح النتيجة؟

الحل: 0,57 الشرح: من بين 100 زائر يدخلون للحديقة هناك 57 يخرجون من البوابة الثانية.

2- التقينا بشخص خرج لتوه (في حينه) من الباب الثاني (التقينا به خارج الحديقة):

أ- ما هو احتمال أن يكون قد دخل من البوابة الأولى؟ اشرح النتيجة؟

الحل: 0,74 الشرح: من بين 100 زائر يخرجون من الباب الثاني هناك 74 منهم يدخلون من البوابة الأولى.

ب- ما هو احتمال أن يكون قد دخل من البوابة الثانية؟ اشرح النتيجة؟

الحل: 0,26 الشرح: من بين 100 زائر يخرجون من الباب الثاني هناك 26 منهم يدخلون من البوابة الثانية.

المسألة الثالثة:

1- ما هو عدد الاشارات المختلفة التي يمكن تشكيلها من مجموعة مؤلفة من خمسة أعلام بيضاء وأربعة حمراء و ثلاثة زرقاء، وتتركب كل إشارة من تعليق اثنا عشر علما في خط رأسي؟

2- ما هو عدد المباريات التي يمكن أن تلعب خلال الموسم الكروي (ذهاب وإياب) لبطولة وطنية تضم 16 فريقا؟ استنتج عدد الجولات؟

3- لتكن الأرقام التالية: 3، 4، 7، 8 والمطلوب ما يلي:

أ- ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها والمؤلفة من ثلاث أرقام في حالة تكرار الرقم؟ عدم تكرار الرقم؟

ب- ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها والمؤلفة من كل الأرقام في حالة تكرار الرقم؟ عدم تكرار الرقم؟

أ- ما هو عدد الأعداد الزوجية التي يمكن تشكيلها والمؤلفة من ثلاث أرقام في حالة تكرار الرقم؟ عدم تكرار الرقم؟

4- بكم طريقة يمكن أن يجلس تسعة أصدقاء حول مائدة مستديرة لتناول وجبة العشاء؟

الحل:

1- ما هو عدد الاشارات المختلفة التي يمكن تشكيلها من مجموعة مؤلفة من خمسة أعلام بيضاء وأربعة حمراء و ثلاثة زرقاء، وتتركب كل إشارة من تعليق اثنا عشر علما في خط رأسي؟ الحل: 27720 إشارة

2- ما هو عدد المباريات التي يمكن أن تلعب خلال الموسم الكروي (ذهاب وإياب) لبطولة وطنية تضم 16 فريقا؟ استنتج عدد الجولات؟

الحل: 240 مباراة ، 30 جولة

3- لتكن الأرقام التالية: 3، 4، 7، 8 والمطلوب ما يلي:

أ- ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها والمؤلفة من ثلاث أرقام في حالة تكرار الرقم؟ عدم تكرار الرقم؟ الحل: 64 عدد ، 24 عدد

ب- ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها والمؤلفة من كل الأرقام في حالة تكرار الرقم؟ عدم تكرار الرقم؟ الحل: 256 عدد ، 24 عدد

أ- ما هو عدد الأعداد الزوجية التي يمكن تشكيلها والمؤلفة من ثلاث أرقام في حالة تكرار الرقم؟ عدم تكرار الرقم؟الحل: 32 عدد ، 12 عدد

4- بكم طريقة يمكن أن يجلس تسعة أصدقاء حول مائدة مستديرة لتناول وجبة العشاء؟ الحل: 40320 طريقة

الفصل الثاني

المتغير العشوائي و التوزيعات الإحتمالية

تمهيد:

تلعب التوزيعات الإحتمالية دورا مهما في بناء النماذج الإحصائية و عملية التقدير، فالتوزيع الإحتمالي هو جدول أو قانون يربط بين قيم أو حالات متغير و إحتمالات معينة.

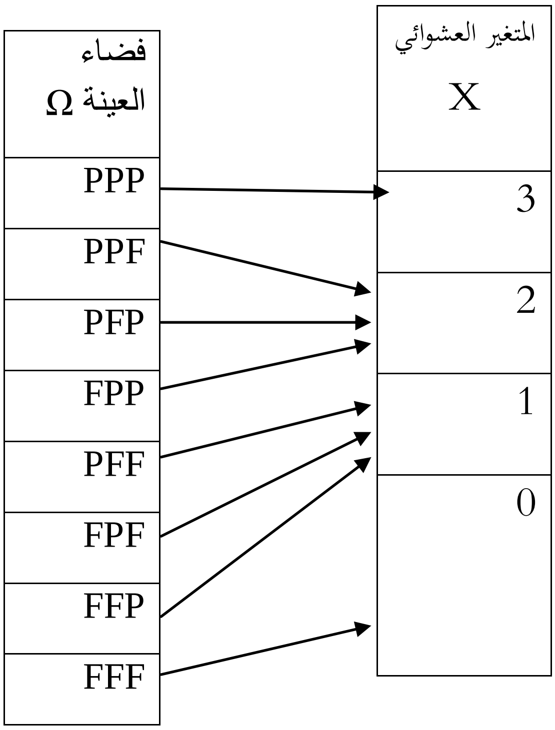
1- *المتغير العشوائي:*

المتغير العشوائي هو تطبيق على فضاء العينة قيمة حقيقية أو شعاعية، تعتمد قيمه على نقطة أو مجموعة من النقاط من فضاء العينة، لهذا فهو يعبر عن حالة أو مجموعة من الحالات من فضاء العينة.

مثال:

نرمي قطعة نقدية 3 مرات بالصدفة في الهواء، و نهتم بعدد مرات الحصول على Pil (P).

X : عدد مرات الحصول على P .



$P(x=3) = P(\{PPP\}) = 1/8$

$P(x=2) = P(\{PPF, PFP, FPP\}) = 3/8$

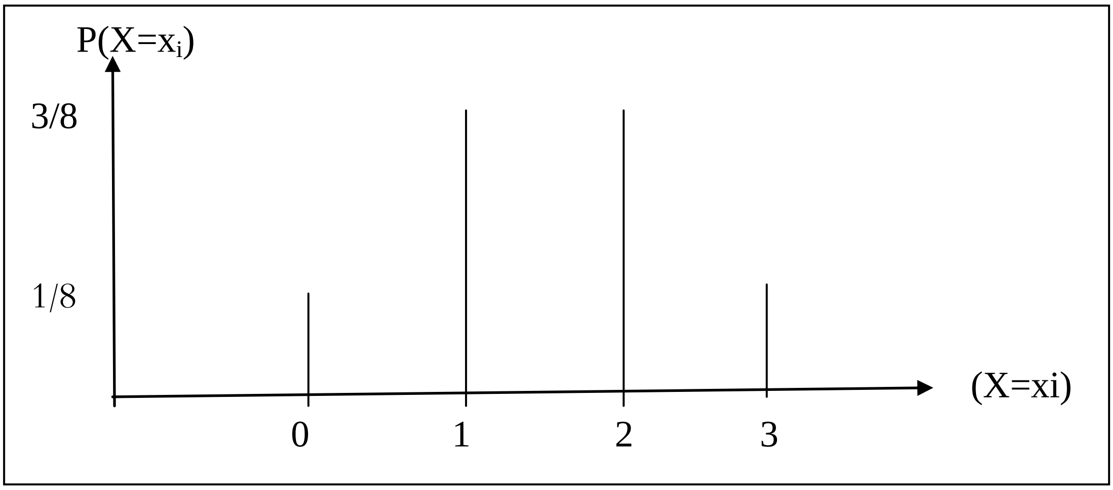
$P(x=1) = P(\{PFF, FPF, FFP\}) = 3/8$

$P(x=0) = P(\{FFF\}) = 1/8$

و يمكن تلخيص هذه النتائج في جدول التوزيع الإحتمالي كما يلي:

$X=x_i$	0	1	2	3	مجموع الإحتمالات
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

و يمكن وضع التمثيل البياني لهذا التوزيع الإحتمالي كما يلي:



– التوزيعات الإحتمالية المتقطعة:

المتغير العشوائي المتقطع هو الذي تختلف قيمه بوحدات معينة، توزيعه الإحتمالي هو جدول أو قانون يبين جميع قيم المتغير العشوائي مقترنة بالإحتمالات المناسبة.

مثال:

نرمي زهرتي نرد بالصدفة في الهواء، و نعرف المتغير العشوائي x الذي يمثل مجموع الرقمين المتحصل عليهما.

X1: قيمة زهرة النرد الأولى.

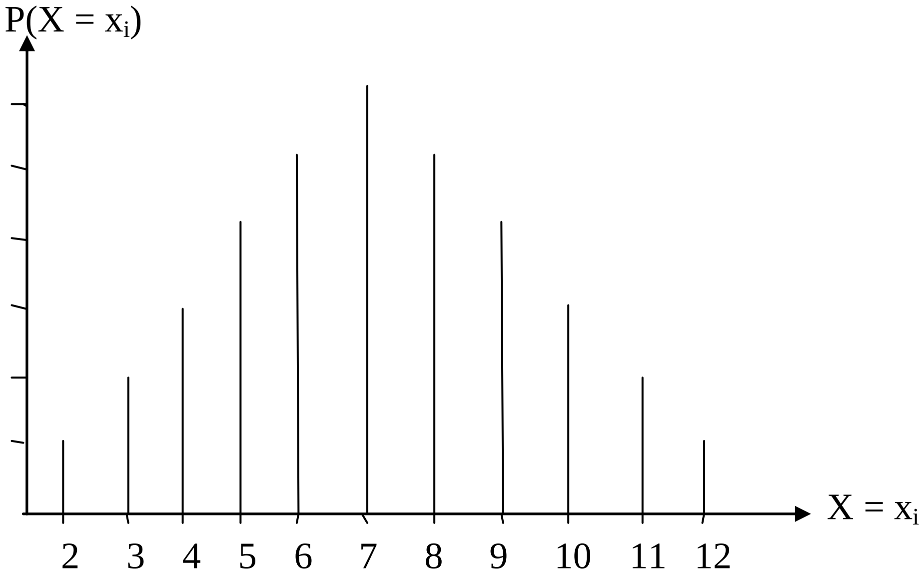
X2: قيمة زهرة النرد الثانية.

x1 / x2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

و يمكن تلخيص هذه النتائج في جدول التوزيع الإحتمالي كما يلي:

X=xi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=xi)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

و يمكن وضع التمثيل البياني لهذا التوزيع الإحتمالي كما يلي:



ملاحظة:

في توزيع إحتمالي لمتغير عشوائي متقطع يجب أن تتحقق العلاقة: $\sum P(X=x_i) = 1$

- ***دالة التوزيع المتجمع:***

دالة التوزيع المتجمع هي دالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$
$$x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

- ***خصائص دالة التوزيع المتجمع:***

- F دالة متزايدة: $x \leq y \longrightarrow F(x) \leq F(y)$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ ، بمعنى أقصى قيمة ل $F(x)$ هي 1.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ، بمعنى أدنى قيمة ل $F(x)$ هي 0.
- F دالة مستمرة على اليمين.

مثال:

ليكن لدينا التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع x كما هو موضح في الجدول التالي:

$X=x_i$	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	0.125	0.375	0.375	0.125	1

المطلوب:

1/ كتابة دالة التوزيع المتجمع و مثلها بيانيا .

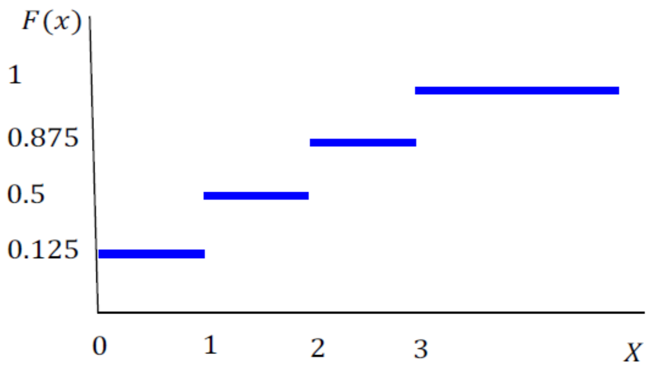
2/ أحسب إحتمال $P(x \leq 2)$ و $P(x < 1.5)$

الحل:

1/ كتابة دالة التوزيع المتجمع

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 0.125 & 0 \leq X < 1 \\ 0.5 & 1 \leq X < 2 \\ 0.875 & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

و يكون التمثيل البياني لدالة التوزيع المتجمع كما يلي:



2/ حساب الإحتمالات:

$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$

$P(x \leq 2) = 0.125 + 0.375 + 0.375 = 0.875$

$P(x < 1.5) = P(x = 0) + P(x = 1)$

$P(x < 1.5) = 0.125 + 0.375 = 0.5$

ملاحظة:

و بصورة عامة إذا كان x منتغير عشوائي متقطع توزيعه الإحتمالي هو:

$X=x_i$	x_1	x_2	....	x_k
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	....	P_k

فإن دالة التوزيع المتجمع تكون على الشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ P_1 + P_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ P_1 + P_2 \ldots + P_{k-1} & x_{K-1} \leq x < x_k \\ 1 & x \geq x_k \end{cases}$$

– التوزيعات الإحتمالية المستمرة:

نقول عن متغير عشوائي أنه مستمر إذا كان بإمكانه أن يأخذ قيمة x_3 بين كل قيمتين محتملتين x_1 و x_2، و تعرف دالة التوزيع الإحتمالي المتجمع الخاصة به كما يلي:

$$F : R \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

- ***خصائص دالة التوزيع المتجمع:***

- F دالة متزايدة: $F(x) \leq F(y) \quad x \leq y \longrightarrow$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ ، بمعنى أقصى قيمة ل $F(x)$ هي 1.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ، بمعنى أدنى قيمة ل $F(x)$ هي 0.
- F دالة مستمرة على اليمين.

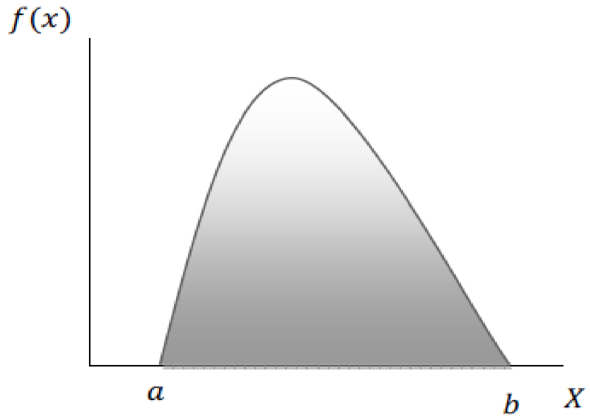
إذا كانت دالة التوزيع المتجمع قالبة للإشتقاق، نقول ان المتغير العشوائي مستمر تماما، و تسمى دالة التوزيع المتجمع كثافة الإحتمال : $F'(x) = f(x)$

- **خصائص كثافة الإحتمال:**

- $f(X) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $f(X) = P(X \in A) = \int_A f(x)dx$

- **التمثيل البياني لدالة الكثافة الإحتمالية:**

تسمى الدالة f دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X وتأخذ التمثيل البياني التالي:



حيث تعبر المساحة المظللة عن مجموع الاحتمالات الكلية وتساوي الواحد الصحيح. وحساب هذه المساحة حيث يكون n عدد كبير جدا يكون من خلال تابع رياضي للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} f(x) & a \leq X \leq b \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

من خلال هذا القانون يمكننا حساب احتمالات المتغير العشوائي X لأي مجال جزئي محصور بين النقطتين a و b.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

فإذا كانت $a = b$ يمكن حساب الاحتمال $P(X = a)$ من خلال:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

ويمكن حساب الاحتمال $P(X < a)$ أيضا من خلال:

$$P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

مثال : أحسب الثابت K إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية؟ مثل دالة الكثافة الاحتمالية بيانيا؟ احسب الاحتمال $P(1 < X < 2)$؟

$$f(X) = \begin{cases} Kx^2 & 0 < X < 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

الحل:

1- حساب قيمة الثابت K:

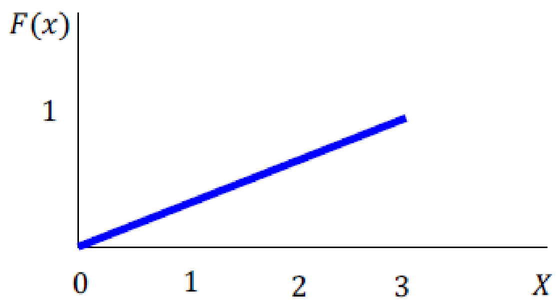
بما أن $K \geq 0$ فإن الخاصية الأولى دوما محققة. وبالتالي يجب أن تحقق $f(X)$ الخاصية الثانية حتى تكون دالة كثافة احتمالية، وبالتالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = \int_0^3 Kx^2dx = 1 = \left[\frac{Kx^3}{3}\right]_0^3 = 1 = 9K = 1$$
$$K = \frac{1}{9}$$

وبالتالي يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 < X < 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

2- التمثيل البياني



3- حساب الاحتمال $P(1 < X < 2)$

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_1^2 = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27} = 0.25$$

4- القيم الخاصة بالمتغيرات العشوائية:

- **التوقع الرياضي $E(X)$:**

نعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي بالعلاقة التالية:

- **في حالة متغير متقطع:**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

- **في حالة متغير مستمر:**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

- **خواص التوقع الرياضي:**

- $E(C) = Ci$
- $E(CX) = C.E(X)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(XY) = E(X).E(Y)$ إذا كان X و Y مستقلين

بحيث:

X ,Y: متغيرات عشوائية.

C: ثابت.

- **التباين $V(X)$:**

- **في حالة متغير متقطع:**

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

- **في حالة متغير مستمر:**

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [E(X)]^2$$

- **خواص التباين:**

- $V(C) = 0$
- $V(CX) = C^2 V(X)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ إذا كان X و Y مستقلين

بحيث:

X ,Y: *متغيرات عشوائية.*

C: *ثابت.*

- ***الإنحراف المعياري:***

الإنحراف المعياري هو عبارة عن جذر التباين و يعرف رياضيا بواسطة العلاقة التالية:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

تمارين و حلول حول الفصل الثاني

التمرين 1: نرمي حجرة نرد. فإذا افترضنا أن المتغير العشوائي X هو ضعف الرقم الذي يظهر على الوجه.

أ- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله البياني؟

ب- حدد تابع توزيع المتغير العشوائي X وتمثيله البياني؟

ج- احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ- تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي :

لدينا عدد الحالات الممكنة هو $\Omega_x = \{1,2,3,4,5,6\}$

وبما أن احتمال ظهور أي وجه هو $\frac{1}{6}$ فإنه يمكن إيجاد احتمالات المتغير العشوائي X في:

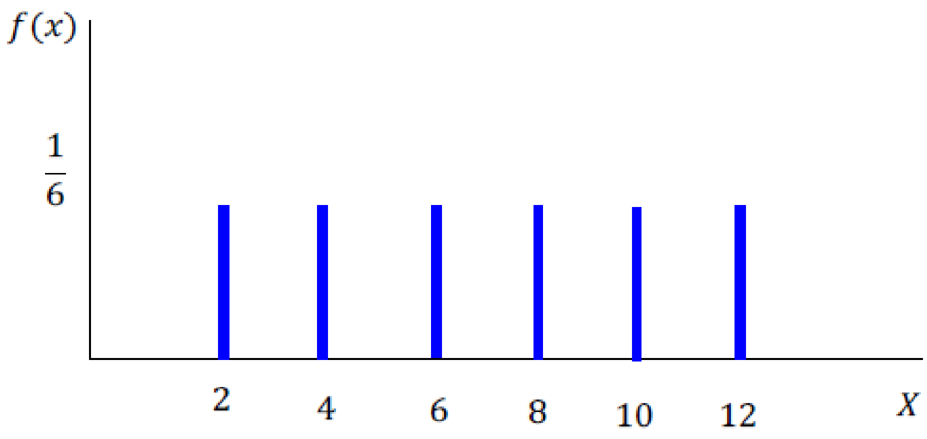
x_i	2	4	6	8	18	12	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

من خلال الجدول نلاحظ أن الخاصيتين محققتين:

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

التمثيل البياني:

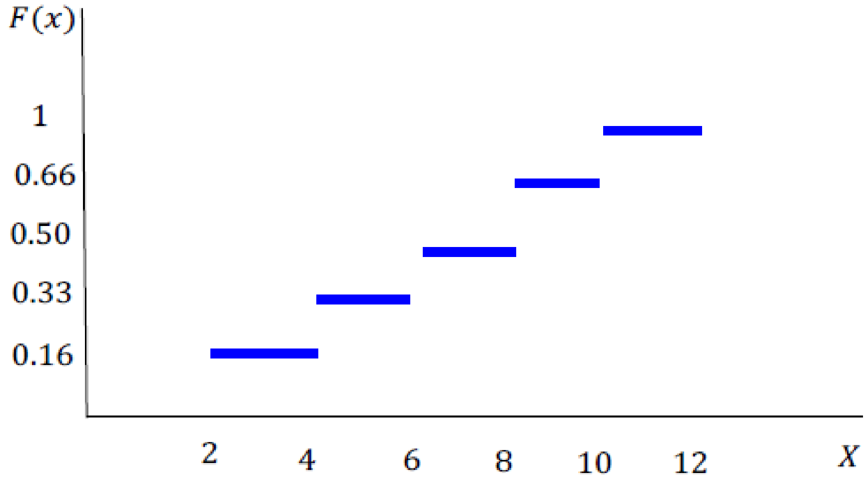


ب- تحديد تابع توزيع المتغير العشوائي X:

x_i	2	4	6	8	18	12	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$F(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<2\\ \frac{1}{6} & 2\le X<4\\ \frac{2}{6} & 4\le X<6\\ \frac{3}{6} & 6\le X<8\\ \frac{4}{6} & 8\le X<10\\ \frac{5}{6} & 10\le X<12\\ 1 & X\ge 12\end{cases}$$

التمثيل البياني:



ج- حساب التوقع الرياضي والتباين

- التوقع الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$$
$$=2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{6}=7$$

- التباين

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=4\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{6}+36\times\frac{1}{6}+64\times\frac{1}{6}+100\times\frac{1}{6}+144\times\frac{1}{6}=60.7-7^2$$
$$V(X)=11.7$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11.7}=3.4$$

التمرين 2: صنعت قطعة نقود حيث $P(H)=\frac{3}{4}$ و $P(T)=\frac{1}{4}$، قمنا برمي هذه القطعة 3 مرات على الأرض. فإذا افترضنا أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور المتتالية في أطول متتابعة.

أ- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي حسابيا وبيانيا؟

ب- حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي حسابيا وبيانيا؟

ج- احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ- تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

لدينا عدد الحالات الممكنة هو

$$\Omega=\{(HHH)(HHT)(HTT)(HTH)(THH)(THT)(TTH)(TTT)\}$$

$$P(HHH)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64} \qquad P(THH)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$$

$$P(HHT)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64} \qquad P(THT)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$$

$$P(HTH)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64} \qquad P(TTH)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$$

$$P(HTT)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64} \qquad P(TTT)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{64}$$

حيث أن المتغير العشوائي يمثل عدد الصور في أطول متتابعة فإنه يمكن أن يأخذ القيم التالية 3, 2, 1, 0

$$P(X=0)=P\{(TTT)\}=\frac{1}{64}$$

$$P(X=1)=P\{(HTT)(HTH)(THT)(TTH)\}=\frac{18}{64}$$

$$P(X=2)=P\{(HHT)(THH)\}=\frac{18}{64}$$

$$P(X=3)=P\{(HHH)\}=\frac{27}{64}$$

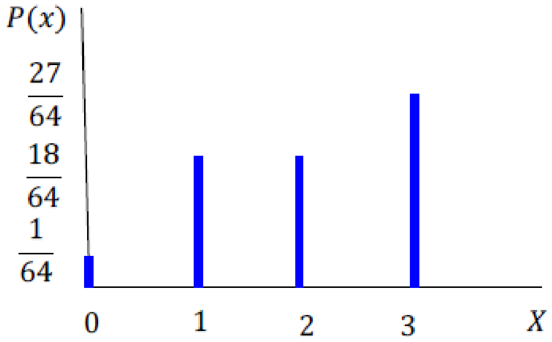
وبالتالي قانون التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

x_i	0	1	2	3	**Σ**
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

من خلال الجدول نلاحظ أن شرطي قانون التوزيع الاحتمالي محققين:

$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$ و $f(x_i)\geq 0$

ويمكن تمثيل بيانيا قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الشكل التالي:

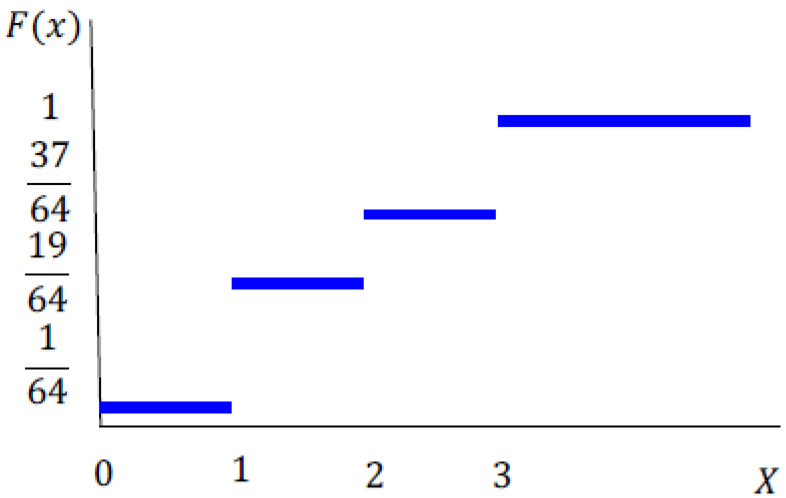


ب- تابع التوزيع للمتغير العشوائي هو

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$	1
$F(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{37}{64}$	1	

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{64} & 0 \le X < 1 \\ \frac{19}{64} & 1 \le X < 2 \\ \frac{37}{64} & 2 \le X < 3 \\ 1 & X \ge 3 \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي:



ج– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 2 \times \frac{18}{64} + 3 \times \frac{27}{64} = 2.1$$

– التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 4 \times \frac{18}{64} + 9 \times \frac{27}{64} = 5.2 - 2.1^2$$
$$V(X) = 0.8$$

– الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.8} = 0.9$$

التمرين 3: يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و4 حمراء قمنا بسحب 3 كرات بطريقة عشوائية. إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1– حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي؟

2– أوجد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

3– أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1– قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

عدد الحالات الممكنة هو

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{3!\times7!} = \frac{720}{6} = 120$$

بما أن المتغير العشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء فإنه يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$$\Omega_s = \{0,1,2,3\}$$

ويمكن حساب الاحتمالات المقابلة لكل قيمة في:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$$

وبالتالي قانون التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

من خلال الجدول نلاحظ أن شرطي قانون التوزيع الاحتمالي محققين:

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

2- تابع التوزيع للمتغير العشوائي هو

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<0\\ \frac{20}{120} & 0\le X<1\\ \frac{80}{120} & 1\le X<2\\ \frac{116}{120} & 2\le X<3\\ 1 & X\ge 3\end{cases}$$

3- حساب التوقع الرياضي والتباين

- التوقع الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$=0\times\frac{20}{120}+1\times\frac{60}{120}+2\times\frac{36}{120}+3\times\frac{4}{120}=1.2$$

- التباين

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=0\times\frac{1}{120}+1\times\frac{60}{120}+4\times\frac{36}{120}+9\times\frac{4}{120}=2-1.2^2$$
$$V(X)=0.56$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.56}=0.74$$

التمرين 4. إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X) = \begin{cases} 2x & 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1– تأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟ ومثله بيانيا؟

2– احسب الاحتمال $P(0 < X < \frac{1}{2})$

3– حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟ ومثله بيانيا؟

4– احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1– التأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

حتى يكون $f(X)$ تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين أساسيين:

$$f(X) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

الخاصية الأولى دوما محققة مهما كانت قيمة X ضمن مجال تعريفه.

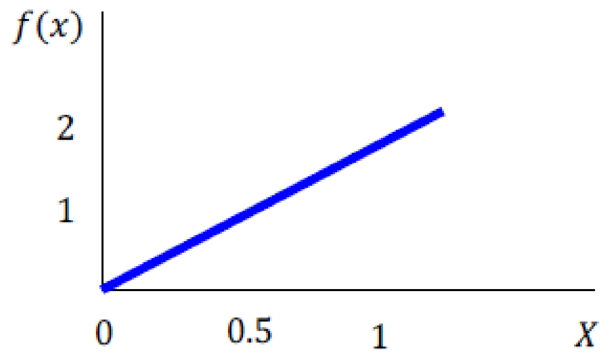
الخاصية الثانية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^1 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = 0 - 1 = 1$$

الخاصية الثانية أيضا محققة ومنه نستنتج أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

التمثيل البياني:



2- حساب الاحتمال $P(0 < X < \frac{1}{2})$

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{0.5} 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.25$$

3- تحديد تابع التوزيع للمتغير العشوائي

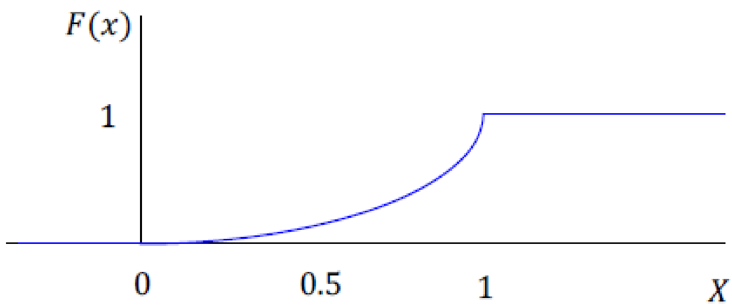
$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x 2xdx = \frac{2x^2}{2}$$

حيث أن: $X \leq 1$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{2x^2}{2} & 0 \leq X \leq 1 \\ 1 & X > 1 \end{cases}$$

ويمكن تحديد التمثيل البياني لتابع التوزيع في مثالنا هذا في الشكل التالي:



3– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{1} x(2x)dx = 2x^2 = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(X) = 0.66$$

– التباين

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_{0}^{1} x^2(2x)dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = \int_{0}^{1} 2x^3 dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 0.5 - 0.44 = 0.06$$

– الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.06} = 0.24$$

التمرين 5: نفترض أن X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X) = \begin{cases} K(4x - 2x^2) & 0 < X < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أحسب قيمة الثابت K حتى يكون التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟

2- احسب الاحتمال $P(X > 1)$

3- حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

الحل:

1- حساب قيمة الثابت K:

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فيجب أن يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^2 K(4x - 2x^2)dx = 1$$

$$= K\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 1$$

$$= K\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = K\frac{8}{3} = 1$$

$$K = \frac{3}{8}$$

2- حساب الاحتمال $P(X > 1)$

$$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx$$

$$= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

3- حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3})$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3}) & 0 \le X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

التمرين 6: نفترض أن X متغير عشوائي مستمر له تابع كثافة احتمالية معطى:

$$f(X) = \begin{cases} cx^4 & 0 < X < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أحسب قيمة الثابت C ؟

2- احسب الاحتمال $P(X < 1.5)$

3- حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

4- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1- حساب قيمة الثابت c:

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^2 cx^4 dx = 1$$
$$= c\int_0^2 x^4 dx = 1$$
$$= c\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = c\frac{32}{5} = 1$$
$$c = \frac{5}{32}$$

- حساب الاحتمال $P(X < 1.5)$

$$P(X < 1.5) = \int_0^{1.5} \frac{5}{32} x^4 dx$$
$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{1.5} = 0.23$$

3- حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x \frac{5}{35}(x^4)dx = \frac{5}{32}\left(\frac{x^5}{5}\right)$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{5}{32}x^5 & 0 \le X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

4- حساب التوقع الرياضي والتباين

- التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{f}(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{32}x^5\right)dx = \frac{5}{32}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{5}{3}$$

$$E(X) = 1.66$$

التباين:

$$V(X) = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{f}(x)dx - [E(X)]^2$$

$$\int_0^2 x^2\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2 = \int_0^2 \frac{5}{32}x^6dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2$$

$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 2.85 - 2.77 = 0.07$$

$$V(X) = 0.07$$

- الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{\ V(X)} = \sqrt{0.07} = 0.28$$

التمرين 7: إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X) = \begin{cases} 30x^2(1-x)^2 & 0 \le X \le 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أثبت أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية ؟

2- احسب الاحتمال $P(X \le \frac{1}{3})$؟

الحل:

1- إثبات أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

حتى يكون $f(X)$ تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين:

$$f(X) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

الخاصية الأولى دوما محققة مهما كانت قيمة X ضمن مجال تعريفه.

الخاصية الثانية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^1 30x^2(1-x)^2 dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$

$$= \int_0^1 30x^2 - 60x^3 + 30x^4 dx$$

$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^1 = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^1$$

$$= (10 \times 1 - 15 \times 1 + 6 \times 1) - (10 \times 0 - 15 \times 0 + 6 \times 0)$$

$$= 10 + 6 - 15 = 1$$

الخاصية الثانية أيضا محققة ومنه التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

2- حساب الاحتمال $P(X \leq \frac{1}{3})$:

$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2 dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2 - 60x^3 + 30x^4 dx$$

$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \left[10x^3 - 15x^4 + 6x^5\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[10x^3 - 15x^4 + 6x^5\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= (10(\frac{1}{3})^3 - 15(\frac{1}{3})^4 + 6(\frac{1}{3})^5) - (10 \times 0 - 15 \times 0 + 6 \times 0)$$

$$= 10\frac{1}{27} - 15\frac{1}{81} + 6\frac{1}{243}$$

$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = 0.2098$$

التمرين 8: إذا كان X متغير عشوائي مستمر له معرف بتابع الكثافة الاحتمالية التالي:

$$f(X)=\begin{cases} Kx^3 & 0<X\leq 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- أحسب قيمة الثابت C ؟

2- احسب الاحتمال $P(X\leq \frac{2}{3}/X>\frac{1}{3})$

3- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1- حساب قيمة الثابت K:

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$
$$=\int_0^1 Kx^3dx=1$$
$$=c\int_0^1 x^3dx=1$$
$$=c\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=c\frac{1}{4}=1$$
$$c=4$$

- حساب الاحتمال $P(X\leq \frac{2}{3}/X>\frac{1}{3})$

$$P(X\leq \frac{2}{3}/X>\frac{1}{3})=\frac{P(X\leq\frac{2}{3}/X>\frac{1}{3})}{P(X>\frac{1}{3})}$$

$$=\frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}4x^3dx}{\int_{\frac{1}{3}}^{1}4x^3dx}=\frac{\left[\frac{4x^4}{4}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}}{\left[\frac{4x^4}{4}\right]_{\frac{1}{3}}^{1}}=0.1875$$

3– حساب التوقع الرياضي والتباين

– التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\text{f}(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^1 x(4x^3)dx = \int_0^1 4x^4 dx = \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$

$$E(X) = 0.8$$

التباين:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\text{f}(x)dx - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_0^1 x^2(4x^3)dx - \left[\frac{4}{5}\right]^2 = \int_0^1 4x^5 dx - \left[\frac{4}{5}\right]^2$$

$$= \left[\frac{4x^6}{6}\right]_0^1 - \left[\frac{4}{5}\right]^2 = 0.66 - 0.64 = 0.02$$

$$V(X) = 0.02$$

– الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.02} = 0.14$$

الفصل الثالث

التوزيعات الإحتمالية الشهيرة

تمهيد:

رأينا أن التوزيعات الاحتمالية تصنف إلى توزيعات متقطعة، و توزيعات مستمرة، من أشهر التوزيعات المتقطعة نجد توزيع ذي الحدين، التوزيع البواسوني، و التوزيع فوق الهندسي، و من أشهر التوزيعات المستمرة نجد التوزيع الطبيعي، و فيما يلي سنتطرق إلى أهم هذه التوزيعات.

1- التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

عرّفنا المتغير العشوائي على أنه مجموعة من النتائج الممكنة، تكون هذه النتائج مرتبطة باحتمالات معينة، هذه العلاقة تسمى بالتوزيع الاحتمالي. من أهم التوزيعات التي سيتم التطرق لها هي توزيع ذي الحدين، والتوزيع البواسوني على اعتبارهما من أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما.

1.1. توزيع ذي الحدين: يستخدم هذا التوزيع لإيجاد الاحتمالات في الحالات التي يكون للتجربة العشوائية نتيجتان فقط النجاح أو الفشل.(سالفاتور، 2011) ومن الأمثلة عن توزيع ذي الحدين نذكر:

- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب)
- نتيجة سباق الجري (الفوز، الخسارة)

ويمكن تطبيق توزيع ذي الحدين إذا تحققت الشروط التالية:

أ- يجب أن تكون النتيجتان متنافيتان لكل محاولة.

ب- المحاولات تكون مستقلة عن بعضها البعض.

ج- احتمال وقوع حادث معين في كل محاولة ثابت ولا يتغير من محاولة لأخرى.

فإذا افترضنا أن نتيجتي التجربة هما النجاح والفشل باحتمالين ثابتين p و$q = 1 - p$ على التوالي. وأن X متغير عشوائي يعبر عن حالات النجاح في n محاولة. فإنه يمكننا حساب الاحتمال $P(X = x) = f(x)$ بواسطة القانون التالي:

$$P(x) = c_n^X p^x (1 - p)^{n-x}$$

ويكون التوقع الرياضي والتباين لتوزيع ذي الحدين كما يلي:

$$E(x) = np$$
$$V(x) = np(1-p)$$

فإذا كان $p = 1 - p = 0.5$ فإن توزيع ذي الحدين يكون متماثلا، وإذا كان $p < 0.5$ يكون التوزيع ملتويا نحو اليمين، أما إذا كان $p > 0.5$ يكون التوزيع ملتويا نحو اليسار.

مثـال : إذا كانت نسبة نجاح الطلبة الذين يحضرون المحاضرة في مقياس الإحصاء هي 0.6، وإذا كان عدد الطلبة الذين يحضرون المحاضرة بانتظام هو 10 طلبة. فإذا افترضنا المتغير العشوائي X يمثل عدد الطلبة الناجحين الذين يحضرون المحاضرة.

1 – حدد شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

2– احسب الاحتمالات التالية:

أ– ما هو احتمال نجاح **3** طلبة الذين يحضرون المحاضرة ؟

ب– ما هو احتمال نجاح طالب واحد على الأقل؟

ج– ما هو احتمال نجاح طالبين على الأكثر من الذين يحضرون المحاضرة ؟

3– احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الطلبة الناجحين.

4– حدد شكل التوزيع.

الحـل:

1 – شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير:

$n = 10 \quad q = p - 1 = 0.4 \quad P = 0.6$ وبالتالي:

$$f(x) = c_n^X p^x (1-p)^{n-x}$$
$$f(x) = c_{10}^X 0.6^x (0.4)^{10-x}$$
$$x = 0,1,2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .10$$

2– حساب الاحتمالات:

أ– حساب احتمال نجاح **3** طلبة الذين يحضرون المحاضرة:

$$P(x=3) = f(3)$$
$$f(3) = c_{10}^3 0.6^3 (0.4)^{10-3}$$
$$= 120 \times 0.216 \times 1.6384 \times 10^{-3} = 0.04$$

ب- حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل:

$$P(x \geq 1) = 1 - f(0)$$
$$= 1 - c_{10}^{0} 0.6^{0} (0.4)^{10-0}$$
$$= 1 - 1 \times 1 \times 1.048576 \times 10^{-4} = 0.99$$

ج- حساب احتمال نجاح طالبين على الأكثر من الذين يحضرون المحاضرة:

$$P(x \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0)$$
$$= c_{10}^{2} 0.6^{2} (0.4)^{10-2} + c_{10}^{1} 0.6^{1} (0.4)^{10-1} + c_{10}^{0} 0.6^{0} (0.4)^{10-0}$$
$$= 0.01$$

3- حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الطلبة الناجحين:

- التوقع الرياضي

$$E(x) = np = 10 \times 0.6 = 6$$

- التباين

$$V(x) = np(1-p) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2.4} = 1.54$$

4- تحديد شكل التوزيع:

بما أن $p = 0.6 > 0.5$ فإن توزيع عدد نجاح الطلبة سالب الالتواء.

2.1. التوزيع البواسوني: يستخدم هذا التوزيع لتحديد احتمال عدد معين من الأحداث (النجاحات) في وحدة من الزمن، وذلك عندما تكون الأحداث مستقلة عن بعضها البعض ويبقى متوسطها ثابتا لوحدة من الزمن. مثل عدد حوادث السيارات خلال السنة، عدد المكالمات خلال شهر.......الخ.

$$P(X) = \frac{\lambda^{-X} e^{\lambda}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots n$$

حيث أن:

X: العدد المعين من النجاحات.

$P(X)$: احتمال عدد x من النجاحات.

λ: متوسط عدد النجاحات في وحدة الزمن.

e: أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي أو 2.71828.

مثال 1: إذا كان عدد حوادث السيارات في مدينة معينة يتبع التوزيع البواسوني بمتوسط 5 حوادث خلال الأسبوع. إذا افترضنا أن X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السيارات خلال أسبوع.

1– حدد شكل دالة الاحتمال $f(X)$ لهذا المتغير.

2– أحسب الاحتمالات التالية:

أ– ما هو احتمال حدوث حادثين خلال أسبوع؟

ب– ما هو احتمال حدوث حادث واحد على الأقل خلال أسبوع؟

ج– ما هو احتمال حدوث ثلاثة حوادث على الأكثر خلال أسبوع؟

3– احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري لعدد الحوادث.

4– حدد شكل التوزيع.

الحل:

1– شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد حوادث السيارات خلال أسبوع هو $X = 5$ وبالتالي تكون دالة الاحتمال:

$$f(X) = \frac{\lambda^{X} e^{-\lambda}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots n$$

$$f(X) = \frac{5^{X} e^{-5}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots 5$$

2- حساب الاحتمالات:

أ- احتمال حدوث حادثين خلال أسبوع هو

$$f(2) = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = \frac{0.16}{2\times1} = 0.08$$

ب- احتمال حدوث حادث واحد على الأقل خلال أسبوع هو

$$f(X \geq 1) = 1 - f(X)$$

$$= 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = 0.99$$

ج- احتمال حدوث ثلاثة حوادث على الأكثر خلال أسبوع هو

$$f(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$= \frac{5^3 e^{-5}}{3!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!} + \frac{5^1 e^{-5}}{1!} + \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = 0.25$$

3- حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحوادث:

- التوقع الرياضي

$$E(x) = \lambda = 5$$

- التباين

$$V(x) = \lambda = 5$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{5} = 2.23$$

4- تحديد شكل التوزيع:

التوزيع البواسوني دائما موجب الالتواء.

3.1. قانون فوق الهندسي:

نقول أن متغير عشوائي x يتبع قانون فوق الهندسي إذا كان يعبر على مجموع n متغير عشوائي غير مستقل لـ: برنولي، أي أن صفة عدم الاستقلالية لـ n متغير عشوائي تعني تكرار تجربة بارنولي n مرة مع عدم الإرجاع.

عمليا قانون فوق الهندسي يعني إجراء دراسة إحصائية على عينة حجمها n وحدة (n كرية، n طالب، n أسرة.......)، بشرط أن يتم سحب العينة مع عدم الإرجاع.

إن احتمال عدد ما X من النجاحات من بين n تجربة برنولية غير مستقلة يحسب وفق قانون التوزيع الاحتمالي التالي:

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \qquad x=0,1,2,3,\dots,n \qquad n=1,2,3,\dots$$

حيث x يمثل عدد مرات النجاح، N: حجم المجتمع، N_1: عدد حالات النجاح، N_2: عدد حالات الفشل، n عدد التجارب.

وبالتالي فإن شروط استخدام قانون توزيع فوق الهندسي هي:

1- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات n.

2- احتمال النجاح في التجربة غير ثابت (تجارب غير مستقلة).

مثال: صندوق به 10 كريات منها 4 بيضاء و3 حمراء و3 خضراء، نسحب بدون إرجاع 3 كريات، وليكن X: متغير عشوائي يمثل عدد الكريات البيضاء المسحوبة، أحسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين، 3 كريات بيضاء، كرية واحدة بيضاء، ولا كرية بيضاء؟

الحل: بما أن التجربة برنولية (مكررة 3 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X يتبع قانون فوق الهندسي:

$$X\to H\left(10,3,\frac{4}{10}\right) \qquad P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \qquad x=0,1,2,3, \qquad n=3$$

وبالتالي :

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120} \qquad P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{4}{120} \qquad P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}$$

- **التوقع الرياضي:** $E(X)=np$
- **التباين:** $V(X)=npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
- **الانحراف المعياري:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

مثال: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل: - **التوقع الرياضي:** $E(X)=np=3\left(\frac{4}{10}\right)=1,2$

- **التباين:** $V(X)=npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=3\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{10-3}{10-1}\right)=0,56$

- **الانحراف المعياري:** $\sigma(X)=\sqrt{0,56}=0,75$

1 .4. التقريب بين القوانين الاحتمالية:

أ- تقريب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين:

إذا كان حجم العينة n صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع N، فإن معامل الشمولية $\left(\frac{N-n}{n-1}\right)$ يؤول إلى الواحد، وتصبح قيمة التباين هذا القانون تساوي قيمة التباين التي توصلنا إليها في قانون ثنائي الحدين، وبالتالي كقاعدة عامة، إذا كان $\left(\frac{n}{N} \leq 0{,}05\right)$ فإننا نقرب قانون فوق الهندسي من القانون ثنائي الحدين، أي نستخدم قانون ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات بدل قانون فوق الهندسي.

أي: $X \to H(N, n, p) \longrightarrow X \to B(n, p)$

مثال: صندوق به 100 كرية منها 60 بيضاء و 40 حمراء، نسحب بدون إرجاع 3 كريات، أحسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين؟

الحل: القانون الأصلي هو قانون فوق الهندسي، $X \to H(100\ ,\ 3\ ,\ 0.6)$

لدينا: $\frac{n}{N} = \frac{3}{100} = 0{,}03 \leq 0{,}05$ وبالتالي: نقرب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين $X \to B(3\ ,\ 0.6)$

$$P\ (X = 2) = C_3^2 (0{,}6)^2 (0{,}4)^1 = 0{,}432$$

ب- تقريب القانون ثنائي الحدين من قانون بواسون:

إذا كان $(n \geq 30)$ و $(P \leq 0{,}05)$ فإن قانون بواسون يعطي نتائج قريبة من القانون الثنائي، وبالتالي كقاعدة عامة فإننا نقرب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون، أي نستخدم قانون بواسون لحساب الاحتمالات بدل قانون ثنائي الحدين.

مثال: إذا كان 3% من انتاج إنتاج آلة ما يعد تالفا، نأخذ 30 وحدة من انتاج هذه الآلة عشوائيا، أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان؟

الحل: القانون الأصلي هو قانون ثنائي الحدين، $X \to B(30\ ,\ 0.03)$

ومنه: $P(X = 2) = C_{30}^2 (0{,}03)^2 (0{,}97)^{28} = 0{,}17$

لدينا: $(n \geq 30)$ و $(P \leq 0{,}05)$ وبالتالي: نقرب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون فنجد:

$$\lambda = np = 30(0{,}03) = 0{,}9$$

$$P(X = 2) = e^{-2}\ \frac{(0{,}9)^2}{2!} = 0{,}17$$

2– التوزيعات الاحتمالية المتصلة

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي تستخدم على نطاق واسع في التحليل الإحصائي. وهو جرسي الشكل متماثل حول الوسط الحسابي، ويمتد إلى ما لانهاية على الجانبين، ولكن أغلب المساحة (الاحتمال) ترتكز حول الوسط الحسابي. كما أن معظم التوزيعات الاحتمالية الأخرى يمكن تقريبها إلى التوزيع الطبيعي.

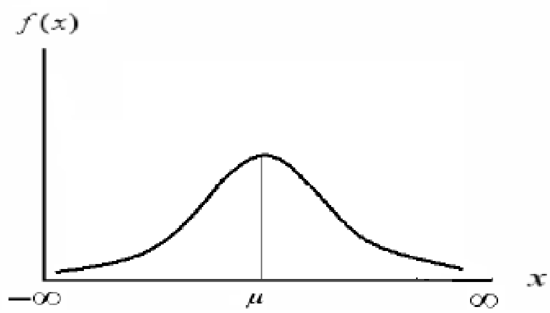
ويعرّف بالقانون التالي:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})}$$

حيث أن: $-\infty < x < \infty$ ، $\pi = \frac{22}{7}$

μ: يمثل الوسط الحسابي.

والتمثيل البياني للتوزيع الطبيعي يكون على شكل جرس كما يلي:



ونظرا لصعوبة حساب التكامل لإيجاد الاحتمال عندما يكون المتغير العشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي، لجأ علماء الإحصاء إلى تحويل التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي القياسي وهو توزيع طبيعي وسطه الحسابي يساوى 0 وانحرافه المعياري يساوي 1. ويمكن تحويل أي توزيع طبيعي بوحدات X إلى توزيع طبيعي قياسي Z. فمثلا لحساب الاحتمالات في حالات تحتوي على التوزيع الطبيعي، نقوم بتحويل أولا قيم X إلى قيم Z المناظرة لها، كالآتي:

$$z = \frac{X-\mu}{\delta}$$

قيمة Z يمكن إيجادها باستخدام الجداول الإحصائية. التي تعطي قيمة الجزء من المساحة (الاحتمال) تحت المنحنى بين قيمة الوسط الحسابي وقيمة Z. وكثافة احتماله تأخذ الشكل التالي:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

ملاحظة: يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع ذي الحدين عندما يكون:

$$n \geq 30, \qquad np > 5, \qquad n(1-p) > 5$$

كما يمكن استخدام أيضا التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع البواسوني عندما يكون:

$$\lambda \geq 10$$

مثال:

إذا كانت علامات الطلبة في قسم معين تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي يساوي 10 وتباين يساوي 4.

1– حدد معالم التوزيع الاحتمالي لعلامات الطلبة؟

2– حدد شكل دالة كثافة الاحتمال؟

3– احسب احتمال أن تكون علامات الطلبة بين 8 و12؟

4– ما هو احتمال أن تكون علامات الطلبة أقل أو يساوي 6؟

الحل:

1– تحديد معالم التوزيع الاحتمالي لعلامات الطلبة:

بما أن علامات الطلبة هي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي فإن معالمه تكون كالأتي:

الوسط الحسابي μ = 10، التباين σ^2 = 4. وبالتالي: $N(\mu, \sigma) = (10,2)$

2– تحديد شكل دالة كثافة الاحتمال:

$$f(X) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-10)^2}{4})}$$

3– احتمال أن تكون علامات الطلبة بين 8 و12 هو

نقوم بحساب أولا قيمة z المناظرة لقيم X وهي 0 و12 ثم نجد القيم التي تناظر قيم z في الجداول الإحصائية كما يلي:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{8-10}{2} = -1 \qquad\qquad z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{12-10}{2} = 1$$

عند $z = 1$ يمكننا الحصول على القيمة 0.3413 من الجداول الإحصائية. هذا يعني أن احتمال أن تكون العلامات بين 8 و12 هو $(0.3413 + 0.3413)$

$$P(8 < X < 12) = 0.6826$$

4– احتمال أن تكون علامات الطلبة أقل أو يساوي 6 هو

$$z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{6-10}{2} = -2$$

عند $z = 2$ يمكننا الحصول على القيمة 0.4772 من الجداول الإحصائية. هذا يعني أن احتمال أن تكون العلامات أقل من 6 هو

$$P(X \leq 6) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

3- جدول التوزيع الطبيعي المعياري وطريقة استخدامه

نظراً لصعوبة حساب قيم دالة التوزيع الطبيعي المعياري فقد تم إعداد جداول خاصة لذلك، تعطي قيمة دالة التوزيع $F(Z)$ ابتداءً من الصفر وبفاصل 0.01 بين كل قيمتين، حيث وضعت أصغر قيمة $z = -3.5$ و أكبر قيمة $z = +3.5$ (لأسباب تتعلق بقيمة المتوسط الحسابي والانحراف المعياري) في العمود الأيسر والمنزلة العشرية الثانية في السطر الأول والقيم المقابلة لها أي المساحة $F(Z)$ وضعت في متن الجدول.

مثال ذلك: القيمة $z = -2.53$ نجدها عند تقاطع السطر العاشر والعمود الرابع وعندها نجد : $F(z) = 0.0057$

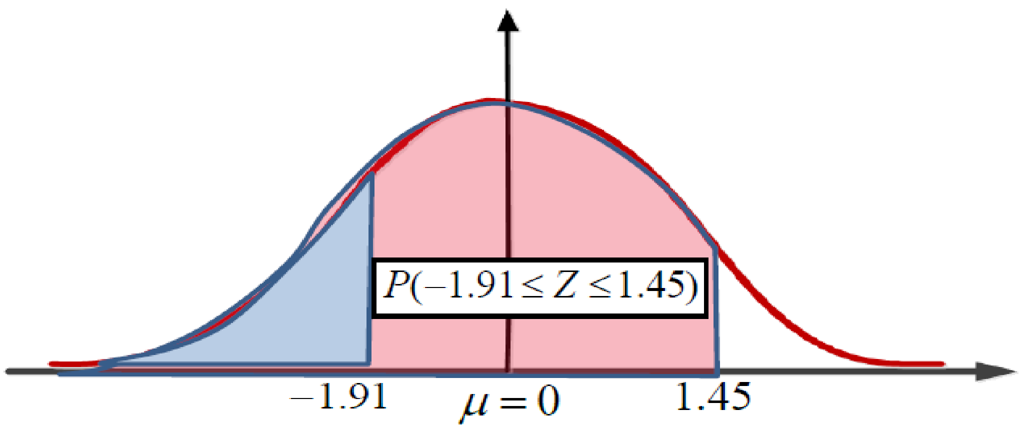
مثال:

بفرض أن $Z \sim N(0,1)$ أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(Z \le 1.72)$$
$$P(Z \le -0.54)$$
$$P(Z \ge 0.29)$$
$$P(-1.91 \le Z \le 1.45)$$

الحل:

$$P(Z \le 1.72) = F(1.72) = 0.9573$$
$$P(Z \le -0.54) = F(-0.54) = 0.2946$$
$$P(Z \ge 0.29) = 1 - P(Z \le 0.29)$$
$$= 1 - F(0.29) = 1 - 0.6141 = 0.3859$$
$$P(-1.91 \le Z \le 1.45) = P(Z \le 1.45) - P(Z \le -1.91)$$
$$= 0.9265 - 0.0281 = 0.8984$$



الاستخدام العكسي للجداول.....مثال:

بفرض أن $Z \sim N(0,1)$ و كان $P(Z \le a) = 0.6736$ أوجد a:

الحل:

بعد البحث في الجدول نلاحظ أن القيمة 0.6736 توجد عند تقاطع السطر الأربعون و العمود السادس و هي تقابل القيمة $a = 0.45$ أي:

$$P(Z \le 0.45) = 0.6736$$

مثال:

بفرض أن $Z \sim N(0,1)$ و كان $P(Z \le b') = 0.4569$ أوجد b:

الحل:

$$P(Z \ge b) = 1 - P(Z \le b) = 0.4569$$
$$P(Z \le b) = 1 - 0.4569 = 0.5431$$
$$\Rightarrow \quad b = 0.12$$

تمارين و حلول حول الفصل الثالث

التمرين 1: نرمي حجرة نرد 4 مرات متتالية، ونسجل في كل مرة الرقم الذي يظهر. فإذا كانت جميع الأوجه لها نفس احتمال الظهور وأن الأربعة رميات مستقلة عن بعضها البعض.

1- ما هو احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات؟

2- ما هو احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل؟

إذا كان لدينا المتغير العشوائي X حيث يمثل عدد مرات ظهور الرقم 5 في الأربع رميات.

3- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

4- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ- احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات هو

احتمال ظهور الرقم 5 عند رمي حجرة نرد مرة واحدة هو $\frac{1}{6}$. إذا اعتبرنا A و B هو حادث ظهور وعدم ظهور الرقم 5 على التوالي. يصبح لدينا:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{5}{6}$$

وبما أن عدد الرميات مستقلة عن بعضها البعض فإنه يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين حيث أن:

$$P(X) = c_n^X p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=3) = c_4^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} = 0.01$$

2- احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل هو

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = P(X=0) = c_4^0 \frac{1}{6}^0 (\frac{5}{6})^{4-0} = 0.48$$

$$P(A) = 1 - 0.48 = 0.52$$

3- تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

إذا كان المتغير العشوائي ظهور الرقم 5 يكون لدينا عدد الحالات الممكنة عند رمي حجرة نرد مرة واحدة

$$\mathbf{\Omega} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$$

أما عندما نرمي حجرة نرد 4 مرات تكون عدد الحالات الممكنة $2^4 = 16$

وبما أن المتغير العشوائي يتبع توزيع ذي الحدين فإنه يمكننا حساب الاحتمالات المقابلة من خلال:

حيث أن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي هي: $\{0,1,2,3,4\}$

$$P(X=0)=c_4^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{4-0}=\frac{625}{1296}$$

$$P(X=1)=c_4^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1}=\frac{125}{324}$$

$$P(X=2)=c_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}=\frac{25}{216}$$

$$P(X=3)=c_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3}=\frac{5}{324}$$

$$P(X=4)=c_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{4-4}=\frac{1}{1296}$$

x_i	0	1	2	3	4	Σ
p_i	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$	1

4– حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي

$$E(X)=np$$
$$=4\times\frac{1}{6}=0.66$$

- التباين

$$V(X)=np(1-p)$$
$$=4\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=0.55$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}$$
$$\delta(X)=\sqrt{0.55}$$
$$\delta(X)=0.74$$

التمرين 2: تشير الإحصائيات للسنوات السابقة أنه في المتوسط يتوقف 6 طلاب جدد عن الدراسة في كل قسم كل سنة في كلية معينة.

1– ما هو احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة؟

2– ما هو احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة؟

3– أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1– احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots . n$$

$$P(3) = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = \frac{216 \times 0.00248}{3 \times 2 \times 1} = 0.08928$$

2– احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$P\,(3) = 0.08928$$

$$P(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = \frac{36 \times 0.00248}{2 \times 1} = 0.04464$$

$$P(1) = \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = \frac{6 \times 0.00248}{1} = 0.01488$$

$$P(0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = \frac{1 \times 0.00248}{1} = 0.00248$$

$$P(X \leq 3) = 0.08928 + 0.04464 + 0.01488 + 0.00248$$

$$= 0.15128$$

3– حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحوادث:

- التوقع الرياضي

$$E(x) = \lambda = 6$$

- التباين

$$V(x) = \lambda = 6$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{6} = 2.45$$

التمرين 3: في امتحان مقياس الإحصاء وجد الطالب 4 تمارين. فإذا كان احتمال أن يجيب هذا الطالب عن كل تمرين صحيحا هو $\frac{2}{3}$.

1− ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط؟

2− ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر؟

3− ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين؟

الحل:

1− احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط هو

لدينا: $n = 4, \quad P = \frac{2}{3}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{3}$

$$P(2) = c_4^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

2− احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر هو

$$P(X \geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$P(1) = c_4^1 (\frac{2}{3})^1 (\frac{1}{3})^{4-1} = 0.0987$$

$$P(2) = c_4^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

$$P(3) = c_4^3 (\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})^{4-3} = 0.3950$$

$$P(4) = c_4^4 (\frac{2}{3})^4 (\frac{1}{3})^{4-4} = 0.1975$$

$$P(X \geq 1) = 0.0987 + 0.2962 + 0.3950 + 0.1975$$
$$= 0.9876$$

أو بطريقة ثانية:

احتمال أن لا يجيب عن أي تمرين هو $q^4 = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$ وبالتالي احتمال أن يجيب صحيحا على الأقل على تمرين هو $1 - q^4 = \frac{80}{81} = 0.9876$

3− احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين هو

يجيب هذا الطالب على أكثر من نصف التمارين يعني إذا أجاب صحيحا على 3 أو 4 تمارين.

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0.3950 + 0.1975 = 0.5925$$

التمرين 4: تشير الإحصائيات أن 1 في المائة من السيارات المنتجة في مصنع ما فيها بعض المشاكل التقنية. فرضا أننا اخترنا عينة متكونة من 30 سيارة. أحسب احتمال وجود أكثر من سيارة فيها مشاكل تقنية:

1– باستخدام توزيع ذي الحدين؟

2– باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين؟

الحل:

1– باستخدام توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 30, \quad P = 0.01, \quad q = 1 - P = 0.99$

باستخدام الجداول الإحصائية نجد:

$$P(X > 1) = P(2) + P(3) + P(4) \dots \dots . = 0.0328 + 0.0031$$
$$= 0.0328 + 0.0031 + 0.0002 = 0.0361$$

2– باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين:

بما أن $n = 30$ و $np = 30 \times 0.01 = 0.3$ فإنه يمكننا استخدام تقريب التوزيع البواسوني لتوزيع ذي الحدين. حيث أن: $\lambda = np = 0.3$

يمكننا حساب $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$ حيث أن X هو عدد السيارات غير الجيدة.

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(1) = \frac{0.3^1 e^{-0.3}}{1!} = \frac{0.3 \times 0.74082}{1} = 0.222246$$
$$P(0) = \frac{0.3^0 e^{-0.3}}{0!} = \frac{1 \times 0.74082}{1} = 0.74082$$

$$P(X \leq 1) = P(1) + P(0) = 0.222246 + 0.74082$$
$$= 0.963066$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - 0.963066 = 0.036934$$

فكلما زادت n يقترب التقريب أكثر من الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين

التمرين 5: إذا كان طول الطلبة في كلية ما يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط حسابي 170 وانحراف معياري 10.

1- ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا بين 150 و160؟

2- ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أقل أو يساوي 175؟

3- ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أكثر أو يساوي 185؟

الحل:

1- احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا بين 150 و160 هو

نقوم بحساب أولا قيمة z المناظرة لقيم X ثم نجد القيم التي تناظر قيم z في الجداول الإحصائية كما يلي:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{150-170}{10} = -2 \qquad z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{160-170}{10} = -1$$

عند البحث عن مقابل $z = -2$ و $z = 1$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمتين 0.4772 و0.3413. هذا يعني أن احتمال أن العمر بين 150 و160 هو

$$P(150 < X < 160) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

2- احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أقل أو يساوي 175 هو

$$z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{175-170}{10} = 0.5$$

عند البحث عن مقابل القيمة $z = 0.5$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمة 0.1915. هذا يعني أن احتمال أن يكون عمر الطالب أقل أو يساوي 175 هو

$$P(X \leq 175) = 0.5 - 0.1915 = 0.3085$$

3- احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أكثر أو يساوي 185 هو

$$z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{185-170}{10} = 1.5$$

عند البحث عن مقابل القيمة $z = 1.5$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمة 0.4332. هذا يعني أن احتمال أن يكون عمر الطالب أكثر أو يساوي 185 هو

$$P(X \geq 185) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

التمرين 6: إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات في أحد المسابقات هو 74 و12 على التوالي.

1– أحسب العلامات بالوحدات القياسية واحتمالاتها للمتسابقين الحاصلين على: 75،60، 85، 93؟

2– أحسب العلامات المناظرة للوحدات القياسية: -1، 0.5، 1.5، 2؟

الحل:

1– حساب العلامات بالوحدات القياسية للمتسابقين الحاصلين على:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{60-74}{12} = -1.16, \qquad P(z_1 = 1.16) = 0.3770$$

$$z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{75-74}{12} = 0.08, \qquad P(z_2 = 0.08) = 0.0319$$

$$z_3 = \frac{X_3-\mu}{\delta} = \frac{85-74}{12} = 0.91, \qquad P(z_3 = 0.91) = 0.3186$$

$$z_4 = \frac{X_4-\mu}{\delta} = \frac{93-74}{12} = 1.58, \qquad P(z_4 = 1.58) = 0.4429$$

2– العلامات المناظرة للوحدات القياسية: -1، 0.5، 1.5، 2 هي

$$X_1 = z_1 \times \delta + \mu = 12 \times (-1) + 74 = 62$$

$$X_2 = z_2 \times \delta + \mu = 12 \times (0.5) + 74 = 80$$

$$X_3 = z_3 \times \delta + \mu = 12 \times (1.5) + 74 = 92$$

$$X_4 = z_4 \times \delta + \mu = 12 \times (2) + 74 = 98$$

التمرين 7: إذا ألقينا 12 قطعة نقدية متماثلة. أحسب احتمال أن نحصل على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و7 بما في ذلك 4 و7، وذلك باستخدام:

1– توزيع ذي الحدين؟

2– التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين؟

الحل:

1– باستخدام توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 12, \quad P = 0.5, \quad q = 1 - P = 0.5$

$$P(4 \leq X \leq 7) = P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$$

$$P(4) = c_{12}^{4}(\frac{1}{2})^{4}(\frac{1}{2})^{12-4} = 0.1208$$

$$P(5) = c_{12}^{5}(\frac{1}{2})^{5}(\frac{1}{2})^{12-5} = 0.1933$$

$$P(6) = c_{12}^{6}(\frac{1}{2})^{6}(\frac{1}{2})^{12-6} = 0.2255$$

$$P(7) = c_{12}^{7}(\frac{1}{2})^{7}(\frac{1}{2})^{12-7} = 0.1933$$

$$P(4 \leq X \leq 7) = 0.1208 + 0.1933 + 0.2255 + 0.1933$$
$$\approx 0.7332$$

2– باستخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين:

لدينا: $\mu = np = 12 \times 0.5 = 6$

$$\delta = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \times 0.5 \times 0.5} = 1.78$$

إذا كان X يمثل عدد ظهور الصورة. وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال $P(4 \leq X \leq 7)$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصل من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي. في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال: $P(3.5 \leq X \leq 7.5)$

نقوم بحساب 3.5 و7.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\delta} = \frac{3.5-6}{1.78} = -1.45, \qquad P(z_1 = 1.45) = 0.4265$$

$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\delta} = \frac{7.5-6}{1.78} = 0.87, \qquad P(z_2 = 0.87) = 0.3078$$

$$P \approx P(4 \leq X \leq 7) = P(-1.45 \leq X \leq 0.87)$$
$$= 0.4265 + 0.3078 = 0.7343$$

التمرين 8: نفترض أنه هناك 300 خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب متكون من 500 صفحة. أحسب احتمال أن تحتوي صفحة معينة على:

1– خطأين بالضبط؟

2– خطأين أو أكثر؟

3– 5 أخطاء بالضبط؟

الحل:

1– احتمال وجود خطأين بالضبط هو :

نفترض أن عدد الأخطاء في الصفحة هو عبارة عن عدد مرات النجاح حسب توزيع ذي الحدين. لدينا:

$n = 300$ حيث أنه يوجد 300 خطأ مطبعي و $P = \frac{1}{500}$ هو احتمال أن يظهر خطأ في الصفحة المعينة. وبما أن P صغيرة و n كبيرة من الأفضل استخدام تقريب بواسون لتوزيع ذي الحدين حيث أن:

$$\lambda = np = 0.6$$

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(X = 2) = \frac{0.6^2 e^{-0.6}}{2!} = \frac{0.36 \times 0.549}{2} = 0.0988$$

2– احتمال خطأين أو أكثر هو

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X = 0) = \frac{0.6^0 e^{-0.6}}{0!} = \frac{1 \times e^{-0.6}}{1} = 0.549$$

$$P(X = 1) = \frac{0.6^1 e^{-0.6}}{1!} = \frac{0.6 \times 0.549}{1} = 0.329$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.549 + 0.329$$

$$= 0.122$$

3– احتمال وجود 5 أخطاء بالضبط هو

$$P(X = 5) = \frac{0.6^5 e^{-0.6}}{5!} = \frac{0.0777 \times 0.549}{120} = 3.554775 \times 10^{-4}$$

التمرين 9: في مركز تلقي المكالمات الهاتفية، يتم استقبال المكالمات من خارج الوطن باحتمال قدره 0.1 في الساعة. قمنا بسحب 100 مكالمة خلال ساعة معينة. ما هو احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية في العينة المسحوبة وذلك باستخدام:

1- توزيع ذي الحدين؟

2- التوزيع البواسوني؟

3- التوزيع الطبيعي؟

الحل:

1- احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام توزيع ذي الحدين هو:

نفترض أن X هو عدد المكالمات الدولية التي يستقبلها المركز. وبالتالي يجب أن نحسب الاحتمال:

$$P(X > 3)$$

لدينا: المكالمة يمكن أن تكون محلية أو دولية وبالتالي يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين.

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \end{aligned}$$

$$P(X = 0) = c_{100}^{0}(0.1)^{0}(0.9)^{100-0} = 0.0000265$$

$$P(X = 1) = c_{100}^{1}(0.1)^{1}(0.9)^{100-1} = 0.0005951$$

$$P(X = 2) = c_{100}^{2}(0.1)^{2}(0.9)^{100-2} = 0.0016231$$

$$P(X = 3) = c_{100}^{3}(0.1)^{3}(0.9)^{100-3} = 0.0078363$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= 0.000026 + 0.000595 + 0.001623 + 0.007836 \\ &= 0.0078363 \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - 0.0078363 \\ &= 0.9921 \end{aligned}$$

2 – احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام التوزيع البواسوني هو:

لدينا: $n = 100$ و $P = 0.1$ هو احتمال تلقي مكالمة دولية. وبما أن P صغيرة وn كبيرة فإنه بإمكاننا استخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين حيث أن:

$$\lambda = np = 10$$

نقوم بحساب الاحتمال: $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3)$

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(X = 0) = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} = \frac{1 \times 0.00005}{1} = 0.00005$$

$$P(X = 1) = \frac{10^1 e^{-10}}{1!} = \frac{10 \times 0.00005}{1} = 0.0005$$

$$P(X = 2) = \frac{10^2 e^{-10}}{2!} = \frac{100 \times 0.00005}{2} = 0.0023$$

$$P(X = 3) = \frac{10^3 e^{-10}}{3!} = \frac{1000 \times 0.00005}{6} = 0.008$$

$$P(X \le 3) = 0.00005 + 0.0005 + 0.0023 + 0.008 = 0.0104$$

$$P(X > 3) = 1 - 0.0104 = 0.9896$$

3– احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام التوزيع الطبيعي هو:

نقوم بحساب الاحتمال: $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3)$

لدينا: $\mu = np = 100 \times 0.1 = 10$

$$\delta = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0.1 \times 0.9} = 3$$

بافتراض أن X يمثل عدد المكالمات الدولية. وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال

$$P(X > 3) = 1 - P(0 \le X \le 3)$$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصلة من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي. في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال: $P(-0.5 \le X \le 3.5)$

نقوم بحساب 3.5 و7.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\delta} = \frac{-0.5 - 10}{3} = -3.5, \qquad P(z_1 = 3.5) = 0.4998$$

$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\delta} = \frac{3.5 - 10}{3} = -2.16, \qquad P(z_2 = 2.16) = 0.4846$$

$$P \approx P(0 \le X \le 3) = P(-3.5 \le X \le -2.16)$$
$$= 0.4998 + 0.4846 = 0.9844$$

التمرين 10: تتكون عائلة من 7 أطفال، ما هو احتمال أن يكون في هذه العائلة:

1– 4 أولاد ؟

2– عدد الأولاد أقل من عدد البنات؟

الحل:

1– احتمال أن يكون في هذه العائلة 4 أولاد هو

نفترض احتمال أن يكون الطفل ولد هو $\frac{1}{2}$

لدينا: $n = 7, \quad P = \frac{1}{2}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{2}$

$$P(X = 4) = c_7^4 (\tfrac{1}{2})^4 (\tfrac{1}{2})^3 = 0.2734$$

2– احتمال أن يكون في هذه العائلة عدد الأولاد أقل من عدد البنات هو

$$P(X) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = c_7^0 (\tfrac{1}{2})^0 (\tfrac{1}{2})^7 = 0.0081$$

$$P(X = 1) = c_7^1 (\tfrac{1}{2})^1 (\tfrac{1}{2})^6 = 0.0546$$

$$P(X = 2) = c_7^2 (\tfrac{1}{2})^2 (\tfrac{1}{2})^5 = 0.1640$$

$$P(X = 3) = c_7^3 (\tfrac{1}{2})^3 (\tfrac{1}{2})^4 = 0.2734$$

$$P(X) = 0.0081 + 0.0546 + 0.1640 + 0.2734$$
$$= 0.5001$$

التمرين 11: نفترض أن نسبة رسوب الطلبة في إحدى الأقسام هو 0.02. ما هو احتمال وجود 3 طلبة راسبين في عينة متكونة من 100 طالب اختيرت عشوائيا وذلك باستخدام:

1- توزيع ذي الحدين؟

2- توزيع بواسون؟

الحل:

في هذا المثال نستطيع تطبيق توزيع ذي الحدين، وحيث أن P صغيرة تساوي 0.02 و n كبيرة تساوي 100 فمن الأفضل تطبيق التوزيع البواسوني.

1- توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 100, \quad P = 0.02, \quad q = 1 - P = 0.98$

$$P(X = 3) = c_{100}^{3}(0.02)^3(0.98)^{97} = 0.1822$$

$$P(X = 3) = 0.1822$$

2- توزيع بواسون:

$$\lambda = np = 2$$

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{8\times 0.1353}{6} = 0.1804$$

$$P(X = 3) = 0.1804$$

الفصل الرابع

نظرية توزيع المعاينة

تمهيد:

يعتبر أسلوب المعاينة من أهم الأساليب الإحصائية التي نستخدمها لدراسة مجموعة كبيرة من المفردات (تسمى مجتمع) بقصد التعرف على خواصها عن طريق دراسة مجموعة صغيرة من هذه المفردات (تسمى عينة)، حيث نقوم بدراسة هذه العينة بدقة للتعرف على خواصها ومعرفة معالمها مثل الوسط الحسابي وغير ذلك من المقاييس الإحصائية ثم نقوم بتعميم النتائج التي نحصل عليها على المجتمع الأصلي للتعرف على خواصه ومعالمه وهذا هو الهدف الأساسي من الدراسة. وبالطبع لا يكون هذا التعميم من العينة إلى المجتمع له معنى أو قيمة علمية إلا إذا تم اختيار المفردات بطريقة نضمن بها أن تكون العينة ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا.

1- تعريف توزيع المعاينة وعدد العينات المسحوبة:

1-1- تعريف توزيع المعاينة: نفرض أن لدينا مجتمعا من المفردات يتبع توزيعا احتماليا معينا وأننا بصدد سحب عينة حجمها n من هذا المجتمع، بالطبع ليس معنى هذا أن هناك عينة واحدة يمكن سحبها ولكن يكون أمامنا عدد كبير من العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع والتي حجم كل منها هو n من المفردات.

والآن نفرض أننا سحبنا عينة حجمها n من هذا المجتمع وحسبنا من هذه العينة مقياسا معينا (وليكن الوسط الحسابي) ثم سحبنا عينة ثانية لها نفس الحجم n وحسبنا منها نفس المقياس ثم سحبنا عينة ثالثة وحسبنا منها نفس المقياس وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع، سنجد أمامنا عددا كبيرا من القيم لنفس المقياس ولا نتوقع أن تكون جميع القيم التي حصلنا عليها من العينات لهذا المقياس متساوية وإنما ستكون مختلفة عن بعضها وتكون مجتمعا أخر، عدد مفرداته أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي.

وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس على أنه متغير عشوائي يأخذ قيما مختلفة (هي التي حصلنا عليها من هذه العينات) ويتبع توزيعا معينا ربما يختلف أو لا يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي يسمى بتوزيع المعاينة لهذا المقياس سواء كان هذا المقياس هو الوسط الحسابي أو نسبة المفردات التي لها صفة معينة أو الانحراف المعياري أو غيره من المقاييس الإحصائية.

1-2- عدد العينات المسحوبة من المجتمع:

لإيجاد عدد العينات الممكنة والمسحوبة من المجتمع حجمه N هناك حالتين في حالة السحب بالإرجاع وفي حالة السحب بدون إرجاع:

- في حالة السحب بالإرجاع فان عدد العينات الممكنة يساوي N^n .
- في حالة السحب بدون إرجاع تنقسم إلى قسمين:

– حالة السحب بدون إرجاع والترتيب غير مهم: $C_N^n = \frac{N!}{(N-n)!(n!)}$

– حالة السحب بدون إرجاع والترتيب مهم: $\frac{N!}{(N-n)!}$.

ملاحظة: في حالة السحب بدون إرجاع ولم يتم ذكر نوعية الترتيب، فإننا نعتبر الترتيب غير مهم.

2- توزيع المعاينة للمتوسطات:

نفرض أن لدينا مجتمعا ولتكن مفرداته هي: $X_1, X_2, X_3 ....$.

ونفرض أننا سحبنا من هذا المجتمع عينة حجمها n وحسبنا وسطها الحسابي فوجدناه $\bar{x}_1$ ثم سحبنا عينة أخرى لها نفس الحجم وحسبنا وسطها الحسابي فوجدناه $\bar{x}_2$، ثم عينة ثالثة لها نفس الحجم ووجدنا أن وسطها الحسابي $\bar{x}_3$ وهكذا بالنسبة لكل العينات التي حجمها n والتي يمكن سحبها من هذا المجتمع. سنجد في النهاية أننا سنحصل على مجموعة جديدة من المفردات هي المتوسطات الحسابية لهذه العينات وهي تكون مجتمعا جديدا يسمى مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات التي حجمها n والتي يمكن سحبها من المجتمع الأصلي ويمكن كتابة مفردات المجتمع الجديد على النحو التالي: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, ...$.

وهذه المتوسطات تختلف عن بعضها كما أنها تكون مجتمعا جديدا له توزيع احتمالي يهمنا معرفته ودراسته، ومجتمع المتوسطات الحسابية $\bar{X}$ كأي مجتمع أخر له توزيع احتمالي يتمتع بجميع صفات وخواص التوزيعات الاحتمالية وبالطبع له متوسط وانحراف معياري.

1-2- متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات:

إذا كانت متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و x متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع حيث حجم المجتمع يرمز له بالرمز N وحجم العينة يرمز لها بالرمز n، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\bar{X})$ تكتب كما يلي:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

مثال 1:

ليكن لدينا المجتمع المتكون من المفردات التالية: 1، 3، 5.

- أحسب متوسط المجتمع μ ؟.
- ما هي القيمة المتوقعة لمتوسط عينة مسحوبة من المجتمع في حالة السحب بالإرجاع وفي حالة السحب بدون إرجاع مكونة من مفردتين $(n=2)$؟.
- قارن بين $\mu_{\bar{x}}$ و μ؟

الحل:

- حساب متوسط المجتمع: $\mu = (1 + 3 + 5) / 3 = 3$
- إيجاد القيمة المتوقعة لمتوسط عينة مسحوبة من المجتمع في حالة السحب بالإرجاع وفي حالة السحب بدون إرجاع:

أ- <u>حالة السحب بالإرجاع:</u>

من أجل تحديد ذلك يجب حساب جميع الحالات الممكنة للمتوسط $\overline{x_i}$ حسب كل عينة.

العينات الممكنة ذات الحجم $n=2$ من مجتمع حجمه 3 عددها: $N^n = 3^2 = 9$.

العينات الممكنة		
(1, 1)	(3, 1)	(5, 1)
(1, 3)	(3, 3)	(5, 3)
(1, 5)	(3, 5)	(5, 5)

المتوسطات الممكنة للعينة (معاينة بالإرجاع) $\overline{x_i}$		
1	2	3
2	3	4
3	4	5

القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\overline{X})$ هي متوسط قيمها وهي: $E(\overline{X}) = \mu_{\bar{x}} = \sum_i \overline{x_i} / 9 = 3$

ب- حالة السحب بدون إرجاع (في الأغلب الترتيب غير مهم):

العينات الممكنة ذات الحجم $n=2$ من مجتمع حجمه 3 عددها: $C_N^n = C_3^2 = \frac{(3)!}{(3-2)!(2)!} = 3$

العينات الممكنة بدون إرجاع					المتوسطات الممكنة للعينة أو توزيع المعاينة للمتوسطات (معاينة بدون إرجاع) $\overline{x_i}$			
(1, 3)					2			
(1, 5)	(3, 5)				3	4		

القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\overline{X})$ هي متوسط قيمها وهي: $E(\overline{X}) = \mu_{\overline{x}} = \sum_i \overline{x_i} \big/ 3 = 3$

- إذا ما قارننا بين $\mu_{\overline{x}}$ و μ نجد: $E(\overline{X}) = \mu_{\overline{x}} = \mu = 3$

2-2- تباين توزيع المعاينة للمتوسطات:

إذا كانت X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما حجمه N و $\overline{x_i}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة حجمها n مسحوبة من ذات المجتمع، فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسطات يكتب كما يلي:

- <u>حالة السحب بالإرجاع</u>: $\delta_{\overline{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n} \Rightarrow \delta_{\overline{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$.

- <u>حالة السحب بدون إرجاع</u>: $\delta_{\overline{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \Rightarrow \delta_{\overline{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$.

تسمى النسبة $\frac{N-n}{N-1}$ معامل الإرجاع.

وهذا يعني أن الانحراف المعياري هو الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي مضروبا في عامل معين، وهذه المعلومات صحيحة مهما اختلف التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات عن التوزيع الاحتمالي للمجتمع الأصلي.

وإذا نظرنا إلى الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات نلاحظ أن مجتمع المتوسطات أكثر تجانسا من المجتمع الأصلي، أي أن مفرداته متجانسة وغير متشتتة اذا قورنت بمفردات المجتمع الأصلي وهذا من أهم الأسباب التي تجعلنا نعتمد على مجتمع المتوسطات في الاستدلال حول معالم المجتمع الأصلي.

مثال2: في نفس المثال السابق (المثال1).

- أحسب تباين المجتمع؟
- أحسب التباين لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{x}}^2$ في حالة السحب بالإرجاع وفي حالة السحب بدون إرجاع؟.
- قارن بين تباين المجتمع وتباين متوسطات العينات الممكنة (توزيع المعاينة للمتوسطات) في كل حالة؟.

الحل:

- حساب تباين المجتمع: $\delta^2 = \left[\dfrac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{N}\right] = 2.66$
- حساب التباين لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{x}}^2$:

أ- **حالة السحب بالإرجاع:**

السحب بالإرجاع $\bar{x}_i$		
1	2	3
2	3	4
3	4	5

تباين المتوسطات الممكنة للعينة $\delta_{\bar{x}}^2$:

$$\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_i (\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{9} = 1.33$$

- إذا ما قارننا بين $\delta_{\bar{x}}^2$ و δ^2 نجد أن: $\delta_{\bar{x}}^2 = 1.33 = \dfrac{\delta^2}{n} = \dfrac{2.66}{2} = 1.33$

ب- **حالة السحب بدون إرجاع:**

المتوسطات الممكنة للعينة $\bar{x}_i$ السحب بدون إرجاع			
2			
3	4		

تباين المتوسطات الممكنة للعينة $\delta_{\bar{x}}^2$:

$$\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_i (\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{3} = 0.66$$

- إذا ما قارنا بين $\delta_{\bar{x}}^2$ و δ^2 نجد أن: $\delta_{\bar{x}}^2 = 0.66 = \dfrac{\delta^2}{n}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right) = \dfrac{2.66}{2}\left(\dfrac{3-2}{3-1}\right) = 0.66$

2-3- طبيعة توزيع المتوسط:

حتى الآن لم نتعرض لتوزيع مجتمع المتوسطات الحسابية، كل ما تعرضنا له الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ولكن شكل ونوع التوزيع الاحتمالي نفسه يعتمد على توزيع المجتمع الأصلي المسحوب منه العينات. وفيما يلي النظرية الإحصائية التي تعطي التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية نذكرها بدون إثبات وذلك لأننا سوف نستخدمها كثيرا في الاستدلال حول معالم المجتمع الأصلي.

نظرية : إذا كان المجتمع موزع طبيعيا بمتوسط μ وتباين δ^2 فإن متوسط العينة المسحوبة منه يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $\frac{\delta^2}{n}$، ونكتب:

$$\bar{x} \to N\left(\mu, \frac{\delta^2}{n}\right)$$

نظرية النهاية المركزية : إذا كان المجتمع الذي تسحب منه العينة ذو متوسط μ وتباين δ^2 لكن ليس بالضرورة طبيعيا فإن المتغيرة المعيارية لـ $\bar{x}$ أي $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\delta/\sqrt{n}}$ تؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري عندما يكون n كبيرا $(n \geq 30)$ ونكتب:

$$z \longrightarrow N(0.1)$$

- في حالة المجتمع محدود والمعاينة بدون إرجاع نستبدل العبارة $\delta/\sqrt{n}$ بالعبارة:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

عمليا تستخدم هذه الصيغة المعدلة بمعامل الإرجاع للانحراف المعياري عندما $\frac{n}{N} \geq 0.05$

مثال3: مجتمع حجمه 1200 بمتوسط $\mu = 40$ و $\delta = 15$. نستخرج كل العينات الممكنة.

- المطلوب: أحسب المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات في حالة:
  - حجم العينة $n = 49$،
  - حجم العينة $n = 81$.

الحل:

$$1-n=49:\frac{n}{N}=\frac{49}{1200}=0.04<0.05\Rightarrow \delta_{\bar{x}}=\frac{\delta}{\sqrt{n}}=\frac{15}{\sqrt{49}}\approx 2.14$$

$$E(\overline{X})=\mu=20$$

$$2-n=81:\frac{n}{N}=\frac{81}{1200}=0.0675>0.05\Rightarrow \delta_{\bar{x}}=\frac{\delta}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$=\frac{15}{\sqrt{81}}\sqrt{\frac{1200-81}{1200-1}}\approx 1.61$$

$$E(\overline{X})=\mu=20$$

2-4- توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

2-4-1- المتوسط والتباين

ليكن لدينا مجتمعين نسحب من كل منهما عينة عشوائية، نحسب في كل عينة محسوبة من المجتمع الأول الإحصائية S_1 ونحسب نفس الإحصائية (المتوسط مثلا أو التباين ...) في كل عينة من المجتمع الثاني ونسميها S_2. إن الفرق S_1-S_2 يشكل بدوره متغيرة عشوائية لها المتوسط والتباين التاليين:

$$\mu_{S-S2}=\mu_{S1}-\mu_{S2} \qquad \sigma^2_{S1-S2}=\sigma^2_{S1}+\sigma^2_{S2}$$

مثال5. إذا كانت الإحصائية هي المتوسط، وكان لدينا مجتمعين كبيرين من المفردات، وكان متوسط الأول μ_1 وتباينه δ_1^2 ومتوسط الثاني μ_2 وتباينه δ_2^2 فإذا سحبنا عينة من الأول حجمها n_1 مفردة وسحبنا عينة من المجتمع الثاني حجمها n_2 فإن:

$$\mu_{\bar{x}1-\bar{x}2}=\mu_{\bar{x}1}-\mu_{\bar{x}2}=\mu_1-\mu_2$$

$$\delta^2_{\bar{x}1-\bar{x}2}=\delta^2_{\bar{x}1}+\delta^2_{\bar{x}2}=\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}$$

مثال6. إذا كانت الإحصائية هي النسبة فإن:

$$\mu_{p_1-p_2}=\mu_{p_1}-\mu_{p_2}=p_1-p_2$$

$$\delta^2_{p_1-p_2}=\delta^2_{p_1}+\delta^2_{p_2}=\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}$$

– إذا كان الاهتمام هو على مجموع الإحصائيتين بدلا من الفرق بينهما فإن:

$$\mu_{S1+S2}=\mu_{S1}+\mu_{S2} \qquad \sigma^2_{S1+S2}=\sigma^2_{S1}+\sigma^2_{S2}$$

2-4-2- طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين

نظرية : في حالة $n_1 \geq 30$ و n_2 ، يقترب توزيع المتغيرة المعيارية للفرق بين متوسطين من التوزيع الطبيعي المعياري. ونكتب:

$$\mu_{\bar{x}1-\bar{x}2} \rightarrow N(0.1)$$

مثال7: ليكن المجتمع V_1 : 2، 6، 10.

والمجتمع V_2 : 1، 3. تحقق من أن:

$$\boldsymbol{\mu_{V1-V2} = \mu_{V1} - \mu_{V2}} \; ; \qquad \boldsymbol{\sigma^2_{V1-V2} = \sigma^2_{V1} + \sigma^2_{V2}}$$

الحل:

	V_1			
10	**6**	**2**	$V_1 - V_2$	
9	5	1	**1**	V_2
7	3	-1	**3**	

$\mu_{V1} = (2 + 6 + 10)/3 = 6$;

$\mu_{V2} = (1 + 3)/2 = 2 \Rightarrow$

$\mu_{V1} - \mu_{V2} = 6 - 2 = 4$

$\mu_{V1-V2} = (1 + 5 + 9 - 1 + 3 + 7)/6 = 4$

$\sigma^2_{V1} = (2^2 + 6^2 + 10^2)/3 - 6^2 = 10{,}67$;

$\sigma^2_{V2} = (1^2 + 3^2)/2 - 2^2 = 1 \Rightarrow \sigma^2_{V1} + \sigma^2_{V2} = 11.67$

$\sigma^2_{V1-V2} = (1^2 + 5^2 + 9^2 + 1^2 + 3^2 + 7^2) / 6 - 4^2 = 11{,}67$

<u>مثال8:</u> اذا كان $X_1 \rightarrow N(30;;25)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها 30 مشاهدة و $X_2 \rightarrow N(20;;16)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها 35 مشاهدة، أوجد توزيع الفرق بين متوسطي العينتين؟.

الحل:

بالتطبيق المباشر للعلاقتين التاليتين:

$$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$$
$$\delta^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \delta^2_{\bar{x}_1} + \delta^2_{\bar{x}_2} = \frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}$$

نجد:

$$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 30 - 20 = 10$$
$$\delta^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \delta^2_{\bar{x}_1} + \delta^2_{\bar{x}_2} = \frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2} = \frac{25}{30} + \frac{16}{35} = 1{,}29$$

2-5- توزيع المعاينة للتباين وتوزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين

2-5-1- توزيع المعاينة للتباين: إذا كانت متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و S^2 متغيرة عشوائية تمثل تباين عينة مسحوبة من ذات المجتمع، فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة تكتب كما يلي:

- في حالة السحب بالإرجاع: $E(s^2) = \mu_{s^2} = \delta^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$

- في حالة السحب بدون إرجاع: $E(s^2) = \mu_{s^2} = \delta^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$

عندما يكون N كبير جدا N/ (N-1) تؤول إلى 1)

مثال9: من خلال المثال1.

- أحسب القيمة المتوقعة لتباين العينة المسحوبة من المجتمع من خلال متوسط تباينات العينات الممكنة وذلك في حالة السحب بالإرجاع و في حالة السحب بدون إرجاع؟
- ما ذا تلاحظ؟.

الحل:

- حساب القيمة المتوقعة لتباين العينة المسحوبة من المجتمع من خلال متوسط تباينات العينات الممكنة:

أ- حالة السحب بالإرجاع:

التباينات الممكنة S^2_i		
0	1	4
1	0	1
4	1	0

$$\sum_i S_i^2 \Big/ 9 = 12/9 = 1.33 \Rightarrow E[S^2] = 1.33$$

- نلاحظ: $E(s^2) = \mu_{s^2} = 1.33 = \delta^2\left(\frac{n-1}{n}\right) = 2.66\left(\frac{2-1}{2}\right) = 1.33$

ب- حالة السحب بدون إرجاع:

التباينات الممكنة S^2_i			
1			
4	1		

$$\sum_i S_i^2 \Big/ 3 = 6/3 = 2 \Rightarrow E[S^2] = 2$$

- نلاحظ: $E(s^2) = \mu_{s^2} = 2 = \delta^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right) = 2.66\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3}{3-1}\right) = 2$

ملاحظة: لدينا: $E\left(S^2\frac{n}{n-1}\right) = \sigma^2$ ونقول عن $S^2\frac{n}{n-1}$ أنه مقدر "غير منحرف" لـ σ^2

ويرمز له ب $\hat{S}^2$ حيث:

$$\hat{S}^2 = S^2\frac{n}{n-1}$$

- إذا أخذنا عينات عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي، فإن :

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

تمارين و حلول حول الفصل الرابع

التمرين1:

– إذا كان المتغير العشوائي X له التوزيع الطبيعي $N(3;;4)$..

1– ما هو احتمال أن تقع X بين القيمتين 3 و5 ؟.

2– ما هو احتمال أن يكون X أكبر من 1 ؟

حل التمرين1:

لدينا : $Z = \dfrac{X-\mu}{\delta}$ والدالة Φ هي دالة التوزيع الطبيعي المعياري (قيمها تستخرج من الجدول مباشرة).

1– احتمال أن تقع X بين القيمتين 3 و5:

$$\begin{aligned} p(3 < X < 5) &= p\left(\frac{3-3}{2} < Z < \frac{5-3}{2}\right) \\ &= p(0 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(0) \\ &= 0.8413 - 0.5 = 0.3413 \end{aligned}$$

2– احتمال أن يكون X أكبر من 1:

$$\begin{aligned} p(X > 1) &= p\left(Z > \frac{1-3}{2}\right) \\ &= p(Z > -1) = 1 - p(Z \le -1) \\ &= 1 - \Phi(-1) = 1 - 1 + \Phi(1) \\ &= 0.8413 \end{aligned}$$

التمرين2:

– مجتمع إحصائي يخضع للتوزيع الطبيعي، يتكون من المفردات التالية: $(4;;3;;2)$، نسحب بإرجاع عينة من هذا المجتمع ذات حجم $n=2$.

1– أحسب الوسط والتباين للمجتمع؟

2– أحسب عدد العينات الممكنة؟

3– أحسب معالم العينة $\left((\overline{X})\mu_{\overline{X}},,\delta^2_{\overline{X}}\right)$ بطريقة الجداول؟

حل التمرين2:

1– حساب الوسط والتباين للمجتمع:

$$\mu=\frac{\sum X_i}{N}=\frac{2+3+4}{3}=3$$
$$\delta^2=\frac{\sum (X_i-\mu)^2}{N}\approx 0.67$$

2– حساب عدد العينات الممكنة:

العينات الممكنة ذات الحجم $n=2$ من مجتمع حجمه 3 عددها: $N^n=3^2=9$.

3– أحسب معالم العينة $\left((\overline{X})\mu_{\overline{X}},,\delta^2_{\overline{X}}\right)$ بطريقة الجداول:

العينات الممكنة			المتوسطات الممكنة للعينة (معاينة بالإرجاع) $\overline{x_i}$		
(2, 2)	(2,3)	(2,4)	2	2,5	3
(3,2)	(3, 3)	(3,4)	2,5	3	3,5
(4,2)	(4,3)	(4,4)	3	3,5	4

– القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\overline{X})$ هي متوسط قيمها وهي: $E(\overline{X})=\mu_{\overline{x}}=\sum_i \overline{x_i}/9=3$

– تباين المتوسطات الممكنة للعينة $\delta^2_{\overline{x}}$:

$$\delta^2_{\overline{x}}=\frac{\sum_i\left(\overline{x_i}-\mu_{\overline{x}}\right)^2}{9}=0.33$$

التمرين3:

1- إذا كان ضغط الدم لمجموعة من الأفراد يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 90 وانحراف معياري يساوي 9، سحبنا عينة حجمها 36 فردا من هذه المجموعة.

ما هو احتمال أن يكون متوسط ضغط الدم في العينة أكبر من 86 ؟.

2- إذا علم أن نسبة البيض التالف الذي ينتجه أحد مراكز إنتاج الدواجن هي 0.03 ولها توزيع طبيعي، اشترى شخص 400 بيضة من إنتاج هذا المركز .

- ما هو احتمال أن يجد من بينها 20 بيضة على الأقل تالفة؟

حل التمرين3:

1- ايجاد احتمال أن يكون متوسط ضغط الدم في العينة أكبر من 86:

لدينا: $\mu = 90;;n = 36;;\delta = 9$

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 90$$
$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{36}} = 1.5$$

$$p(\bar{x} > 86) = p\left(\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}} > \frac{86 - 90}{1.5}\right)$$
$$= p(z > -2.67) = 1 - p(z \leq -2.67)$$
$$= 1 - \Phi(-2.67) = \Phi(2.67) = 0.9962$$

2- ايجاد احتمال أن يجد 20 بيضة على الأقل تالفة:

لدينا: $p = 0.03;;n = 400$

$$\mu_{p'} = p = 0.03$$
$$\delta_{p'}^2 = \frac{pq}{n} = \frac{(0.03)(0.97)}{400}$$
$$\delta_{p'} = \sqrt{\frac{(0.03)(0.97)}{400}} = 0.0085$$

$$p(x \geq 20) = p\left(p' \geq \frac{20}{400}\right) = p(p' \geq 0.05)$$
$$= p\left(z \geq \frac{0.05 - 0.03}{0.0085}\right) = p(z \geq 2.35)$$
$$= 1 - p(z < 2.35) = 1 - 0.9906 = 0.0094$$

<u>التمرين4:</u> اذا كان لدينا البيانات التالية:

المجتمع	متوسط المجتمع	تباين المجتمع
1	40	18
2	35	25

– تم سحب عينتين مستقلتين من المجتمعين حيث $n_1 = 12$ و $n_2 = 10$. مع العلم أن المجتمعيين طبيعيين.

– أحسب التوزيع العيني للفرق بين متوسطي العينتين $(\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}; \delta^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2})$

<u>حل التمرين4:</u>

– حساب التوزيع العيني للفرق بين متوسطي العينتين $(\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}; \delta^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2})$:

$$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 40 - 35 = 5$$

$$\delta^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \delta^2_{\bar{x}_1} + \delta^2_{\bar{x}_2} = \frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2} = \frac{18}{12} + \frac{25}{10} = 4$$
$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \rightarrow N(5;;4)$$

التمرين05 :

مصنع ينتج كراسي ترتكز على قاعدة دائرية، اعتمادا على التجارب السابقة فان مفتش الرقابة على العملية الإنتاجية مقتنع أن متوسط قطر القاعدة الدائرية5سم والانحراف المعياري لها 0,005سم وتوزيع العملية الإنتاجية هو التوزيع الطبيعي.

يهتم الفاحص بالمحافظة على متوسط قطر العملية الإنتاجية عند 5سم، ولتحقيق ذلك تسحب عينات عشوائية بصفة دورية حجم كل منها 9 كراسي وذلك في محاولة لاكتشاف أية انحراف على الأرقام الطبيعية المشار إليها.

المطلوب:

أ-حدد توزيع المعاينة لـ$\bar{X}$؟

ب-بفرض أن الفاحص سحب عينة عشوائية من 9 كراسي وقيست أقطار قاعدتها ووجد أن $\bar{X} = 5.004$سم ،ما هي إمكانية (احتمال)أن متوسط القطر في تلك العينة العشوائية سيكون على الأقل 5,004سم على فرض أن متوسط العملية باقيا عند 5سم والانحراف المعياري للعملية هو 0,005سم؟

ج-ما هو حجم العينة التي يجب سحبها لتحقيق خطأ معياري لـ$\bar{X}$يساوي 0.001؟

حل التمرين 05 :

لدينا: $n = 9$ ، $\sigma = 0.005$ ، $M = 5$

أ-تحديد توزيع المعاينة لـ$\bar{X}$:

بما أن توزيع الإنتاجية المفترض هو توزيع طبيعي متوسطه5 = M وانحرافه المعياري $\sigma = 0.005$,فان توزيع المعاينة لـ$\bar{X}$هو توزيع طبيعي أيضا متوسطه $M = 5$ وانحرافه المعياري عند $(n = 9)$:

$$\sigma\bar{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.005}{\sqrt{9}} = 0.00166$$

ب-إيجاد احتمال أن متوسط القطر في تلك العينة العشوائية سيكون على الأقل 5.004 سم:

$$\begin{aligned} &P(\bar{X} \geq 5.004) \\ &P\left(Z \geq \frac{5.004 - 5}{0.00166}\right) \\ &= P(Z \geq 2.44) \\ &= 0.5 - P(0 < Z \leq 2.44) \\ &= 0.5 - 0.4918 \\ &= 0.0082 \end{aligned}$$

ج–إيجاد حجم العينة التي يجب سحبها لتحقيق خطا معياري لـ$\bar{X}$يساوي 0.001:

أي لدينا: $\sigma\bar{X} = 0.001$

$$\sigma\bar{X} = \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} = 0.001 \Leftrightarrow \frac{0.005}{\sqrt{n}} = 0.001$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.005}{0.001} = 5$$

$$n = 25$$

قائمة المراجع

قائمة المراجع

باللغة العربية:

- صبحي أبو صالح محمد، مبادئ الإحصاء، دار اليازوري العلمية، عمان، الأردن، 2010.
- دومينيك سالفاتور، ترجمة سعدية حافظ منتصر، الإحصاء و الإقتصاد القياسي، ملخصات شوم، الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، مصر 2011.
- القاضي دلال و أخرون، الإحصاء للإداريين و الإقتصاديين، دار الحامد، الأردن، 2005.
- عدنان عباس حميدان و أخرون، الإحصاء التطبيقي، منشورات جامعة دمشق، سوريا، 2006.
- سيمور ليبشتز، ترجمة سماح داود، نظريات و مسائل في الإحتمالات، ملخصات شوم، الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، مصر 2003.
- بو بلوطة بلال، مطبوعة بعنوان: نظريات و تمارين محلولة في الإحتمالات، جامعة جيجل، الجزائر، 2017/2016.
- ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، مطبوعة بعنوان: ملخص الإحصاء 2، جامعة سطيف، الجزائر، 2015/2014.
- بودغدغ أحمد، مطبوعة بعنوان: دروس في الإحصاء 3، جامعة جيجل، الجزائر، 2017/2016.
- عبد الهادي الرفاعي، مقرر الإحصاء التطبيقي، كلية العلوم الإدارية، جامعة الشام، سوريا.

باللغة الأجنبية:

- *Bengamin, L ., Statictique et probabilités en économie-gestion, Dunod, Paris, 2016.*
- *Grégoir, D ., Probabilités et statistiques pour l'enseignement, Dunod, Paris, 2020.*
- *Jean-Pierre, N ., Josiane, C ., Statistique explicative appliquée, Éditions TECHNIP, Paris, 2003.*
- *Jolion, J.M., Probabilités et Statistique,* http://rfv.insa-lyon.fr/~jolion/STAT/poly.html
- *Grais, B., Méthodes Statistiques, Dunod, 3ème édition, 2003.*
- *Saporta, G., Probabilités, Analyse des données et Statistique, Éditions TECHNIP, 2ème édition, 2006.*

- *Veysseyre R., Aide Mémoire. Statistique et probabilités pour l'ingénieur, Dunod, 2ème édition, 2006.*
- *Thomas Bruss, The Annals of Probability 28, 2000.*
- *T. Hastie, R. Tibshirani et J. Friedman, The Elements of Statistical Learning, Springer, 2001.*
- *R. Isaac. Vuibert, Une initiation aux probabilités, 2005.*